Janßen

Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht

Thomas Janßen

Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht

Lernbezogene Neudeutung eines mathematikdidaktischen Begriffs

open access

Thomas Janßen
Universität Bremen

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat., eingereicht am Fachbereich 3 der Universität Bremen
Datum der Verteidigung: 22. Juli 2016
Erste Gutachterin: Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs (Universität Bremen)
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Tommy Dreyfus (Tel Aviv University)

Gesetzt in Linux Libertine und Linux Bionolium. Das Dokument ist für den beidseitigen Druck im A4-Format ausgelegt. Wenn das Dokument verkleinert mit zwei Seiten pro Blatt gedruckt wird, sollte mit einer Seite mit gerader Seitenzahl begonnen werden, um ein Schriftbild wie im aufgeschlagenen Buch zu erhalten. Es wird empfohlen, die Seiten 136, 139, 145, 220 sowie Seite 355-357 farbig auszudrucken; bei allen anderen Seiten ist ein Druck in Graustufen ausreichend.

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich mich bei meiner Betreuerin Angelika Bikner-Ahsbahs bedanken. Sie hat mir schon im Studium und in der Betreuung meiner Master-Arbeit geholfen, eine Basis an Wissen über Theorien und Forschungsmethoden aufzubauen, und ich schätze mich äußerst glücklich, dass sie mir die Möglichkeit gegeben hat, mich intensiv mit einem Thema auseinanderzusetzen. Angelika hatte stets ein offenes Ohr für Fragen und hat mir insbesondere in der Planung der Unterrichtsdesigns mit ihrer reichen Erfahrung zur Seite gestanden. Gleichzeitig hat sie mir in der Gestaltung meiner Studie sowie in der Wahl von Theorien und Methoden große Freiheiten gelassen. Doch auch abseits des Fachlichen war sie ein großer Rückhalt, ohne den diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Tommy Dreyfus danke ich dafür, dass er sich zur Begutachtung der Arbeit bereiterklärt hat, und für seinen Rat ganz zu Beginn des Projekts, ohne den ich es nicht anzugehen gewagt hätte. Als inoffizieller Ratgeber soll außerdem Luis Radford erwähnt werden. Nicht nur verdanke ich seinen Veröffentlichungen zentrale Ideen, sondern er war auch bereit, diese Ideen mit mir persönlich zu erörtern. In dem Monat, den ich an seinem Institut verbringen durfte, räumte er mir viel Zeit für gemeinsame Datenanalysen und Gespräche über die Theorie ein und stand mir auch in der Folge bei Nachfragen zur Seite. In diesem Zusammenhang danke ich auch Vanessa und Sofia Gonçalves sowie Yolette Brant für die nette Gemeinschaft im Lab, und Vanessa ganz besonders dafür, mir die Technik beizubringen, mit der aus Videoframes ansehnliche Strichzeichnungen werden.

In der Durchführung der Studie war ich darauf angewiesen, dass eine Lehrkraft mit mir zusammen Unterricht plant und ich von ihr und ihren Schülerinnen und Schülern die Erlaubnis bekomme, Daten zu erheben. Ich bin „Frau Kahn“ äußerst dankbar für die Zeit und Energie, die sie für das Projekt aufgewendet hat und hoffe, dass ihr die vorliegende Arbeit einen neuen, interessanten Blick auf ihren Unterricht gibt. Bei den Schülerinnen und Schülern sowie ihren Eltern bedanke ich mich für das Vertrauen, das sie mir entgegengebracht haben. Ein spezieller Gruß gilt „Ahmed“, „Katie“, „Sabine“ und „Herbert“ – ihnen wünsche ich ganz besonders alles Gute auf ihrem weiteren Lebensweg!

In den vergangenen fünfeinhalb Jahren durfte ich in eine wissenschaftliche Community hineinwachsen, in der es viele aufgeschlossene Menschen gibt – und dazu die Bereitschaft, Neulingen wie mir aktiv unter die Arme zu greifen. Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik hat meine Teilnahme an drei ihrer Tagungen sowie an der vom IPN in Kiel ausgerichteten Summer School finanziell gefördert. Die CERMEs in Antalya und Prag haben mir das gleiche Gefühl des Willkommen-seins auf internationaler Ebene vermittelt. Bei der von der ERME ausgerichteten Summer School in Faro lernte ich in der Arbeitsgruppe von Ferdinando Arzarello nicht nur inhaltlich dazu, sondern knüpfte auch Kontakte mit angehenden Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern aus ganz Europa. 2013 durfte ich zudem am Earli Advanced Study Colloquium in London teilnehmen, wo mein Blick auf

Theorien über Lehren, Lernen und Erziehung deutlich erweitert wurde. Ich danke allen, mit denen ich im Rahmen der genannten Zusammenkünfte sprechen durfte, und denen, die im Hintergrund für die Planung zuständig waren.

An meiner Arbeitsstelle an der Universität Bremen durfte ich Teil eines guten Teams sein. Ingolf Schäfer teilte nicht nur ein Büro mit mir, sondern gab mir auch viele gute Hinweise sowohl bezüglich wissenschaftlicher als auch bezüglich technischer Fragen. Unter den Doktorandinnen und Doktoranden herrschte ein solidarisches Miteinander, hierfür bedanke ich mich bei Julia Cramer, Christina Krause, Jenny Cramer, Jonathan von Ostrowski, Ole Eley, Daniela Behrens, Stephanie Lachky, Chrysi Papadaki, Vivica Zweidar, Mareike Best, Neruja Suriakumaran und Uwe Schallmeier. In den wöchentlichen Forschungsseminaren konnte ich meine Fortschritte einem kritisch unterstützenden Publikum vorstellen und Hinweise für die weitere Arbeit erhalten. Dafür danke ich neben den bereits genannten Personen Reimund Albers, Steffen Hahn, Christine Knipping, David Reid und Maike Vollstedt.

Die Niederschrift der Arbeit wäre auch nicht möglich gewesen ohne die unentgeltliche Arbeit unzähliger Menschen, die Programme wie LaTeX, Inkscape oder Gimp entwickeln und weiterentwickeln – auch ihnen möchte ich an dieser Stelle unbekannterweise danken. Fehler und Unklarheiten im Text wurden schließlich gesucht und gefunden von Christina Krause, Tobias Linke, Simon Wilke und Laura Klein. Danke euch!

Auch wenn die Arbeit an der vorliegenden Dissertation gerade am Ende einen großen Teil meiner Zeit beansprucht hat, liegt das, was mir diese Arbeit ermöglicht hat, doch eigentlich außerhalb von Schule und Universität. Ich danke meinen Eltern, meinen Geschwistern und meiner Oma, dass sie mich über mein gesamtes Leben begleitet haben. Als meinem besten Freund möchte ich Jos Gesenhues danken, dass er mir als Teiler vieler gemeinsamer Interessen, als Zuhörer und Tröster zur Seite stand. Allen weiteren Freundinnen und Freunden – den stillen und den lauten, den gemütlichen und den sportlichen, den Fußballfans und den Bunkers – danke ich für so vieles, was in den letzten fünf Jahren wichtig war. Schließlich danke ich meiner Freundin Laura Klein für ihre Unterstützung und Ablenkung, die die letzte Zeit erträglich und manchmal richtig schön machte, und für das, was wir gemeinsam haben.

Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit

Viele Menschen sehen in Gleichungen und Termen wenig mehr als eine sinnlose Ansammlung von Buchstaben, Zahlen und weiteren Zeichen. Andere hingegen gehen scheinbar mühelos mit den aus den Symbolen gebildeten algebraischen Strukturen um, interpretieren die Ausdrücke, manipulieren sie, werten sie aus, kommen zu Lösungen. Sie verfügen über *algebraischen Struktursinn.* Die vorliegende Arbeit nimmt die Prozesse seiner Ausbildung im Klassenunterricht in den Blick. Dies geschieht anhand von Daten aus zwei Unterrichtseinheiten (eine zu linearen Gleichungen, eine zu linearen Funktionen), die zusammen mit der Mathematiklehrerin der Klasse geplant wurden.

Zwei theoretische Sichtweisen – das *SVSt-Modell* (Bikner-Ahsbahs, 2005) und die *Theory of Objectification* (u. a. Radford, 2013b) – erlauben miteinander vernetzt die Identifikation und interpretative Beschreibung solcher Situationen, in denen Schülerinnen und Schüler Strukturen sehen und so unter Umständen algebraischen Struktursinn ausbilden. Die dokumentarische Methode wird angewendet, um zunächst das über einen längeren Zeitraum beobachtete Unterrichtsgeschehen in seiner Komplexität zu erfassen und dann seine Bedeutung in Bezug auf die Forschungsfragen zu erschließen.

Es wird herausgearbeitet, dass sich die Ausbildung algebraischen Struktursinns als das Hineinwachsen in die Tätigkeit mit der jeweiligen algebraischen Struktur beschreiben lässt. Bezüglich linearer Gleichungen kann der Verlauf dieses Prozesses detailliert nachvollzogen werden. Es wird aufgezeigt, wie sich die neue Sicht auf die algebraische Struktur in verbalen Beschreibungen und Verschriftlichungen manifestiert. Außerdem wird erörtert, auf welches Vorwissen Schülerinnen und Schüler in der Ausbildung algebraischen Struktursinns angewiesen sind. Doch die Ausbildung algebraischen Struktursinn ist keine reine Geistesleistung: Situatives Interesse und längerfristige Rollenfestlegungen spielen eine entscheidende Rolle. Als soziale Interaktionsform, in der all diese Aspekte zusammenkommen, wird das *Tuning* beschrieben. Hier stimmen die Schülerinnen und Schüler ihre Sicht auf die algebraische Struktur mit der Lehrkraft ab.

Durch die abschließende tiefgehende Diskussion der empirisch gewonnenen Ergebnisse in Bezug auf die verwendeten Theorien und durch die Herstellung von Verbindungen in die weitere Forschungslandschaft wird gezeigt, wie die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse über das konkrete Untersuchungsfeld hinaus von Bedeutung sind.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Motivation und Ausrichtung der Arbeit

Farmelo (2010, S. 83-88) beschreibt, wie der junge Paul Dirac zu seiner ersten bahnbrechenden Formulierung eines quantenmechanischen Zusammenhangs kommt: Dirac ist überzeugt, dass er einen Zugang zur Nichtkommutativität von Größen finden muss, der er immer wieder begegnet. Bei einem Sonntagsspaziergang kommt ihm die Idee, die Differenz der Produkte (also $AB - BA$ für beliebige A, B) in den Blick zu nehmen. Er hat die vage Erinnerung, dass die Poisson-Klammer eine ähnliche Gestalt hat. Nach zähem Warten kann er am Montagmorgen endlich in der Bibliothek nachsehen, ob ihn sein Einfall weiterbringt:

> Sure enough, as Dirac had surmised, the Poisson bracket, which first appeared over a century before in the writings of French mathematician Siméon-Denis Poisson, had the form of two mathematical quantities minus two related quantities multiplied together, the multiplication and minus signs making it appear similar to the expression AB − BA. In one of his greatest insights, Dirac saw that he could weave an entire carpet from this thread – within a few weeks of uninterrupted work he had set out the mathematical basis of quantum theory in analogy to the classical theory (Farmelo, 2010, S. 87).

Eine nur grob ähnliche Formel als Ansatzpunkt für eine in ihrer Art völlig neue Sichtweise heranzuziehen ist eine Leistung, die selbst professionellen Mathematikerinnen und Mathematikern nur in Ausnahmefällen gelingt. Und doch ist die Art, mit der Dirac auf die Gleichungen schaut, nachvollziehbar. Mehr noch, es ist nachvollziehbar, wie ihn das Erkennen einer bekannten algebraischen Struktur vorwärts bringen kann. In der Schulmathematik kann es beispielsweise hilfreich sein, wenn man erkennt, dass eine Funktion linear ist und demnach maximal eine Nullstelle besitzen kann. Wenn man sieht, dass sich die Gleichung $4x^2 - 16x + 16 = 0$ auch ohne pq-Formel lösen lässt, weil sie sich mit Hilfe der zweiten binomischen Formel so darstellen lässt, dass die Lösungen unmittelbar sichtbar werden. Wenn man lineare Gleichungen von anderen unterscheiden kann und bei $3 + a + 3a - 2 = 5a + 3$ gar nicht mehr mühsam rechnen muss, sondern sich die gleichen Bestandteile auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einfach „wegdenken“ kann.

Diejenigen unter uns, denen all dies leicht fällt, können häufig umso schwerer nachvollziehen, wie andere dauerhaft Probleme damit haben können. Letzteren fehlt scheinbar ein Zugang, der so schwierig zu fassen und anderen zu vermitteln ist, dass auch der vorherige Absatz in seinen Beschreibungen auffällig unpräzise bleibt und stattdessen metaphorisch von „schauen“, „erkennen“ und „Sichtbarkeit“ spricht. Für eine Schülerin, die hier nicht folgen kann, müssen diese Beschreibungen klingen wie die Ausführungen eines Weinexperten für einen diesbezüglichen Laien. Und genau dies äußert sich in typischen Aussagen von Schülerinnen und Schülern: „Ich kann das halt nicht", „das ist mir nicht gegeben", „mir fehlt das Mathe-Gen", „der Sinn" für die Strukturen in den Symbolen. Diese Erfahrung eines Mangels an *Struktursinn* wurde schon mehrfach auch in die mathematikdidaktische Diskussion hineingetragen (Malle, 1993; Arcavi, 1994; Linchevski und Livneh, 1999).

Eine erste ausführliche begriffliche und empirische Auseinandersetzung mit dem *algebraischen Struktursinn* liefert Hoch (2007). Sie definiert algebraischen Struktursinn als eine Menge an Kompetenzen, die nach und nach ausgebildet werden können. Sie zeigt darüber hinaus, dass durch intensives, individuelles Training nachhaltige Fortschritte zu erreichen sind. Algebraischer Struktursinn ist also (wie beispielsweise der Sinn für geschmackliche Eigenschaften des Weins beim Weinexperten) erlernbar. Und doch bilden viele Schülerinnen und Schüler ihn im Laufe seiner Schullaufbahn nicht aus. Dass der schulische Mathematikunterricht allerdings nicht nur in Ausnahmefällen das Umfeld für die Ausbildung algebraischen Struktursinns liefert, bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. In einer designbasierten Studie soll der Frage nachgegangen werden, wie sich die Ausbildung algebraischen Struktursinns im alltäglichen Klassenunterricht gestalten lässt. Dabei wird von einer ganz anderen begrifflichen Fassung des algebraischen Struktursinns ausgegangen als bei Hoch. Ihr Ansatz, algebraischen Struktursinn als Kompetenz aufzufassen, ist hilfreich, wenn man den Grad seiner Entwicklung zu einem bestimmten Zeitpunkt feststellen möchte. Die Beschreibung einer fortlaufenden Entwicklung ist damit aber nur insofern möglich, als dass man bei einer Schülerin oder einem Schüler in einem zweiten Test zusätzliche Kompetenzen misst. Was genau passiert ist, was den *Lernprozess* ausgemacht und begünstigt hat, kann so nur gemutmaßt werden. Dies soll in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe einer theoretischen Sichtweise erschlossen werden, die eine qualitative Beschreibung von Lernprozessen im Vollzug erlaubt.

Die bis hierhin gemachten Überlegungen finden im weiteren Verlauf dieses Kapitels eine vertiefte Ausarbeitung. Es werden die vorhandenen Arbeiten zum algebraischen Struktursinn sowie zu verwandten Themen der Didaktik der Algebra daraufhin untersucht, welche Ansätze bereits (theoretisch wie praktisch) erprobt wurden. Es wird erkundet, welche Fragestellungen sich mit dem beschriebenen Interesse ergeben und welchen Anforderungen die Theorien zu genügen haben, die die bestehenden Forschungslücken füllen sollen. Die Auswahl und Darstellung der in dieser Arbeit verwendeten Theorien bildet dann den Gegenstand des 2. Kapitels, das mit einer Reformulierung der zu untersuchenden Forschungsfragen abgeschlossen wird. Ausgehend davon werden dann Forschungsmethodologie (Kapitel 3) und -methoden (Kapitel 4) entwickelt. Ihnen entsprechend folgt eine ausführliche Analyse der dieser Arbeit zugrundeliegenden Daten (Kapitel 5 und 6). Schließlich werden die Ergebnisse zusammengefasst in Bezug auf die zugrundeliegenden Theorien diskutiert und in einen größeren Kontext gestellt (Kapitel 7).

1.2. Algebra und ihre Strukturen – Eingrenzung des Gegenstands der Arbeit

Das Wort *Struktur* geht auf das lateinische *structura* zurück. Mögliche Übersetzungen sind „Bauart" und „Aufbau" (Pons, 2016); es lässt sich auf das Verb *struo* zurückführen, das verschiedene Arten des Zusammenfügens meint, insbesondere aber auch mit „ordnen“ übersetzt werden kann. Im allgemeinen Sprachgebrauch versteht man unter einer Struktur etwas, was aus Teilen zusammengesetzt ist, die in einer bestimmten Beziehung zu einander stehen. Dieser Strukturbegriff findet eine breite Anwendung. Die Zergliederung sämtlicher Sach- und Lebensbereiche ist ein auszeichnendes Merkmal der Moderne und findet sich somit auch in der Mathematik wieder. Bishop (1990) argumentiert, dass man spezifischer von der *westlichen Mathematik* sprechen solle. Er identifiziert vier Wertebündel, durch die sie sich auszeichnet (S. 56 ff.): *Rationalismus*, *Macht und Kontrolle* sowie *Fortschritt und Veränderung*, vor allem aber den *Objektismus* (*objectism*). Gemeint ist damit eine Wahrnehmung der Welt als aus diskreten Gegenständen zusammengesetzt, „able to be removed and abstracted, so to speak, from their context. To decontextualise, in order to be able to generalise, is at the heart of western mathematics and science“ (Bishop, 1990, S. 57).

Unter algebraischen Strukturen versteht man nun in der wissenschaftlich betriebenen Mathematik Mengen mit bestimmten Eigenschaften, die axiomatisch festgelegt werden. Um diese Strukturen geht es in dieser Arbeit ausdrücklich *nicht*. Denn im Schulunterricht werden die Axiome der behandelten Zahlbereiche meist stillschweigend angenommen. Das Interesse richtet sich, sobald überhaupt strukturelle Aussagen gemacht werden, auf die Merkmale von *symbolisch-algebraischen Darstellungen*, also *Gleichungen und Terme*, bezüglich derer Regeln formuliert und angewendet werden können. Beispiele für solche Strukturen sind die Standardformen, die sich für die Terme bestimmter Funktionstypen benennen lassen, wie $mx+b$ für lineare Funktionen oder ax^2+bx+c für quadratische Funktionen, oder Termstrukturen, die bestimmte Umformungen nahelegen: Bei einem Term der Form $ab + ac$ lässt sich der gemeinsame Faktor ausklammern, später sollten Schülerinnen und Schüler auch komplexere Umformungen wie die nach den binomischen Formeln als angemessen erkennen können. Auch solche Strukturen werden in der Didaktik als algebraische Strukturen bezeichnet und sind der Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Dabei werden allerdings ihre Vorläufer ausgeklammert, die in der Literatur unter dem Schlagwort *Early Algebra* behandelt werden. Auch dort wurde bereits die Idee des Struktursinns aufgegriffen und von Lüken (2012) auf Strukturen angewendet, mit denen Schülerinnen und Schüler in der Grundschule umgehen. Diese und weitere Arbeiten (Steinweg, 2001; Mulligan und Mitchelmore, 2009) zu nicht- oder frühalgebraischen Strukturen, die ihrerseits auf eine reiche Tradition in der Grundschuldidaktik zurückgreifen können, werden also im folgenden Überblick über den Stand der Forschung nicht berücksichtigt.

1.3. Algebraischer Struktursinn als Gegenstand didaktischer Forschung

Die Forderung, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht einen Blick für algebraisch formulierte Strukturen ausbilden sollen, lässt sich bei einer Durchsicht der Literatur der letzten 30 Jahre immer wieder finden, und auch für die Zukunft wird diese Fähigkeit als zum Basiswissen der Algebra zugehörig angenommen (MacGregor, 2004, S. 325). Der Ruf nach einem wie auch immer gearteten Struktursinn ist häufig verbunden mit der

Feststellung, dass dies bislang nur unzureichend gelinge. Über die Folgen schreibt Stacey (2011): „Wenn Lernende die Struktur der Ausdrücke nicht wahrnehmen … werden sie Schwierigkeiten in allen Bereichen der Algebra haben (beim Lösen, Ersetzen, Vereinfachen etc.)" (S. 11). Im Folgenden werden drei dieser zunächst normativ ausgerichteten Ansätze dargestellt. Ausgehend davon werden dann empirisch ausgerichtete Arbeiten gesichtet, die sich der dargestellten Problematik gewidmet haben. Schließlich werden weitere Forschungsergebnisse aus der didaktischen Forschung angeführt, die sich auf einzelne Aspekte des Umgangs mit algebraischen Strukturen und den damit verbundenen Lernprozessen befassen oder mit ihrer Sichtweise auf das Feld eine Bereicherung darstellen.

1.3.1. Ausbildung algebraischen Struktursinns als normatives Ziel

Die drei hier vorgestellten Herangehensweisen sind so angeordnet, dass sie die Entwicklung der fachlichen Diskussion spiegeln: Mit dem Standardwerk der deutschsprachigen Didaktik der Algebra von Malle (1993) wird exemplarisch das vorhandene allgemeine Unbehagen an den Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Erkennen von Termstrukturen herausgearbeitet. Angesichts der Tatsache, dass derartige Werke in vielen Ländern vorliegen – häufig auch mehrfach –, wird sich auf einige Seitenblicke auf die Bücher von Vollrath (1999) (als zweites Standardwerk im deutschsprachigen Raum) und Mason, Graham und Johnston-Wilder (2005) (als international wirkmächtige Zusammenstellung) beschränkt. Einen ganz anderen Stellenwert bekommt das Thema in dem Moment, in dem es in internationalen Journals zur Diskussion gestellt wird. Eine Vorreiterrolle nimmt hier Arcavi (1994, 2005) mit seinen Debattenbeiträgen zum *Symbol Sense* ein. Die Arbeiten schließlich, die sich explizit auf den Begriff des *algebraischen Struktursinns* beziehen, sind empirisch ambitionierter und lassen sich sowohl theoretisch als auch in ihrer Empirie klarer fassen. Somit sollen sie dann auch den Ausgangspunkt für die Darstellung weiterer Forschungsergebnisse bilden.

Malle: Erkennen von Termstrukturen

In der deutschsprachigen Didaktik der Algebra wird das Ziel einer Ausbildung von Struktursinn im Standardwerk von Malle (1993, S. 190-197) angesprochen. Hier weist er dem „Erkennen von Termstrukturen" eine besondere Bedeutung zu und macht Vorschläge für Aufgaben, mit denen die Fähigkeit dazu vermittelt werden kann (S. 254-261). Kern von Malles Argumentation ist, dass das Erlernen von Algebra nicht in erster Linie dem richtigen Umformen gewidmet sein sollte – hier schreibt der Autor bereits Anfang der 1990er Jahre, dass dies auch Computer übernehmen könnten –, sondern vielmehr ein tiefes Verständnis erreicht werden sollte, das die Schülerinnen und Schüler zum Aufstellen algebraischer Terme als Darstellungs- und Problemlösungsmittel befähigt (Malle, 1993, S. 10-14). Malle sieht das Erkennen von Termstrukturen als eine Kulturtechnik an:

> Termstrukturen kann man nicht einfach dadurch erkennen, daß man einen Term lange genug anschaut. Sie sind keine Eigenschaften der Schreibfiguren an sich, sondern **Sichtweisen**, die angeben, wie diese Schreibfiguren zu verstehen sind. Diese Sichtweisen sind historisch entstanden und müssen von Lernenden

> in einem Lernprozeß nachentwickelt werden. Da diese Sichtweisen wesentlich auf **Konventionen** beruhen, ist ein solches Lernen ohne Kommunikation nicht möglich. Irgendjemand muß dem Lernenden sagen oder auf eine andere Weise mitteilen, wie Terme in der Mathematik zu ‚sehen' sind (S. 254, für allgemeinere Ausführungen vgl. S. 35 f. a.a.O.).

Ein Blick in ähnliche Werke (Vollrath, 1999; Mason et al., 2005) zeigt, dass Malles explizite Aufmerksamkeit für Strukturen ein Einzelfall ist. Natürlich werden auch in den anderen Werken die algebraischen Strukturen mitgedacht. Bei Vollrath (1999) beispielsweise lässt sich folgende Forderung finden: „Wichtig ist, daß die Schüler lernen, Terme zu analysieren und ihren Aufbau übersichtlich darzustellen" (S. 99). Auf eine Warnung vor übermäßig kompliziert aufgebauten Termen folgt jedoch nur ein Aufgabenbeispiel, eine Begründung der aufgestellten Forderung erfolgt nicht. Im Lehrgang von Mason et al. (2005) wird ohnehin weitgehend auf didaktische Reflexionen verzichtet, dementsprechend finden auch algebraische Strukturen hier keine ausdrückliche Erwähnung.

Arcavi: Symbol Sense

Arcavi (1994) wünscht sich für die Schülerinnen und Schüler einen sinnvollen Umgang mit Termen und Gleichungen. In seiner Herleitung des Konzepts *Symbol Sense* beschreibt er zunächst acht Verhaltensweisen, die Beispiele für seine Anwendung sind (S. 24-31). Daraus entwickelt er einen unvollständigen Katalog von Fähigkeiten und Einstellungen, durch die sich Symbol Sense auszeichnet:

- Ein Verständnis und ästhetisches Gefühl für die Macht der Symbole – wie und wann sie eingesetzt werden können und sollten, um Verhältnisse, Verallgemeinerungen und Beweise zu vermitteln, die ansonsten unvermittelbar blieben.

- Ein Gefühl dafür, wann Symbole nicht hilfreich sind und man mit anderen Ansätzen ein Problem besser angehen kann, oder eine einfachere oder elegantere Lösung oder Veranschaulichung findet.

- Eine Fähigkeit, algebraische Ausdrücke einerseits umzuformen, anderseits lesen zu können. Für Umformungen ist es hilfreich, sie nur noch nach ihrer äußeren Gestalt und losgelöst von ihrer Bedeutung zu sehen. Andererseits kann das auf Bedeutung ausgerichtete Lesen symbolischer Ausdrücke wertvolle Verbindungen liefern.

- Ein Bewusstsein dafür, dass man symbolische Ausdrücke entwickeln kann, die verbal oder grafisch vorliegende Informationen darstellen, und die Fähigkeit, dies auch zu tun.

- Die Fähigkeit, eine mögliche symbolische Repräsentation auszuwählen, und gegebenenfalls ihre Unzulänglichkeiten zu erkennen und zielgerichtet eine bessere zu suchen.

- Die Erkenntnis, dass man in einem Problemlöseprozess stets die Bedeutung der Symbole im Blick haben sollte, um diese mit der eigenen Intuition oder den erwarteten Ergebnissen abzugleichen.

- Eine Wahrnehmung für die verschiedenen Rollen, die Symbole in verschiedenen Kontexten haben können (Arcavi, 1994, S. 31).

Der Autor macht deutlich, dass Symbol Sense nicht in diesem Katalog bestehen kann, sondern im kompetenten Umgang mit der beobachteten Komplexität: Verschiedene Aspekte könnten miteinander interagieren oder bezüglich unterschiedlicher Inhalte unterschiedlich ausgeprägt sein. Zudem dürfte das Entdecken von Zusammenhängen außerhalb der symbolischen Algebra durchaus Einfluss auf das Verständnis algebraischer Zusammenhänge haben. Daraus ergibt sich: „Symbol sense is the algebraic component of a broader theme: sense-making in mathematics“ (Arcavi, 1994, 32).

Bezüglich der Vermittlung des Symbol Sense werden in dem einführenden Artikel mehr Fragen aufgestellt als beantwortet. Als sicher wird lediglich angenommen, dass „it will be the *activity* the students are led to engage in that will determine if it supports the construction of symbol sense“ (Arcavi, 1994, S. 33, Hervorhebung im Original). Erst in einem späteren Artikel wird Arcavi (2005) spezifischer (siehe Abschnitt 1.3.2).

Linchevski und Livneh, Hoch: Algebraischer Struktursinn

Die erste explizite Erwähnung des Begriffs „algebraischer Struktursinn“ findet sich bei Linchevski und Livneh (1999). Die Autorinnen befassen sich in dem Aufsatz mit den Problemen, die Schülerinnen und Schülern mit Strukturen in der Arithmetik und in der Algebra haben. Außer im Titel des Artikels taucht der Begriff allerdings nur in der Diskussion der Ergebnisse auf:

> Undoubtedly, students must be exposed to the structure of algebraic expressions. However, it must be done in a way that enables them to develop structure sense. This means that they will be able to use equivalent structures of an expression flexibly and creatively. Instruction should promote the search for decomposition and recomposition of expressions and guarantee that the mental gymnastics needed in manipulating expressions makes sense (Linchevski und Livneh, 1999, S. 191).

Diese Beschreibung erinnert an die bereits beschriebenen Ansätze, ist allerdings zunächst auch ähnlich ungenau wie diese. Struktursinn ist erst einmal nur eine Metapher, die sicherstellen kann, dass wir alle einen gemeinsamen Wunsch haben, nämlich dass Schülerinnen und Schüler in einer natürlichen Weise flexibel mit der algebraischen Formelsprache umgehen können. Wegen der Doppelbedeutung des Wortes *Sinn* im Deutschen muss darauf hingewiesen werden, dass der Struktursinn hier erst einmal als *ein Sinn für etwas* (sense) gedacht ist, nicht als *der Sinn von etwas* (meaning). Vielleicht würde es daher helfen, von Strukturwahrnehmung zu sprechen, oder in Analogie zum Zahlenblick (number sense) von Strukturblick (vgl. Rüede, 2015). Doch es geht eben nicht um bloßes Wahrnehmen oder Sehen. Es reicht nicht zu sehen, *dass* irgendeine Struktur vorliegt. Aus dem obigen Zitat wird deutlich, dass man sehen muss, *welche* Struktur es ist. Um die Tragweite dieser Unterscheidung zu erkennen, mag folgende allgemeine Betrachtung hilfreich sein: Bewusst werden uns immer nur bereits verarbeitete Sinneseindrücke. Bezüglich visueller Eindrücke schreibt Dehaene (2014): „Our retina is full of imperfections, such as blood vessels running in front of the photoreceptors, which we must learn to interpret as coming from inside rather than from outside“ (S. 26 f.)[1]. Das bedeutet insbesondere, dass wir ihre Bedeutung sehr wohl mitdenken. Beispiele dafür, wie wir selbst dann noch von Sinnen sprechen, wenn ganz offensichtlich kulturelle Bedeutungszuschreibungen im Spiel sind, sind der bereits weiter oben angeführte Sinn für Wein (ebenso anwendbar auf andere hoch geschätzte Lebensmittel), für Musik, Mode, Ästhetik, angemessenes Verhalten in verschiedenen sozialen Zusammenhängen und vieles mehr. Genauso sind algebraische Strukturen und die Regeln für den Umgang mit ihnen kulturell gewachsen. Wenn wir von Schülerinnen und Schülern erwarten, dass sie *eine bestimmte Struktur* sehen, ist dies eine kulturell geprägte Erwartung, eine normative Setzung.

Wenn algebraischer Struktursinn aber ein wissenschaftlicher Begriff sein soll, braucht es Behauptungen, die sich be- und widerlegen lassen müssen. Eine solche Annäherung an das Thema bietet die Dissertation von Maureen Hoch (2007). In Interviews mit Mathematikern und Mathematikerinnen arbeitet sie heraus, was algebraischen Struktursinn ausmacht, wobei zwischen verschiedenen Levels von Struktursinn unterschieden wird. Algebraischer Struktursinn (auf dem jeweiligen Level) liegt demnach vor, wenn Schülerinnen und Schüler

- eine bekannte Strukur in ihrer einfachsten Form wiedererkennen können (Struktursinn 1)
- mit einem zusammengesetzten Term als einer Einheit umgehen und durch geeignete Ersetzungen eine bekannte Struktur in einer komplexeren Form wiedererkennen können,
  - wenn der zusammengesetzte Term ein Produkt oder eine Potenz, aber keine Summe enthält (Struktursinn 2a)
  - wenn der zusammengesetzte Term eine Summe und möglicherweise auch ein Produkt oder eine Potenz enthält (Struktursinn 2b)
- angemessene Umformungsschritte wählen können, um die Struktur bestmöglich zu nutzen
  - wenn die Struktur in ihrer einfachsten Form vorliegt (Struktursinn 3)
  - wenn der zusammengesetzte Term ein Produkt oder eine Potenz, aber keine Summe enthält (Struktursinn 3a)
  - wenn der zusammengesetzte Term eine Summe und möglicherweise auch ein Produkt oder eine Potenz enthält (Struktursinn 3b) (Hoch, 2007, S. 40, eigene Übersetzung in Anlehnung an Hoch und Dreyfus, 2010)

[1]Der Autor fügt in Klammern hinzu: „Imagine how horrible it would be to be constantly distracted by wiggly bloody curves barring our gaze.“

1.3.2. Empirie zur Ausbildung algebraischen Struktursinns

Zur genaueren Bestimmung der Forschungsfragen soll im Folgenden ein Überblick über bereits vorliegende empirischen Ergebnisse gegeben werden. Dabei wird nun von Hochs Arbeit ausgegangen. Dem folgt ein kurzer Überblick über die Ergebnisse, die von den anderen bereits dargestellten Protagonistinnen und Protagonisten berichtet werden. Es folgen zwei Ansätze, die zwar nicht die Ausbildung algebraischen Struktursinns propagieren, mit ihrem didaktischen Blick auf algebraische Strukturen und den sich daraus ergebenen Ergebnissen aber für diese Arbeit von Bedeutung sind.

Forschung von Hoch

Die oben beschriebene Definition algebraischen Struktursinns erprobt Hoch (2007) anhand von Termstrukturen, die in der Algebra der israelischen High School von Bedeutung sind:

- Bei einem Term der Form $a^2 - b^2$ sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass sie hier mit Hilfe der dritten binomischen Formel einen möglicherweise einfacher zu behandelnden Term erhalten können (Hoch, 2007, S. 22).

- Ebenso sollen sie bei einem Term der Form $a^2 + 2ab + b^2$ erkennen, dass die erste binomische Formel anwendbar ist (S. 22 f.). Hoch (2007, S. 19) nennt auch die zweite binomische Formel als Teil des israelischen Curriculums, sieht aber davon ab, sie in der Studie zu berücksichtigen.

- Bei einem Term der Form $ab + ac + ad$ sollen die Schülerinnen und Schüler den gemeinsamen Faktor erkennen (S. 23 f.).

- Bei einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ wird von den Schülerinnen und Schülern erwartet, dass sie faktorisieren oder die *abc*-Formel ($x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) anwenden können (S. 21 f.).

- Die Schülerinnen und Schüler sollen mit linearen Gleichungen umgehen können. Damit sind hier Gleichungen der Form $ax + b = 0$ gemeint, die nach x aufgelöst werden sollen (S. 24). Diese Struktur wird in der weiteren Forschung jedoch nicht mehr berücksichtigt (Hoch, 2007, 52).

Hoch beschreibt jeweils das Erscheinungsbild der Struktur und benennt Eigenschaften sowie Beispiele für die einfache und für zusammengesetzte Formen (Hoch, 2007, S. 21-24). Von den Schülerinnen und Schülern wird nun entsprechend der oben zitierten Definition algebraischen Struktursinns erwartet, diese Strukturen zu erkennen und mit ihnen umzugehen, und zwar erst in ihrer einfachsten Form, dann aber auch bei Substitution einzelner Bestandteile durch andere Terme. Dies kann zu relativ komplizierten Gebilden wie etwa $(x + y)^4 + 2(x + y)^2(x - y)^2 + (x - y)^4$ (Hoch, 2007, S. 23) führen, die vereinfacht werden sollen. Bei der Durchsicht der tatsächlich verwendeten Aufgaben wird deutlich, dass darüber hinaus ab Struktursinn 2 erwartet wird, Terme erst einmal umzustellen, um dann eine der beschriebenen Strukturen zu sehen und zu nutzen. So soll beispielsweise folgende Gleichung gelöst werden: $18x^3k^2b = 12x^2kb^2 + 30x^2kb$ (Hoch, 2007, S. 43) – dazu muss erst umgestellt, dann ausgeklammert und schließlich für jede der beiden Klammern die Nullstelle berechnet werden.

In der Erhebung der Fähigkeiten zweier Gruppen von 81 beziehungsweise 95 Schülerinnen und Schülern, die jeweils unterschiedliche Aufgaben bearbeiteten, zeigt sich zunächst, dass das Erkennen der Strukturen in ihrer einfachsten Form einem Großteil (je nach Struktur zwischen 72,6% und 93,8%) gelingt. Schon bei Struktursinn 2a ist das Bild wesentlich uneinheitlicher, die Lösungsquote liegt hier je nach Struktur zwischen 33,3% und 76,8%. Für die weiteren Level zeigt sich eine noch stärkere Disparität: Struktursinn 2b wird bezüglich der dritten binomischen Formel nur von zwei Schülerinnen und Schülern gezeigt, bezüglich quadratischer Gleichungen zeigen ihn noch gut die Hälfte der dazu untersuchten Schülerinnen und Schüler. Bei Struktursinn 3a bleiben die Werte bei allen Strukturen unter 10%, einzige Ausnahme ist die Struktur, bei der ein gemeinsamer Faktor identifiziert werden soll. Struktursinn 3b wird in allen Strukturen nur von wenigen Schülerinnen und Schülern gezeigt, allerdings weiterhin mit deutlichen Unterschieden (Hoch, 2007, S. 67). Indem gleichzeitig erhoben wurde, wie gut die Schülerinnen und Schüler umformen können (*manipulation skills*), konnte festgestellt werden, dass die beiden Skalen zwar korrellierten, algebraischer Struktursinn aber dennoch eine eigenständige Größe darstellt (S. 69). Insbesondere weist Hoch darauf hin, dass 8% der untersuchten Schülerinnen und Schüler einen hoch ausgeprägten Struktursinn bei nur gering ausgeprägten Umformungsfähigkeiten zeigten (S. 71).

In einer früheren, erkundenden Studie hatten Hoch und Dreyfus (2004) berichtet, dass auch bei Lehrerinnen und Lehrern der algebraische Struktursinn nicht in dem Maße ausgeprägt ist, wie man dies hoffen würde. Ungefähr die Hälfte der Befragten „had to be prompted to ‘see’ what had seemed very obvious to the researchers“ (S. 55). In der eigentlichen Studie wird darauf nicht mehr eingegangen, obwohl es hier als ein möglicher Schlüssel zur Ausbildung des algebraischen Struktursinns bei den Schülerinnen und Schülern genannt wird.

In individuellen Teaching Interviews mit zehn Schülerinnen und Schülern unternimmt Hoch dann den Versuch, deren algebraischen Struktursinn zu fördern, wobei die Inhalte auf die ersten zwei Level algebraischen Struktursinns beschränkt bleiben. Probandinnen und Probanden sind Schülerinnen und Schülern der 11. Klasse aus anspruchsvolleren Mathematik-Kursen; unter diesen wurden dann diejenigen ausgewählt, die in einem Vortest einen gering ausgeprägten Struktursinn gezeigt hatten. Die Förderaufgaben entwickelt Hoch „based on the researcher’s analysis of structure sense and supported by her teaching experience“ (Hoch, 2007, 73). Unter Bezugnahme auf die Reification-Theorie von Sfard (1991, angewendet auf die Algebra in Sfard und Linchevski, 1994) sowie auf Forschungsergebnisse (Rissland, 1991; Gray, Pinto, Pitta und Tall, 1999) fordert sie die Schülerinnen und Schüler auf, die Strukturen in eigenen Worten zu beschreiben und eine Fülle von Beispielen zu benennen (Hoch, 2007, 75 f.).

Der Vergleich von Pre- und Post-Test sowie einem nachgelagerten Test zeigt, dass sämtliche Schülerinnen und Schüler von der Schulung profitierten und auch noch nach einigen Monaten höhere Testwerte erzielten als zuvor (Hoch, 2007, S. 82, siehe auch S. 88 f.). Auch bei den Lernfortschritten zeigen sich Unterschiede zwischen den einzelnen Strukturen (S.

84). Zusätzlich zu diesen zahlenmäßig zusammengefassten Ergebnissen beschreibt Hoch episodisch die Entwicklung des algebraischen Struktursinns der einzelnen Schülerinnen und Schüler in den Teaching Interviews. Sie berichtet, dass viele der Schülerinnen und Schüler Probleme hatten, sich bezüglich der algebraischen Strukturen auszudrücken. Auch im Umgang mit Zahlen hatten sie Probleme. Die Schülerinnen und Schüler zeigten eine Tendenz, die Terme und Gleichungen in die Form zu bringen, die ihnen aus ihren Schulbüchern vertraut war. Darüber hinaus werden Präferenzen beobachtet, die sich auf die zuletzt in der Schule behandelten Inhalte zurückführen lassen (Hoch, 2007, S. 99). Die genauere Untersuchung der Daten mit dem Ziel, das Lernen qualitativ zu beschreiben und gegebenenfalls Typen zu entwickeln, führt kaum zu Ergebnissen. Selbst bei der Struktur, bei der der Test die deutlichsten Fortschritte zeigt, ergibt ein intensiver Vergleich der Daten „no clear points of transition from not knowing to knowing“ (Hoch, 2007, S. 128). Daraus ergibt sich für Hoch (2007), dass

> … it can be surmised that the learning occured as a process over time. While working on the tasks the students were given the opportunity to fill in some holes in their knowledge, such as exponent rules. Working on these tasks, which involved naming, visualizing, characterizing structures, and generating new examples of these structures, brought an improvement in structure sense (S. 129).

Es wird sichtbar, dass hier für das Lernen, für die Entwicklung des algebraischen Struktursinns eine Sprache fehlt. Die Metapher von Wissens-Löchern, die gefüllt werden müssen, ist wenig tragfähig. Dies gilt umso mehr, wenn die Fragestellung ist, wie Struktursinn erstmalig (also nicht erst in der 11. Klasse) ausgebildet werden soll. Auch bleibt unklar, *wie* die bewusste, sprachlich vermittelte Behandlung der Strukturen den Schülerinnen und Schülern geholfen hat.

Als Gegenstand weiterer Forschung nennt Hoch (2007, S. 134) die Anpassung ihrer Teaching Interviews für den Gebrauch im Klassenunterricht. Es eröffnet sich damit ein völlig neues Feld: Wenn alle Schülerinnen und Schüler zu Verbalisierungen ermutigt werden sollen, kann die Lehrkraft nicht mehr die zentrale Rolle im Lernprozess spielen wie in den Teaching Interviews. Stattdessen interagieren die Schülerinnen und Schüler untereinander, mit ihren möglicherweise geringen Fähigkeiten, sich auszudrücken und auf mathematisches Wissen zurückzugreifen. Dass die Interaktion unter Schülerinnen und Schülern durchaus problematisch werden kann, lässt sich auch bei Hoch (2007, S. 76) nachvollziehen: Von Paarinterviews sah sie ab, nachdem die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in der Pilotstudie nicht miteinander arbeiteten, sondern sich mit individuellen Fragen immer wieder an die Forscherin wandten.

Erfahrungen von Livneh und Linchevski, Arcavi und Malle

Bei Livneh und Linchevski (2007) findet sich ebenfalls eine empirische Annäherung an die Entwicklung algebraischen Struktursinns. Sie untersuchten bei Siebtklässlern den Übergang von der Arithmetik zur Algebra und konnten dabei die Hypothese bestätigen, dass ein strukturbetonter Arithmetik-Unterricht Schülerinnen und Schülern hilft, auf die Strukturen bezogene Fehler in der Algebra zu vermeiden. Die Autorinnen gehen in ihrer Studie nicht auf Hochs Arbeit ein. Algebraischer Struktursinn bleibt bei ihnen ein undefinierter Begriff.

Die bereits weiter oben vorgestellten Arbeiten Arcavis (1994) zum *Symbol Sense* liefern einen weiteren Rahmen, in dem sich Aussagen zu hilfreichen Fördermaßnahmen entwickeln lassen. Basierend auf der Beobachtung interessanter Verhaltensweisen von Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräften stellt Arcavi (2005, S. 44) die Möglichkeit von in seinen Augen förderlichen Schülertätigkeiten in den Kontext einer entsprechenden Klassenraumkultur, in der die Entwicklung eines Symbol Sense belohnt wird. Darüber hinaus macht er deutlich, wie Schülerinnen und Schüler Bedeutung in algebraischen Ausdrücken finden könnten. Gerade die Tatsache, dass Algebra häufig im bedeutungsleeren Manipulieren von Termen und Gleichungen bestehe, bedinge die Fähigkeit, diese Routinen zu unterbrechen, um zu hinterfragen, zu reflektieren, zu schließen, Ideen in ein Verhältnis zu setzen oder neue Bedeutungen zu entwickeln. Dies erfordere Geduld, auch von der Lehrkraft (Arcavi, 2005, S. 45 f.). Es muss also eine bestimmte Einstellung gegenüber Wissen und Lernen entwickelt werden.

An anderer Stelle stellt Arcavi (2008) fest, dass

> whereas symbolic manipulations are extensively exercised, the use of symbols as a means to uncover the structure or the properties of a certain array of numbers is not at our students' fingertips. Such uses of symbols, if frequently exercised, can furnish a strong sense of purpose and illustrate the power they offer us in illuminating the ‚inner fabric' of a situation" (S. 41).

Darüber hinaus weist er in diesem Artikel auf die sinnstiftende Funktion von Modellierungsaufgaben hin.

Ähnlich wie Arcavis Beobachtungen ist auch der von Malle (1993, S. 254-261) vorgestellte Katalog von Aufgaben, die als förderlich für die Fähigkeit zum Termstrukturerkennen sein sollen, nicht methodisch kontrolliert entwickelt. In dieser Umschau sollen die hinter den Aufgaben stehenden Ideen für Schüleraktivitäten in Form einer Liste wiedergegeben werden:

- Klammereinsparungskonventionen durch gezieltes Setzen von Klammern bewusst machen; dabei können geschachtelte Kästchendarstellungen helfen. (Diese Idee greift Kortenkamp (2006) auf.)

- In einem vorgegebenen Term unterschiedliche Termstrukturen sehen

- Zu einer vorgegebenen Termstruktur Terme angeben

- In Termen eine vorgegebene Struktur sehen und entsprechend mögliche Umformungen (zum Beispiel nach dem Distributivgesetz) durchführen

- Einen vorgegebenen Term in eine vorgegebene Struktur bringen

- In vorgegebenen Termen eine gemeinsame Struktur sehen, zum Beispiel den gemeinsamen Faktor auf beiden Seiten einer Gleichung
- Äquivalente Terme erkennen und die Äquivalenzumformungen nennen, mit denen sie sich ineinander überführen lassen
- Terme auf- und abbauen, Gleichungen ein- und auspacken
- Substituieren von Termen durch Variablen und umgekehrt

Hintergrund dieser Aufgaben ist die oben zitierte Annahme, dass das Sehen von Termstrukturen im Sinne der mathematischen Kultur nicht eigenständig anhand der Terme selbst, sondern nur in Kommunikation mit Personen erworben werden kann, die mit dieser Kultur bereits vertraut sind. Interessant ist eine damit zusammenhängende Vermutung, die Malle als Resultat der von ihm gemachten Erfahrungen in den Raum stellt:

> Das Erkennen von Termstrukturen erlernt man nicht so, daß man Term für Term analysieren lernt und nach und nach immer mehr Terme analysieren kann, sondern so, daß man eine allgemeine Einsicht erwirbt; es muß einem sozusagen ‚der Knopf aufgehen' und das kann ziemlich plötzlich erfolgen. Vorher kann man mehr oder weniger keinen Term richtig analysieren, nachher kann man mehr oder weniger alle Terme richtig analysieren (S. 197).

Die Rolle visueller Merkmale

Kirshner (2006) wendet sich explizit gegen eine Tendenz, die er als „shying away from algebra as a structural study, preferring instead to ground meaning in empirical domains of reference" (S. 169) beschreibt. Seine Arbeit konzentriert sich daher ganz und gar auf Terme und Gleichungen. Kirshner und Awtry (2004) argumentieren, dass viele der beobachteten Probleme in der Wahrnehmung der Strukturen liegen und dass algebraische Strukturen eine unterschiedliche visuelle Salienz aufweisen. Gemeint ist damit, dass sie allein von ihrer äußeren Gestalt her mehr oder weniger zugänglich sind. Weniger saliente Strukturen werden weniger leicht verinnerlicht. So ist beispielsweise die Regel $2(x - y) = 2x - 2y$ visuell salient, die Regeln $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ und $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ hingegen nicht (Kirshner und Awtry, 2004, S. 233). In einer Studie, in der einer Versuchsgruppe die gleichen Regeln in einer Baumnotation präsentiert wurden, in der die Unterschiede in der Salienz nicht vorlagen, konnte gezeigt werden, dass die Salienz eine kritische Rolle beim Erlernen der Regeln spielt (Kirshner und Awtry, 2004, S. 238-242).

Abhilfe für das Problem irregeleiteter Interpretationen der symbolischen Notation sehen Kirshner und Awtry (2004) in sprachlichen Beschreibungen und entwickeln einen Kurs (*Lexical Support System*, LSS), in dessen Verlauf die Auswirkungen visueller Salienz durch ein dafür entwickeltes Begriffssystem ausgeglichen werden sollen. Ziel ist es, den deklarativen Charakter der algebraischen Formelsprache zu stärken. Dazu müssten den Schülerinnen und Schülern zunächst deklarative Grundlagen vermittelt werden: „Lacking the basic structural perspectives that they need to reason explicitly about new rules and procedures they are learning, students become increasingly reliant on visual pattern matching competencies" (Kirshner und Awtry, 2004, S. 248). Das LSS-Curriculum ist „serial and sequential—a mastery curriculum, in which a topic is learned thoroughly and completely before progressing to the next" (Kirshner, 2006, S. 178). Es besteht aus vier Phasen:

1. Den Schülerinnen und Schülern wird die korrekte Reihenfolge der durchzuführenden Operationen vorgestellt. Ihnen wird eine Menge von Ausdrücken vorgestellt und erwartet, dass sie sich in diesen Ausdrücken über die ihnen vorgelegten Terme verständigen. Als *principal operation*[2] wird diejenige Rechenoperation in einem Term bezeichnet, die man bei der Evaluation des Terms als letztes ausführen würde, zum Beispiel bei $3x^{2+y}$ die Multiplikation. Die *principal operation* trennt die *principal subexpressions*, im gegebenen Beispiel also 3 und x^{2+y}. Jede *principal subexpression* kann in weitere *principal subexpressions* zerlegt werden. Von den Schülerinnen und Schülern wird erwartet, von *principal subexpressions*, *next-most principal subexpressions* usw. zu sprechen.

2. Nun werden Umformungsregeln unter den neuen Sprechregeln eingeführt: Die Regel „$(xy)^z = x^z y^z$ takes an expression whose principal operation is exponentiation and whose base is a product and transforms it into an expression whose principal operation is multiplication, and whose principal subexpressions (i.e., factors) both have exponentiation as their principal operations" (Kirshner, 2006, S. 180). Die Hoffnung ist, dass durch das Fehlen einer visuellen Darstellung und durch den Zwang, jede der beiden Seiten individuell zu analysieren, vorschnelle Annahmen über erlaubte Umformungen vermieden werden.

3. In der dritten Phase werden die üblichen Umformungsaufgaben in die Sprache des LSS übersetzt. Statt „Faktorisiere" heißt die Aufforderung nun: „to transform an expression whose principal operation is not multiplication to an expression whose principal operation is multiplication" (Kirshner, 2006, S. 182).

4. Schließlich wird das LSS auch auf das Lösen von Gleichungen angewendet. Dabei sind die Schülerinnen und Schüler angehalten, sich ausführlich mit jeder möglichen Form von Gleichung (Variable tritt nur einmal auf, einzelne Variable tritt mehrfach auf usw.) auseinanderzusetzen und die jeweils notwendigen Umformungsschritte zu üben.

Kirshner (2006) gibt an, dass das LSS in „initial testing and in my own prior informal experimentation" selbst schwachen Schülerinnen und Schülern helfen könne, „given sustained attention and practice" (S. 181 f.). Man kann dies so deuten, dass das Erlernen des Umgangs mit algebraischen Strukturen in diesem Ansatz letztlich eine Fleißaufgabe ist. Zudem weist Kirshner (2006) darauf hin, dass mit der Einführung des LSS die Algebra nicht erschöpfend behandelt ist. Vielmehr bilde es den Kern einer breit gefächerten Curriculums, das auch andere Aspekte umfasse. „Still, it is sensible for us to focus curricular attention

[2] Von Übersetzungen sehe ich hier aufgrund der Komplexität des Begriffssystems und der daraus folgenden Probleme ab.

on this [aspect] independently, to ensure that algebraic structure is properly represented for our students“ (S. 178). Angesichts der Anforderung, dass jede der vier Phasen so lange behandelt werden soll, bis die Schülerinnen und Schüler den jeweils verlangten Einsatz der Sprache des LSS beherrschen, könnte dies in der Praxis dennoch die einzige Beschäftigung mit algebraischen Strukturen bleiben, weil für weitere Unterrichtseinheiten die Zeit fehlt.

Auf die Rolle des äußerlichen Erscheinungsbilds eines Terms oder einer Gleichung geht auch Hewitt (2003) ein. Bei Lehrerinnen und Lehrern stellte er fest, dass etwa ein Viertel problemlos nur das x in der Gleichung $\frac{13}{2kx} = 47$ auf die rechte Seite brachten, während die isolierte Behandlung dieser Variable bei der strukturell ähnlichen Gleichung $13 - (2 + k + x) = 47$ für niemanden unter den 40 Teilnehmerinnen und Teilnehmer in Frage kam. Sie alle mussten erst die Klammer auflösen, bevor sie mit dem x weiterarbeiten konnten (S. 65). Bei der Interpretation von gegebenen Gleichungen durch Schülerinnen und Schülern der 7. Klasse beobachtete Hewitt, dass das Gleichheitszeichen eher als Äquivalenzaussage bezüglich der verbundenen Terme gesehen wurde, wenn sie zuvor mit Ausdrücken der Form $a \oplus b = c \oplus d$ (mit $\oplus$ als einer Grundoperation) konfrontiert waren, die die Interpretation als Rechenaufforderung nicht zulassen. Ein solcher Bruch mit den bisherigen Erfahrungen könnte notwendig sein, um die grundsätzlich andere Struktur von Gleichungen anzuerkennen.

In einer späteren Arbeit führt Hewitt (2012) aus, wie eine *Einführung* in die Algebra angelegt sein könnte. Aufbauend auf der Feststellung, dass algebraische Strukturen teilweise nach *willkürlichen Regeln* zusammenhängen – etwa der Konvention, dass man statt $3 \cdot x$ auch kurz $3x$ schreiben darf – schlägt er vor, sich bezüglich solcher Regeln darauf zu beschränken, den Schülerinnen und Schülern beim Einprägen zu helfen. Im Zentrum sollte hingegen die Erzeugung einer Aufmerksamkeit für notwendige Regeln stehen. Dazu müssten geeignete Tätigkeiten angelegt werden, die die bisherige Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler in Frage stellen (S. 142 f.). Konkret wird eine Software vorgestellt, in der die Benutzerin oder der Benutzer durch Bewegungen in einem Raster Terme konstruiert und rekonstruiert. Ohne an dieser Stelle auf die Details einzugehen, besteht der zentrale Gedanke darin, dass die willkürlichen Regeln durch die Software bereitgestellt werden, während die notwendigen Regeln eigentätig von den Lernenden erkundet werden.

Von Strukturen zum Strukturieren

Eine große Nähe zur Thematik des algebraischen Struktursinns lässt sich auch in den Arbeiten von Rüede (2012, 2015) erkennen. Darin befasst er sich ausschließlich mit Termen und Gleichungen, nicht mit nichtsymbolischen Zusammenhängen, die eventuell bedeutungsstiftend sein könnten. Der wesentliche Unterschied zu Hochs Arbeit liegt nun aber im Blick auf die Beziehung zwischen den algebraischen Strukturen und den Schülerinnen und Schülern: Statt vermeintlich objektiv vorliegender Strukturen ist ein wesentliches Ziel bei Rüede (2015) „die Beschreibung der Individualität beim Strukturieren algebraischer Ausdrücke. In der theoretischen Fundierung verschiebt daher die Arbeit den Fokus von der Struktur zur Strukturierung eines Ausdrucks“ (S. 192). Genauer definiert Rüede (2012) das Strukturieren algebraischer Ausdrücke als einen Prozess, „bei dem eine Person Teile eines Ausdrucks aufeinander bezieht“ (S. 113) und beschreibt dies konkret für verschiedene Probandinnen und Probanden. Das erlaube „die Rekonstruktion der internen Bedeutung, welche die Person dem Ausdruck zuschreibt“ (Rüede, 2012, S. 113). Dies sei ein entscheidender Unterschied zu vorherigen Studien (unter anderem der von Hoch), die sich „vorwiegend an der intendierten Struktur eines Ausdrucks orientieren und am Maß, inwiefern die Schülerinnen und Schüler davon abweichen“ (Rüede, 2015, S. 189). Rüede arbeitet vier Ebenen des Herstellens von Bezügen heraus:

- einen Ausdruck optisch einfacher machen
- einen Ausdruck ändern
- den Ausdruck umstrukturieren
- Klassifizierungen des Ausdrucks erforschen (Rüede, 2015, S. 86-92)[3]

Letztlich kommt Rüede (2015, S. 140-164) zu einem vierstufigen Modell des Strukturierens. Die Stufen unterscheiden sich qualitativ darin, inwiefern die Schülerin oder der Schüler das Verfahren kennt (das Wie) und inwiefern er oder sie weiß, unter welchen Bedingungen es anzuwenden ist (das Wann):

1. Behandlung des Ausdrucks als anschauliches Ding: Kein Wie, kein Wann. Keine (angemessenen) Verfahren.
2. Behandlung des Ausdrucks als Verfahren: Nur Wie, kein Wann. Verfahrensbasiertes Strukturieren.
3. Behandlung des Ausdrucks als neu gebildetes Objekt: Wie und Wann. Verfahrensbildendes Strukturieren.
4. Behandlung des Ausdrucks als bekanntes Objekt: Wie und Wann. Explorierendes Strukturieren. (Rüede, 2015, S. 152 f.)

Der Autor argumentiert, dass die Stufen nicht nur empirisch vorliegen, sondern sich darüber hinaus in ihrer Abfolge als Entwicklungsmodell ausdeuten lassen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Schülerin oder der Schüler immer eigenständiger mit den Verfahren umgeht und dabei immer flexibler wird (Rüede, 2015, S. 159-164). Dementsprechend lässt sich das Modell als eine Erweiterung bestehender Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze auffassen (Rüede, 2015, S. 193 f.).

Aufbauend auf seinem Entwicklungsmodell stellt Rüede (2015, S. 167-183) zwei Ansätze für die Entwicklung von Aufgaben vor, die Schülerinnen und Schülern helfen sollen, den als entscheidend beschriebenen und als schwierig angenommenen Übergang zwischen der zweiten und der dritten Stufe zu bewältigen:

Mehrfaches Umformen: Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, dieselbe Aufgabe mehrmals zu lösen. Dies soll dazu anregen, andere als die zunächst bevorzugt wahrgenommene Sichtweise einzunehmen und letztlich zur Flexibilisierung des Denkens in Bezug auf Termstrukturen und des Umgangs mit ihnen beitragen.

[3] In der ersten Veröffentlichung (Rüede, 2012) finden sich leicht abweichende Bezeichnungen.

Relationales Denken: Idee ist es hier in Anlehnung an entsprechende Aufgaben aus der Grundschuldidaktik, schon früh mit Aufgaben zu arbeiten, in denen das Gleichheitszeichen nicht als Rechenaufforderung, sondern als Zeichen für eine Äquivalenzrelation zu verstehen ist.

Diese beiden Aufgabenformate sollen dann gezielt als Gesprächsanlässe genutzt werden. Ziel ist insbesondere eine Schulung der Fachsprache, „ganz im Sinne“ (Rüede, 2015, S. 173) der beiden auch in dieser Arbeit bereits diskutierten Ansätze von Hoch und Kirshner. Zusätzlich beobachtet Rüede (2015, S. 175-178), dass Pfeile, farbige Markierungen und Bündelungen den Schülerinnen und Schülern als Mittel dienen, die die Strukturierung unterstützen. Insgesamt spricht er sich dafür aus „weg vom Schema F, hin zur Exploration“ (S. 178) zu gehen.

In seinen Vorschlägen zur Förderung der Strukturierungsfähigkeit schlägt Rüede also letztlich die Anregung sozialer Interaktion in der Klasse vor. Der Autor resümiert selbst, dass er bei der Erklärung von Fehlern und Unangemessenheiten tendenziell der Argumentationslinie von Kirshner und Awtry sowie von Radford (dessen Ansatz im weiteren Verlauf dieses Kapitels dargestellt wird) folge: „Die Schwierigkeiten der Lernenden werden als Probleme des Wahrnehmens verstanden und nicht als Probleme des internen Verarbeitens von internen Repräsentationen“ (Rüede, 2015, S. 189).

Auch Block (2016) geht von der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler aus und untersucht, welche Eigenschaften quadratischer Gleichungen diese erfassen und welche Bedeutungen sie ihnen zuweisen. Darauf aufbauend untersucht er, wie sich die Bedeutungszuweisungen auf die Flexibilität im Umgang mit den quadratischen Gleichungen auswirkt. Dabei hilft eine didaktische Landkarte, in der quadratische Gleichungen je nach vorliegender Gestalt typisiert werden (vgl. Block, 2014). Insbesondere kann unterschieden werden zwischen Gleichungen, die sich quasi-arithmetisch lösen lassen und solchen, die algebraische Lösungsverfahren erfordern. Zum ersten Typ gehören beispielsweise Gleichungen von der Form $a(x + d)^2 + e = E$. Hier lässt sich die gesuchte Variable schrittweise „auspacken“. Dies ist etwa bei einer Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ nicht mehr möglich. Hier etwa wäre es gut, die pq-Formel griffbereit zu haben, bei anderen Erscheinungsformen sind andere Verfahren sinnvoll.

Mit dieser didaktischen Landkarte als Hintergrund konnten sechs verschiedene Kriterien identifiziert werden, nach denen die Schülerinnen und Schüler ihnen vorgelegte quadratische Gleichungen sortierten. Als erstes ist hier das Verfahren zu nennen, bei dem die Erscheinungsform des Terms und seiner Teilterme in den Blick genommen wird. Eine besondere Rolle spielen dabei Klammern, die als Anzeichen dafür wahrgenommen wurden, diese auszumultiplizieren, was freilich nicht im Sinne eines flexiblen Umgangs ist. Der Blick auf Klammern steht in engem Zusammenhang zu einer weiteren Herangehensweise, bei der Gleichungen in Hinblick auf das anzuwendende Lösungsverfahren untersucht werden. Dies kann natürlich nur sinnvoll gelingen, wenn die für den jeweiligen Gleichungstyp angemessenen Lösungsverfahren bekannt sind. Es zeigt sich jedoch, dass Schülerinnen und Schüler hier häufig nach den Lösungsverfahren sortieren, die ihnen von den linearen Gleichungen her vertraut sind. Wenn den Schülerinnen und Schülern bewusst war, dass sie Verfahren für quadratische Gleichungen anwenden müssen, dachten viele direkt an die *pq*-Formel und suchten dementsprechend nach Gleichungen, bei denen auf der einen Seite eine 0 stand. Damit verwandt war das Verfahren, die Gleichungen nach Schwierigkeit zu sortieren. In weiteren Verfahren richtete sich die Aufmerksamkeit auf die Variablen (Auftreten von x^2, Auftreten zweier Variablen) und die Anzahl und Eigenschaften der Lösungen – all dies trägt nicht zum flexiblen Umgang mit Gleichungen bei. Gerade die Tatsache, dass hier überwiegend Defizite aufgezeigt werden, ist für Block (2016) ein Argument dafür, dass das Sortieren von Gleichungen eine sinnvolle Übung sein könnte, um die Flexibilität im Umgang mit ihnen zu erhöhen.

1.4. Erkundung weiterer relevanter Beiträge aus der Didaktik der Algebra

Freilich werden auch dort für die vorliegende Arbeit relevante Erkenntnisse gewonnen, wo die eigentliche Fragestellung eine andere ist. Daher soll im Folgenden eine Sichtung des weiten Felds der Didaktik der Algebra unternommen werden. Rückblickend lässt sich feststellen, dass die in Abschnitt 1.3.1 formulierten Zielsetzungen einen Umgang mit algebraischen Strukturen im Sinn haben, der *bedeutungshaltig* ist. Die empirischen Arbeiten, die bisher betrachtet wurden, suchen die Quelle der Bedeutung algebraischer Strukturen hauptsächlich in der *Mathematik selbst*, indem sie isoliert solche Schüleraktivitäten untersuchen, bei denen es um die symbolisch-algebraische Repräsentation der jeweiligen Zusammenhänge geht. Dies ist legitim und wichtig, doch Kieran (2014, S. 28) weist auf zwei weitere Möglichkeiten hin, algebraischen Strukturen Bedeutung zuzuweisen: Bedeutung kann sich zum einen auch aus *Problemkontexten* ergeben, die durch algebraische Darstellungen zugänglich sind – dies klingt bereits bei Arcavi (1994) an. Zum anderen gibt es Quellen von Bedeutung, die weder in der Mathematik noch in Problemkontexten liegen, sondern im Sprechen, in Gesten und Körpersprache, in Metaphern, in gelebter Erfahrung und Selbstdarstellung – zusammengefasst also in *Sprache und Handeln*. Die drei beschriebenen Möglichkeiten, Bedeutung herzustellen, sollen den Rahmen für die folgende Darstellung weiterer relevanter Ansätze bilden. Diesen Rahmen sprengen Arbeiten unter den Grundannahmen der *Theory of Objectifcation*, die einen integrierten Ansatz verfolgt. Ihr wird daher ein eigener Unterabschnitt gewidmet.

1.4.1. Bedeutung aus der Mathematik selbst

Klassischerweise sollen Schülerinnen und Schüler algebraischen Strukturen anhand ihrer mathematischen Repräsentationen (Terme und Gleichungen, aber auch Tabellen und Graphen) Bedeutung zuweisen. Während die bisher besprochenen Arbeiten einen Schwerpunkt auf die symbolisch-algebraische Darstellung legen, lässt sich ein offenerer Blick auf die möglichen Repräsentationssysteme und die Wechsel zwischen ihnen schon in den Arbeiten Krummheuers (1983) zu Termumformungen finden. Er unterscheidet vier Primärrahmungen, die sich bei Lehrkräften wie auch bei Schülerinnen und Schülern identifizieren lassen:

Algebraisch-didaktischer Rahmen: Bei diesem Rahmen handelt es sich um „die mathematikdidaktisch aufbereitete Algebra der Terme und Termumformungen .... In ihm sind in mathematisch abgesicherter Weise die Begriffe ‚Term', ‚Termumformung', ‚Äquivalenz' von Termen usw. definiert und die mathematischen Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen aufgewiesen" (Krummheuer, 1983, S. 19).

Geometrisch-schulmathematischer Rahmen: Der geometrisch-schulmathematische Rahmen „beinhaltet derartige mathematische Theoriestücke, die benötigt werden, um aus geometrischen Problemstellungen algebraische Terme zu gewinnen. (...) Der geometrisch-schulmathematische Rahmen erhält seine Eigenständigkeit durch die Annahme, daß geeignete geometrische Probleme von Schülern gemäß diesem Rahmen auch ohne die Kenntnis eines algebraischen Rahmens gedeutet werden können. Dieser ... Rahmen enthält also eine unterrichtsmethodische Dimension" (Krummheuer, 1983, S. 19).

Alltags-geometrischer Rahmen: Dieser Rahmen „beruht einerseits auf den Erfahrungen, die Schüler in den Kommunikationssituationen des erlebten Mathematikunterrichts machen. (...) Er ist ein Rahmen für den Schüler-Alltag im Mathematikunterricht. Andererseits ist dieser Rahmen auch mathematisch-inhaltlich bestimmt. Er bezieht sich auf geo- und stereometrische Objekte, die auch im außerschulischen Alltag in Form konkreter Gegenstände vorhanden sind. Auf diese Weise fußt der Rahmen vorwiegend auf aktualisierbaren Erfahrungen des außerschulischen Alltags von Schülern" (Krummheuer, 1983, S. 19 f.). Er „stellte sich bei dem beobachteten Unterricht über Termumformungen in Situationen ein, in denen sogenannte ‚geometrische Veranschaulichungen' eingesetzt wurden" (Krummheuer, 1983, S. 232).

Algorithmisch-mechanischer Rahmen: Dieser Rahmen „fußt auf den Erfahrungen, daß im Mathematikunterricht eine Vielzahl von Aufgaben gestellt wird, zu deren Bewältigung ‚Techniken' beherrscht werden müssen. Diese Techniken sind mathematischen Ursprungs (deswegen die Bezeichnung ‚algorithmisch'). In diesem Rahmen wird jedwede Problemstellung zu einer ‚Rechenaufgabe' ... " (Krummheuer, 1983, S. 20), man betreibt keine Algebra, sondern „Buchstabenrechnen" (Krummheuer, 1983, S. 230). Bei Fehlern fällt ihre Identifikation schwer, stattdessen wird die gesamte Abfolge von Rechenschritten erneut durchlaufen. Es wird die Beobachtung gemacht, dass in diesem Rahmen nur geringe sprachliche Möglichkeiten bestehen. „Es sind Einzelwörter und Satzfetzen, mit denen man unter dieser Rahmung seine Handlungen kommentiert, wie z.B. ‚malnehmen', ‚rüberbringen' usw." (Krummheuer, 1983, S. 231).

Lernprozesse finden dann statt, wenn neue Bedeutungen

(1) innerhalb einer Rahmung erworben werden (Ausdifferenzierung).

(2) durch Wechsel von einem Rahmen in einen anderen erworben werden (Modulation).

(3) durch die Genese eines neuen Primärrahmens erworben werden (Rahmengenese) (Krummheuer, 1983, S. 24 f.).

Es wird anhand der Reihenfolge und der hergestellten Bezüge zwischen den Rahmen deutlich, dass dem zunächst der Lehrkraft vorbehaltenen algebraisch-didaktischen Rahmen eine bevorzugte Rolle zugewiesen wird, von der aus der Unterricht entwickelt wird. Abweichungen davon erscheinen als ein Makel. Dies wird beispielsweise in der Beschreibung des Unterrichts deutlich, in dem der Lehrer das Distributivgesetz für Variablen einführt. In seiner „allgemeinen Form kann man diesen Satz freilich nicht in einer achten Klasse behandeln, wenn … das Beweismittel der vollständigen Induktion noch nicht eingeführt worden ist. Dem Lehrer kann es deswegen nur darum gehen, diesen algebraischen Satz in einer gewissen Vereinfachung als ‚Regel' an seine Schüler zu vermitteln" (Krummheuer, 1983, S. 158). Insofern lässt sich in Krummheuers Beschreibung – wohlgemerkt eine empirische Beschreibung der Unterrichtsrealität in den 1980er Jahren – eine Wertung zugunsten der formalen Struktur der symbolisch dargestellten Terme erkennen.

Der Ansatz, von anderen mathematischen Darstellungen aus zu algebraischen Strukturen zu kommen, lässt sich in der Didaktik der Analysis wiederfinden. Dort nehmen häufig Wertetabellen und Graphen die Rolle ein, die von Krummheuer (1983) geometrischen Darstellungen zugewiesen wurde (vgl. Hußmann und Laakmann, 2011). Chazan und Yerushalmy (2003) legen dar, dass auf der Behandlung von Funktionen aufbauende Einführungen in die Algebra folgende Schwerpunktsetzungen in Bezug auf algebraische Strukturen begünstigen:

- Buchstaben werden eher als Veränderliche denn als Unbekannte aufgefasst.
- Algebraische Ausdrücke entstehen vorrangig als Zuordnungsvorschriften.
- Das Gleichheitszeichen ordnet den Namen einer Funktion einer Rechenvorschrift zu ($f(x) = \ldots$) und zeigt die Identität zweier Rechenvorschriften an. Es kann aber auch als Aussage, dass die beiden Seiten (für eine zu ermittelnde Lösungsmenge) numerisch gleich sind, auftreten, etwa bei der Berechnung von Schnittpunkten (S. 132).

Eine vertiefte Analyse, wie dabei *zielgerichtet* auf den Umgang mit algebraischen Strukturen hingearbeitet wird, ist dem Autor jedoch nicht bekannt.

1.4.2. Bedeutung aus Problemkontexten

Die zunehmende Bedeutung von Modellierungen im Mathematikunterricht begünstigt didaktische Ansätze, in denen Problemkontexte der Ausgangspunkt und der Grund sind, sich mit bestimmten algebraischen Strukturen zu beschäftigen. So liefern beispielsweise Situationen, in denen eine gleichmäßige Veränderung vorliegt, die Motivation, lineare Funktionen in den Blick zu nehmen. Die Beschäftigung mit solchen Unterrichtsdesigns hat einerseits eine Fülle von Möglichkeiten aufgezeigt, Schülerinnen und Schülern die Bedeutung von Algebra vermittels bereits aus der Lebenswelt bekannter Kontexte oder anhand interessanter Probleme näher zu bringen. Andererseits ist auch deutlich geworden, dass ein Zusammenhang nicht grundsätzlich mathematisch klar ist, wenn ein „Alltagsverständnis" dafür vorliegt. Swafford und Langrall (2000) berichten aus einer Studie mit Sechstklässlern, dass Schülerinnen und Schüler, die die gegebene Situation verbal beschreiben konnten, nicht unbedingt auch eine symbolische Darstellung fanden. Eine weitere Hürde steht an späterer Stelle: So gelang es in der gleichen Studie den meisten Schülerinnen und Schülern durchaus, einfache lineare Gleichungen (teilweise in nichtstandardisierter Schreibweise) aufzustellen. Doch nur wenige nutzten die Gleichungen zur Lösung des vorliegenden Problems, „and those who did so used their equations as a list of operations to be performed" (S. 96, vgl. S. 103 f. a. a. O.). Wenn man annimmt, dass das Lösen von Gleichungen eine kulturelle Tätigkeit ist, ist dies wenig erstaunlich. Die Schülerinnen und Schüler müssen erst lernen, dass hier anders vorzugehen ist als in der Arithmetik. Diesen qualitativen Sprung motivieren Problemkontexte alleine nicht. Dementsprechend ist anzunehmen, dass sich algebraische Strukturen nicht von selbst ergeben. Ihre Etablierung aus Problemkontexten heraus ist bislang aber nicht im Fokus der Forschung.

1.4.3. Bedeutung aus Sprache und Handeln

Immer wieder werden Parallelen zwischen sprachlichen und algebraischen Strukturen gezogen (siehe z. B. Stacey, 2011, S. 11). Es erscheint naheliegend, sowohl Leistungen als auch Probleme in beiden Bereichen in Beziehung zueinander zu setzen. Dass ein solcher Zusammenhang tatsächlich auch bei Kontrolle von Eigenschaften besteht, die mit Sprachfähigkeit zusammenhängen (Migrationshintergrund, sozioökonomischer Status), zeigen MacGregor und Price (1999). Die Autorinnen untersuchten den Einfluss des metalinguistischen Bewusstseins (*metalinguistic awareness*) auf die Algebra-Leistungen von Schülerinnen und Schülern, also welche Rolle die Fähigkeit spielt „that enables a language user to reflect on and analyze spoken or written language" (MacGregor und Price, 1999, S. 451). Sie fanden, dass Schülerinnen und Schüler mit einem geringem Bewusstsein für Symbole, Syntax und Ambiguität nur in seltenen Fällen hohe Scores in einem Algebra-Test erreichten. Bezüglich des Ergebnisses, dass einige Schülerinnen und Schüler trotz hohem metalinguistischem Bewusstsein viele Algebra-Items falsch bearbeiteten, mutmaßen MacGregor und Price (1999):

> One explanation is that these students were not sufficiently aware that the algebraic sign system has its own grammatical rules and conventions that are not intuitively obvious and have to be learned. Possibly some students are misled by their experiences with other symbol systems (S. 462).

Hierbei wird verwiesen auf eine frühere Arbeit von MacGregor und Stacey (1997). Darin war gezeigt worden, dass es zu intuitiven Annahmen über die Bedeutung und den Zusammenhang algebraischer Zeichen kommen kann. Desweiteren wurden Analogien zu Symbolsystemen des täglichen Lebens, in anderen Bereichen der Mathematik oder in anderen Schulfächern gezogen. Die Rolle der Sprache und der mit ihr verbundenen Erfahrungen in Bezug auf den Umgang mit algebraischen Strukturen verdient also weitere Berücksichtigung.

Der Rolle körperlichen Erlebens wird durch die an Einfluss gewinnende *Embodied-Cognition*-Forschung (vgl. Lakoff und Núñez, 2000; Edwards, Ferrara und Moore-Russo, 2014) große Bedeutung zugewiesen. Auch von diesem Standpunkt her werden Lernprozesse zu Funktionen in den Blick genommen, deren Veränderungsaspekt die Schülerinnen und Schüler durch Gesten und Körperbewegungen vollziehen können (Sabena, 2007). Wie diese körperlichen Erfahrungen sich aber in der Wahrnehmung algebraischer Strukturen und im Umgang mit ihnen niederschlagen, ist bislang kaum untersucht worden. Lediglich in den Arbeiten, die dem theoretischen Ansatz der *Theory of Objectification* folgen, wird diese Verbindung gezogen. Diese Theorie bezieht aber auch andere Quellen von Bedeutung ein, so dass ihr ein eigener Unterabschnitt gewidmet werden soll.

1.4.4. Theory of Objectification als integrierte Sichtweise

Kieran (2014) fasst die Theory of Objectification folgendermaßen zusammen: „Through words, artifacts, and mathematical signs, which are referred to as semiotic means of objectifcation, the cultural objects of algebra are made apparent to the student in a process by which subjective meaning is refined“ (S. 28). In einer Studie mit zwei Kleingruppen einer 9. Klasse erkennen Radford, Bardini und Sabena (2007) „connections between the syntax of the students' algebraic formulas and the semiotic means … through which the formulas were forged“ (S. 507). Die algebraische Sprache der Schülerinnen und Schüler besteht somit nicht nur aus symbolisch-algebraischen Darstellungen, sondern umfasst auch (gesprochene) Wörter, Rhythmus und Gesten, und keiner dieser Bestandteile ist redundant (S. 508 f., S. 527). Indem Radford et al. (2007) die genannten Bestandteile der algebraischen Sprache als Zeichen auffassen, machen sie sie einer semiotischen Analyse zugänglich. Das Lernen bezüglich einer algebraischen Struktur wird so zu einem Lernen in verschiedenen Zeichensystemen. Dies geschieht in Tätigkeit, die sich die Schülerinnen und Schüler erst erschließen müssen. Diese Tätigkeit ist es, die der Lehrkraft die Möglichkeit gibt, das Lernen zu gestalten. Sie kann durch Aufgaben und zur Verfügung gestellte Ressourcen motiviert werden. Hierdurch wird angelegt, auf welche Zusammenhänge die Schülerinnen und Schüler stoßen können – beispielsweise Zusammenhänge, die Gegenstand der Algebra sind und sich durch algebraische Strukturen darstellen lassen. Analysen, die die verwendeten semiotischen Mittel gezielt in den Blick nehmen, geben Aufschluss darüber, in welcher Weise diese das Lernen der Schülerinnen prägen.

In der bereits zitierten Studie etwa geht es um Generalisierungen. Diese können letztlich beschrieben werden „as a shift of attention that leads one to *see* the general *in* and *through* the particular“ (Radford et al., 2007, S. 526). In einer anderen Studie kommt Radford (2010a) zu der Erkenntnis, dass eine Formel für eine Schülerin oder einen Schüler erst einmal nicht ein abstraktes, symbolisches Rechenmittel, sondern eine Geschichte ist, die in stark kondensierter Form von der Erfahrung erzählt, die die Schülerin oder der Schüler gemacht hat. Er argumentiert, dass hierin der Grund liegt, dass Schülerinnen und Schüler auch an aus mathematischer Sicht überflüssigen Klammersetzungen festhalten: „Otherwise, they argue, it would be impossible to know what the terms of the formula mean“ (S. 10). Ausgehend von solchen Vorstellungen muss für ein eigentlich algebraisches Verständnis eine Ablösung vom Kontext erfolgen, die Zeichen sollten ihre Bedeutung mit der Zeit nicht mehr aus den Dingen erhalten, für die sie stehen, sondern aus ihrem Verhältnis zu anderen Zeichen. Dieser Übergang geschieht wieder in semiotisch vermittelter Tätigkeit. Dabei tritt das Ikonische in den von den Schülerinnen und Schülern konstruierten Formeln in den Hintergrund und abstraktere Symbole werden verwendet (Radford, 2010a, S. 14). Für diesen Übergang findet Radford (2000) eine Metapher, die wieder an die oben gemachten Überlegungen zu algebraischem Struktursinn als einer bestimmten Sinneshaltung gegenüber kulturellen Objekten denken lässt:

> To become a fluent user of algebra (in the curricular sense) would then mean to acquire a set of tools and concepts allowing one to become conversant with the general, the unknown and the variable in ways embedding aesthetical experiences which are different from those based on concrete or metaphorical linguistic devices. For those students feeling comfortable with metaphorical figures of speech … the rupture that we are mentioning may somehow be similar to the one that a person in an art gallery may live when, after experiencing paintings in the perspectival style of Piero della Francesca and other painters of the Quattrocento, he or she moves to the next room exhibiting non-lifelike cubist paintings of Picasso and Braque (S. 262).

Es zeigt sich, dass die Theory of Objectification einen sehr reichhaltigen Rahmen auch für die vorliegende Untersuchung bieten kann. Auf die Theorie wird daher in Kapitel 2 zurückzukommen sein, wenn es um die Entwicklung des theoretischen Rahmens dieser Arbeit geht.

1.5. Rückblick und Ausblick

1.5.1. Unterschiedliche Sichtweisen und offene Problemstellungen

Aus dem beschriebenen Stand der Forschung ergeben sich die im folgenden beschriebenen offenen Problemstellungen, aus denen letztlich die Forschungsfragen entwickelt werden, die diese Arbeit leiten sollen.

Fokussierung auf Termstrukturen – fehlende Berücksichtigung anderer Quellen von Bedeutung

Der naheliegende und unter den vorliegenden Arbeiten dominante Ansatz, sich bei der Untersuchung des Umgangs mit algebraischen Strukturen auf die symbolisch-algebraisch Form zu konzentrieren, wird gerade dann in Frage gestellt, wenn es darum geht, wie Schülerinnen und Schülern diesen Strukturen Bedeutung zuweisen können, wenn sie ihnen zunächst unbekannt ist. Radford (2000) schreibt über Kirshners und andere Ansätze, die er der Informationsverarbeitungspsychologie zuordnet:

> … meaning is expected to be extracted by the student (at least to some important extent) from the syntactic structure of the algebraic language and endless tasks of symbolic manipulation. The understanding of the syntactic structure of algebraic language and the meaning of signs is, however, a long process in the students' ontogenetic trajectory. Students, at the very beginning, tend to

> have recourse to other experiential aspects more accessible to them than the structural one (S. 240).

Auch wenn sich argumentieren lässt, dass auch Kirshners (2006) Language Support System seine Bedeutung zu einem großen Teil aus der Sprache zieht, die den Schülerinnen und Schülern beigebracht wird, so bleibt doch der Eindruck, dass ihnen dabei etwas „eingetrichtert“ werden soll: Sie sollen sich daran gewöhnen, Strukturen in einer bestimmten Weise zu sehen, und dazu müssen sie es immer und immer wieder tun.

Hoch (2007) und Rüede (2015) nehmen die algebraischen Strukturen ebenfalls als für sich selbst bedeutungshaltig an und verlassen sich in ihren Interventionen auf die Sprache. Eine wichtige Differenz zu Kirshners Programm ist jedoch die Eigentätigkeit, die sie den Schülerinnen und Schülern zutrauen. In diesem Sinne lassen sich auch die meisten der Vorschläge von Arcavi (2005) lesen. Und auch wenn die Aufgaben, die Malle (1993) vorschlägt, zunächst wie eine Abfolge von Übungsaufgaben aussehen: Durch ihren Variationsreichtum fordern sie eine immer wieder neue Beschäftigung mit den algebraischen Strukturen. Dennoch: Die bestehenden Arbeiten zur Ausbildung algebraischen Struktursinns beschränken sich auf die Terme und Gleichungen sowie die diesbezügliche verbale Kommunikation, wenn es um die Ausbildung von diesbezüglichen Fähigkeiten geht.

Demgegenüber stellen die meisten Arbeiten, die die Erzeugung von Bedeutung aus Problemkontexten sowie Sprache und Handeln in den Blick nehmen, keinen besonderen Bezug zu algebraischen Strukturen und dem Umgang mit ihnen her. Diese Verbindung ist bisher lediglich in den dargestellten Arbeiten aus der Theory of Objectification zu erkennen.

Dynamik algebraischen Struktursinns

Diese Theorie ist auch die einzige unter den referierten Ansätzen, die den Anspruch verfolgt, Lernen im Vollzug zu beschreiben. Alle anderen Ideen und Studien beziehen sich stattdessen auf Fähigkeiten, die Schülerinnen und Schüler zu einem bestimmten Zeitpunkt haben oder nicht haben und die sich unter dem Einfluss von (Individual-)Unterricht verändern. Hier soll die vorliegende Arbeit ansetzen: Es soll die Dynamik algebraischen Struktursinns beschrieben werden, wie Schülerinnen und Schüler im Sehen von Strukturen Fortschritte machen und wie diese sich unterstützen lassen.

Klassenunterricht als Herausforderung

Diese Unterstützung wird üblicherweise im Klassenunterricht stattfinden. Hochs Vorschlag einer Anpassung der Übungsaufgaben zum Struktursinn (Hoch, 2007, S. 133) erscheint nur wenig überzeugend. Ihrer Meinung nach sollten diese von den Schülerinnen und Schülern in Gruppen bearbeitet werden und die Lehrperson nur dann eingreifen, wenn dies als nötig erscheint. Wenn aber nur wenige Schülerinnen und Schüler über Struktursinn verfügen, ist das möglicherweise eine Überforderung für eine Lehrkraft und der Lernenden.

Dazu kommt, dass eine andere soziale Situation andere Handlungen hervorrufen wird. Wie werden sich Schülerinnen und Schüler verhalten, wenn sie auf sich gestellt sind? Wie stark hängt die Ausbildung algebraischen Struktursinns von der Anwesenheit von Personen ab, die bereits Wissen über die algebraischen Strukturen haben?

Das Zusammenspiel vielfältiger semiotischer Mittel

Die Beschäftigung mit Zeichen ist naheliegend, wenn man sich mit Algebra beschäftigt, doch in den meisten Arbeiten geht es ausschließlich um die symbolische Notation. Die Theory of Objectification weist zu Recht darauf hin, dass diesem Zeichensystem andere vorausgehen, insbesondere die Sprache. Wie die referierten Arbeiten zeigen, besteht hier aber gleichzeitig eine Hürde. Darüber hinaus muss gefragt werden, welche Rolle präformale Notationen, verbale Beschreibungen, Repräsentationen algebraischer Strukturen in Bildern und durch Objekte spielen. Welche Rolle spielen all diese semiotischen Mittel in der Ausbildung algebraischen Struktursinns?

1.5.2. Vorläufige Formulierung der Forschungsfragen

Das dargestellte Forschungsinteresse und die damit verbundenen offenen Problemstellungen lassen sich kurz in folgender Frage zusammenfassen: *Wie entwickelt sich algebraischer Struktursinn im alltäglichen Klassenunterricht?* Genauer werden damit folgende Fragen impliziert:

- Was zeichnet erfolgreiche Lernprozesse in Bezug auf algebraische Strukturen aus? Welche typischen Abläufe lassen sich in der Ausbildung algebraischen Struktursinns erkennen?
- Welche Verhaltensweisen und Strategien (auf Seiten der Lehrkraft, auf Seiten der Schülerinnen und Schüler) unterstützen und behindern die Ausbildung algebraischen Struktursinns?
- Welche anderen Probleme treten in der Ausbildung algebraischen Struktursinns auf? Woran scheitert sie?
- Welche Rolle spielen bei der Ausbildung algebraischen Struktursinns
  - die Sprache? Wie „vererben“ sich Probleme von dort in die Algebra?
  - andere semiotische Mittel?
  - weitere Wege, auf denen algebraischen Strukturen Bedeutung zugewiesen wird, insbesondere Problemkontexte?

Da nun von einem dynamischen Verständnis ausgegangen wird und sich bewusst in den Klassenunterricht begeben wird, sind auch neue Einsichten darüber, was algebraischer Struktursinn eigentlich bedeutet, im Blickfeld dieser Arbeit:

- Wie gehen Schülerinnen und Schüler nach erfolgter Ausbildung algebraischen Struktursinns mit algebraischen Strukturen um?
- Gibt es überhaupt einen Strukturen übergreifenden algebraischen Struktursinn, oder ist er jeweils auf die konkrete algebraische Struktur bezogen?

Diese Forschungsfragen sind vorerst nur ausgehend von der dargelegten Interessenlage formuliert. Es hat sich bereits angedeutet, dass zugrundeliegende Annahmen über Lernen und Lehren eine zentrale Rolle bei ihrer Beantwortung spielen werden, weil sie erklären, wie Bedeutung und damit ein Sinn für algebraische Strukturen erzeugt wird. Das Verständnis der in den Fragen naiv verwendeten Begriffe – insbesondere dem des algebraischen Struktursinns – hängt also von der Wahl der verwendeten Theorien ab. Die Darstellung der Theorien, die in dieser Arbeit Anwendung finden sollen, findet sich im folgenden Kapitel. Sie ermöglichen es schließlich, die dargelegten Fragen zu präzisieren und somit einer empirischen Untersuchung zugänglich zu machen (vgl. Abschnitt 2.3.3).

2. Theorierahmen

Gesucht ist nun ein theoretischer Rahmen, der helfen kann, Lernprozesse bezüglich des Umgangs mit algebraischen Strukturen zu beschreiben. Insbesondere sollte er der Herausforderung gerecht werden, die spezifische Qualität des algebraischen Struktursinns in seiner Entwicklung und in seiner Anwendung im Klassenunterricht zu erfassen.

Die beiden Ansätze, die im Folgenden vorgestellt werden, vertreten offensiv den Anspruch, Theorien über Lehren und Lernen im Vollzug zu liefern. Das SVSt-Modell entstand im Rahmen des in der Empirie des Unterrichts verankerten Beitrags zur Bildung einer mathematikdidaktischen Interessentheorie von Bikner-Ahsbahs (2005). Seine Stärke in Bezug auf die vorliegende Arbeit liegt in der Identifizierung einer epistemischen Handlung – dem Struktursehen –, die es ermöglicht, den Umgang von Schülerinnen und Schülern mit Strukturen in den Blick zu nehmen, ohne dabei die gewählten Zugänge in Bezug auf Richtigkeit oder didaktische Erwünschtheit zu bewerten. In der Frage, wie sich aus solchen Situationen ein Struktursinn bilden kann, und wie dieser dann beschrieben werden kann, wird auf die bereits weiter oben angesprochene Theory of Objectification zurückgegriffen. Sie liefert mit ihrer tiefen psychologischen und philosophischen Fundierung ein Framework, in dem sich das Erlernen eines bestimmten, kulturell definierten Umgangs mit algebraischen Strukturen beschreiben lässt.

2.1. Struktursehen im SVSt-Modell

2.1.1. Struktursehen in interessendichten Situationen

Das SVSt-Modell von Bikner-Ahsbahs (2005) gibt zunächst eine pragmatische Antwort auf die Frage, wie Strukturen in der sozialen Interaktion des Unterrichts gesehen werden. Es geht davon aus, dass Wissenskonstruktion durch *kollektives Struktursehen* erreicht wird. Dies liegt vor, wenn „Kinder mathematische Strukturen, in Gestalt von Regelmäßigkeiten, Gesetzmäßigkeiten, musterhaften Lösungen erkennen“ (Bikner-Ahsbahs, 2005, S. 202).

> … Strukturwahrnehmung [wird] deutlich, wenn sich die Kinder auf eine ganze Zeichengruppe, die häufig hypothetisch erweitert beschrieben wird, Bezug nehmen, wenn sie z. B. das Wort ‚immer‘ verwenden oder Regelhaftes in allgemeiner Form beschreiben. Deutlich wird Struktursicht aber auch, wenn Bestandteile eines Beispiels in ganz neuer Weise strukturiert werden und sich dadurch eine neue Sichtweise ergibt, die prinzipiell auch auf andere ähnlich geartete Beispiele übertragbar ist (Bikner-Ahsbahs, 2005, S. 202).

Der Begriff der Struktur wird hier also nicht eingeschränkt auf diejenigen Strukturen, die im Fachdiskurs als solche definiert werden. In diesem Modell wird nach der objektiven

Existenz und Begründung von Strukturen gar nicht gefragt. Es wird lediglich festgestellt, dass im sozialen Miteinander Strukturen gesehen werden. Dazu zählen mit Sicherheit algebraische Strukturen, aber eben auch solche, die sich nicht formal fassen lassen oder gar der etablierten mathematischen Sichtweise widersprechen.

Momente des Struktursehens werden dem SVSt-Modell zufolge durch die epistemischen Handlungen *Sammeln* und *Verknüpfen* vorbereitet. Sammeln meint dabei das Identifizieren und Verstehen kleinster Sinneinheiten. Diese können dann untereinander lokal verknüpft werden. Verallgemeinerungen führen schließlich zum Struktursehen, das durch weiteres Sammeln und Verknüpfen angereichert werden kann. Dabei können die Schülerinnen und Schüler die Struktur an (hypothetischen) Beispielen konkretisieren, testen und validieren, allgemein begründen, beweisen oder widerlegen[1] oder in einen Zusammenhang mit anderen Aspekten stellen. Es kann dann auch zu erneutem Struktursehen kommen. Eine strenge Abfolge oder Verschachtelung der epistemischen Handlungen ist durch das Modell aber nicht vorgegeben. Es sei explizit darauf hingewiesen, dass alle drei Handlungen als *kollektive* Handlungen zu verstehen sind: „Mathematical knowledge is created through social interactions as part of the interaction space, and the participants align their behavior with the behavior of the other participants“ (Kidron, Lenfant, Bikner-Ahsbahs, Artigue und Dreyfus, 2008, S. 251).

Das SVSt-Modell wurde zur Analyse einzelner Unterrichtssituationen entworfen. Darüber, wie gesehene Strukturen von den Lernenden langfristig verinnerlicht werden und wie sie sich in späteren Situationen auswirken, wird keine Aussage gemacht. Die theoretische Beschreibung des Struktursehens schließt ausdrücklich auch das Sehen bereits bekannter Strukturen in neuen Kontexten ein, genauso gut kann eine gesehene Struktur aber auch durch das Sehen einer alternativen Struktur revidiert werden. Das Modell ist also zunächst einmal ein deskriptives Modell für relativ kurze Zeitspannen, die als von Schülerinnen und Schülern kollektiv durchlebt betrachtet werden. Bikner-Ahsbahs (2005) beschreibt, dass interessendichte Situationen, die in Struktursehen hineinführen, eine hohe Eigenbeteiligung der Schülerinnen und Schüler aufweisen. Ein unangemessenes Eingreifen der Lehrerin oder des Lehrers kann schnell zum Abbruch dieser Situationen führen und damit Struktursehen verhindern (S. 316-319). Diese Erkenntnisse sind hilfreich bei der Planung von Unterricht, in dem Strukturen eine Rolle spielen sollen.

2.1.2. Bedeutung im SVSt-Modell

Im Überblick über den Stand der Forschung wurde ein besonderes Augenmerk darauf gelegt, wie Schülerinnen und Schüler algebraischen Strukturen Bedeutung zuweisen – anhand innermathematischer Zusammenhänge, anhand von Problemkontexten oder über Sprache und Handlungen. Dabei wurde stillschweigend davon ausgegangen, dass diese Bedeutungszuschreibungen individuell erfolgen (auch wenn Interaktion in unterschiedlichem Maße berücksichtigt wird). Im SVSt-Modell nun geht es gar nicht um individuelle Bedeutungszuschreibungen; es geht vielmehr darum, wie in der Klasse, also kollektiv, gesammelt und

[1] Diese Möglichkeit ist in Bikner-Ahsbahs’ Erläuterungen nicht explizit vorgesehen, sondern wurde von Jakob Priwitzer und mir (Janßen, 2010; Priwitzer, 2010) im Rahmen unserer Arbeit an den untersuchten Transkripten erkannt.

verknüpft wird, und schließlich Strukturen gesehen werden. Die Bedeutung algebraischer Strukturen wird also sozial konstruiert.

Diese Sichtweise gewährleistet eine große Offenheit: Mit ihr lassen sich sämtliche Konstruktionen von Bedeutung erfassen, die im Sozialen erfolgen mögen – auch solche, die oben vielleicht unberücksichtigt blieben. Es können Unterrichtssituationen untersucht werden, ohne dass sich a priori darauf festgelegt wird, was als bedeutungsstiftend gilt und was nicht. Allein anhand der rekonstruierten sozialen Interaktion erfährt der Forscher oder die Forscherin, was in der analysierten Situation als Struktur gesehen wurde.

Er oder sie erfährt aber eben nichts über individuelle Bedeutungsszuschreibungen. Eine Schülerin oder ein Schüler mag an einer Interaktion mit gemeinsamer Struktursicht beteiligt gewesen sein, mag sogar Äußerungen über die Struktur gemacht haben. Das SVSt-Modells interpretiert dies aber lediglich als Beitrag zum kollektiven Struktursehen, über den einzelnen Schüler oder die einzelne Schülerin bleibt es stumm. Damit sind mit diesem Modell keine Aussagen zu machen über algebraischen Struktursinn, der letztlich ja beim Individuum liegen muss, über die Lernprozesse, die zu ihm führen, über die Nachhaltigkeit und über die spätere Anwendung des Erlernten. Wünschenswert ist hierzu ein Ansatz, der ebenfalls den gelebten Vollzug würdigt, gleichzeitig aber einen analytischen Zugang zum Individuum bietet. Ein solches wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

2.2. „Sehen Lernen“ aus kulturhistorischer Sicht

Luis Radford hat, teilweise zusammen mit Wolff-Michael Roth, die *Theory of Objectification* (TO) entwickelt (Radford, 2008b; Radford und Roth, 2011; Roth und Radford, 2011; Radford, 2013b, 2014b). Ein Schwerpunkt lag dabei auf der Didaktik der Algebra. In Unterrichtsstudien wurde die Theorie angewendet und so immer weiter ausgearbeitet (Radford, 2000; Radford et al., 2007; Radford, 2010a, 2010b, 2013a). Im Folgenden wird der aktuelle Stand der Theorie dargestellt. Wie bereits die Daten der Publikationen andeuten, und wie sich anhand der folgenden Darstellungen noch klarer zeigt, ist die beschriebene Theorie *work in progress*. So ist in frühen Publikationen noch von der *theory of knowledge objectification* die Rede. Dass die Fortentwicklung der Theorie mit der Erarbeitung dieser Studie einherging, spiegelt sich in der Tatsache wieder, dass bestimmte Bestandteile der Theorie bei Entscheidungen, die zu Beginn getroffen werden mussten – vor allem in der Planung der Datenerhebung – noch nicht so klar ausformuliert waren, wie sie jetzt dargestellt werden können.[2]

Zunächst soll wiedergegeben werden, wie Radford (2013b) drei Grundbegriffe der Theory of Objectification – und der Didaktik – auffasst. Sie bilden die Basis für die anschließende Beschreibung der Bedingungen, unter denen Lernen der Theory of Objectification zufolge abläuft. Außerdem muss auf die stets damit einhergehende Veränderung des Subjekts (Subjectification) eingegangen werden. Schließlich soll wie im Abschnitt zum SVSt-Modell deutlich gemacht werden, wie Inhalten der Mathematik von den Schülerinnen und Schülern Bedeutung zugeschrieben wird.

[2]An dieser Stelle sei auf den Forschungsaufenthalt bei Luis Radford an der Université Laurentienne in Sudbury hingewiesen, den mir meine Betreuerin im Herbst 2013 ermöglicht hat. Die Gespräche und gemeinsamen Datenanalysen mit Luis Radford und seine Hinweise auf die neuesten Entwicklungen in seiner theoretischen Arbeit haben mir sehr weitergeholfen. Dafür bin ich ihm sehr dankbar.

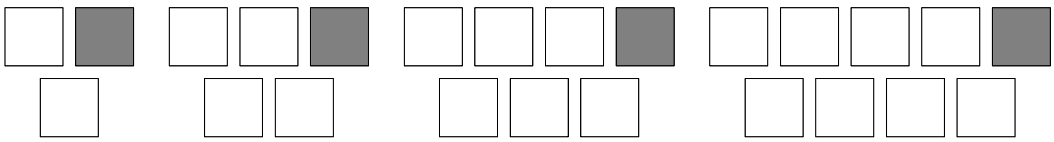


Abbildung 2.1.: Die ersten Glieder der Folge, die die Schülerinnen und Schüler im Beispiel von Radford (2013b, S. 13) untersuchten

2.2.1. Das Wissen, Etwas-wissen und lernen

In der Überschrift zu diesem Abschnitt wurden deutsche Übersetzungen für die von Radford (2013b) erläuterten Grundbegriffe versucht: „das Wissen" als Substantiv für *knowledge*, in Abgrenzung dazu „etwas-wissen" als Übersetzung des Gerundiums *knowing*, sowie Lernen (*learning*). Da die englischen Originalbezeichnungen der ersten beiden Begriffe jedoch griffiger und eindeutiger sind, sollen sie im Folgenden verwendet werden.

Knowledge und *Knowing*

Kurz definiert meint *Knowledge* das *Wissen über etwas* als Abstraktum. Knowledge ist nichts, was uns jemals direkt gegenübertritt:

> 'knowledge' … is a *culturally codified ensemble of actions*. That knowledge is a cultural codification of ways of acting and doing means that knowledge is something general: it cannot be equated to this or that particular sequence of coordinated actions …. Another way to say this is that knowledge is *crystillized labour*. We can think of knowledge as an ideal form of actions, as opposed to the actions themselves. Knowledge as crystillized labour or ideal form goes beyond each one of its concrete instances or realizations (Radford, 2013b, S. 12).

Als Idealform verleiht Wissen, das als Knowledge begriffen wird, einer Handlung, die unter diesem Blickwinkel gesehen wird, Allgemeinheit: Mit dem Wissen über Fußball-Regeln und insbesondere den Einwurf kann man erkennen, dass eine Spielerin, die an der Außenlinie den Ball in die Hand nimmt und ihn mit beiden Händen über dem Kopf Richtung Spielfeld wirft, eben einen Einwurf macht. Analog lassen sich auch in der Schule vermittelte Inhalte als Knowledge beschreiben. Als Beispiel führt Radford (2013b) eine Unterrichtssituation an, in der den Schülerinnen und Schüler eine Folge in geometrischer Form gegeben wird (siehe Abbildung 2.1). Die Arbeit der Schülerinnen und Schüler an dieser Folge mit dem Ziel, spätere Folgenglieder direkt (also ohne Berechnung sämtlicher Folgenglieder dazwischen) zu bestimmen, können wir, denen Folgen als mathematische Idee, also als kulturelles Wissen bekannt ist, als eine Arbeit in diesem Sinne wahrnehmen: „we expect the students to become aware of an algebraic form of perceiving, reflecting and investigating sequences that goes back to ancient times" (S. 13) – eine Geneaologie, die Radford (2013b, S. 13-15) für diesen Fall explizit nachvollzieht.

Dabei existiert Knowledge nicht unabhängig ohne Handlungen, in denen es umgesetzt wird: „knowledge as an ideal form cannot exist if it is not carried out in practice" (Radford, 2013b, S. 13). Mit dieser Gebundenheit an tatsächliches Angewendet-werden ist Knowledge gesellschaftlich und kulturhistorisch bedingt.

Knowing hingegen lässt sich beobachten, wenn eine Person einer kulturellen Tätigkeit nachgeht. Es ist die Instanziierung (*instantiation*) oder Verwirklichung (*actualization*) von Knowledge (Radford, 2013b, S. 16).[3] Dabei ist zu beachten, dass es sich nicht um eine bloße Wiederholung (wie das Abrufen einer Routine durch ein Computerprogramm) handelt. Die Tätigkeit prägt das Knowing. Radford (2013b) konkretisiert: „the manner by which we come to know something (like how to solve equations) is consubstantial of the specifities of the process of knowing“ (S. 17). Dabei ist die Verwirklichung, also Knowing, immer mangelhaft, es erfasst Knowledge unmöglich in seiner Allgemeinheit. Gerade dies „is the bearer of new possibilities, for it is only through actualization that something new can arise“ (Radford, 2013b, S. 20).

Lernen als Objectification

Wie anhand der Beschreibung des Begriffs Knowledge deutlich geworden ist, handelt es sich dabei nicht um etwas, was man sich „aneignen“ oder „besitzen“[4] kann. Stattdessen kann Lernen in den Tätigkeiten stattfinden, in denen das Subjekt sich dem kulturellen Wissen gegenübergestellt sieht:

> Knowledge appears rather as something that is not us, something that we encounter, wherin it *objects* (i.e., opposes) us. *Objectification* is precisely the process of recognition of that which objects us—systems of ideas, cultural meanings, forms of thinking, etc.
>
> Objectification, as we can see, emphasizes the idea of *otherness*—the quality of not being us. Contrary to the standard accounts of ideas according to which they are born in us and are part of our mental life, for the theory of objectification, ideas and forms of thinking are considered to exist independently of each one of us“ (Radford, 2013b, S. 23).

Das bedeutet keineswegs, dass das Vorliegen innerer Prozesse geleugnet oder ausgeblendet wird. Sie werden nur nicht *gleichgesetzt* mit dem Wissen, mit den Ideen. „Thinking is a *re-flection*, that is, a dialectical movement between a historically and culturally constituted reality and an individual who refracts it (as well as modifies it) according to his/her own subjective interpretations, actions and feelings“ (Radford, 2008b, S. 219). Dabei wird gelernt,

[3] Radford (2013b, S. 16-20) leitet den dargestellten Zusammenhang zwischen Knowledge, Tätigkeit und Knowing aus Hegels *Wissenschaft der Logik*, insbesondere dem dort begründeten Verhältnis zwischen Allgemeinheit, Besonderheit und Einzelheit, ab. Im Rahmen dieser Arbeit scheint es jedoch angemessen, die Rolle der Tätigkeit als zwischen Knowledge und Knowing vermittelnd (*mediating*) als Postulat hinzunehmen. Es wurde für die folgende Darstellung interpretiert, dass Radford immer auch Knowledge meint, wenn er von der Allgemeinheit spricht, und Knowing, wenn er von der Einzelheit spricht.

[4] Man beachte, wie hier die Sprache des Privateigentums in den Diskurs über Wissen und Lernen eingedrungen ist. In einem früheren Text schreibt Radford (2008b): „Knowledge has been reduced to a sort of commodity. This fetishist conception of learning operates a seperation between knowing and being and ends up favouring an alienating form of being“ (S. 226).

in einer bestimmten Art und Weise zu denken, und insbesondere, algebraische Strukturen in einer bestimmten Art und Weise zu sehen. Lernen als Objectification zu verstehen bedeutet, es als „social processes of progressively becoming critically aware of an encoded form of thinking and doing“ (Radford, 2013b, S. 26) aufzufassen. An anderer Stelle spricht Radford (2010b) von einer Domestizierung des Auges: „The capacity to perceive certain things in certain ways, the capacity to intuit and attend to them in certain manners rather than others, belongs to those *sensibilities* that students develop as they engage in processes of objectification“ (S. 4)[5]. An anderer Stelle formuliert Radford (2008b) aus der Perspektive der vorliegenden Kultur: „One of the roles of culture is to suggest ways of perceiving reality and its phenomena to students“ (S. 219). Das tut Kultur nicht von selbst: „In order for the students to perceive the general, its content has to be deliberately recognized in accordance with the structural place it occupies in the students' activity“ (Radford, 2013b, S. 30).

Entscheidend sind für das Lernen also genau die *Tätigkeiten*, in denen dem Individuum das kulturelle Wissen entgegentritt. Dabei wird von einem spezifischen Tätigkeitsbegriff ausgegangen, nämlich dem der Tätigkeitstheorie (Leontjew, 1982). Sie beruft sich auf Karl Marx und schreibt ihm die Idee zu,

> daß die Erkenntnis nicht außerhalb des Lebensprozesses existiert, der seiner Natur nach ein materieller, ein praktischer ist. Die Widerspiegelung der Wirklichkeit entsteht und entwickelt sich im Prozeß der Entwicklung der realen Zusammenhänge des erkennenden Menschen mit der menschlichen Umwelt, sie wird durch diese Zusammenhänge bestimmt und wirkt ihrerseits auf deren Entwicklung zurück (Leontjew, 1982, S. 26).

Um Tätigkeit systematisch untersuchen zu können und ausgehend davon Aussagen über die Entwicklung von Bewusstsein und Persönlichkeit zu entwickeln, erarbeitet Leontjew (1982) eine dreiteilige Terminologie bestehend aus den Begriffen Tätigkeit, Handlung und Operation. Ihre Charakterisierung soll hier anhand der Originalzitate erfolgen:

> Die Hauptsache …, die die eine Tätigkeit von der anderen unterscheidet, besteht in der Verschiedenheit ihrer Gegenstände. (…) Nach der von mir vorgeschlagenen Terminologie ist der Gegenstand einer Tätigkeit deren tatsächliches Motiv. Natürlich kann er sowohl stofflich als auch ideell sein, sowohl in der Wahrnehmung gegeben sein oder auch nur in der Phantasie, in Gedanken existieren. Die Hauptsache ist, daß dahinter immer ein Bedürfnis steht, daß er immer dem einen oder anderen Bedürfnis entspricht. Somit *hängt der Begriff der Tätigkeit notwendig mit dem Begriff Motiv zusammen* (S. 101 f.).

[5] Dieser Gedanke geht auf Marx zurück, Leontjew (1982) zitiert ausführlich:

> Das Auge ist zum menschlichen Auge geworden, wie sein Gegenstand zu einem gesellschaftlichen, menschlichen, vom Menschen für den Menschen herrührenden Gegenstand geworden ist. Die Sinne sind daher unmittelbar in ihrer Praxis Theoretiker geworden. … Die Bildung der fünf Sinne ist eine Arbeit der ganzen bisherigen Weltgeschichte (S. 40).

> Die Haupt-‚Komponenten‘ der einzelnen menschlichen Tätigkeiten sind die sie realisierenden *Handlungen*. Als Handlung bezeichnen wir einen einem Ziel untergeordneten Prozeß. Zwischen den Begriffen Ziel und Handlung gibt es eine ähnliche Wechselbeziehung wie zwischen dem Begriffspaar Motiv und Tätigkeit (S. 102).
>
> …die *sich vollziehende* Handlung entspricht der Aufgabe; die Aufgabe ist eben das Ziel, das unter bestimmten Bedingungen gegeben ist. Daher hat die Handlung eine besondere Qualität …, und zwar die Verfahren, durch die sie verwirklicht wird. Die Verfahren der Verwirklichung einer Handlung bezeichne ich als *Operationen*[6] (S. 106).

Wenn nun Objectification – das Konfrontiert-werden mit dem kulturellen Wissen – in Tätigkeit geschieht, muss in diesem Prozess der Gegenstand, das Motiv dieser Tätigkeit erfasst werden. Lernprozesse in der Algebra erfordern also Tätigkeiten, „that would require the teacher and the students to engage in some type of reflection and action that features the target algebraic conceptual content, so that the [knowledge] finds itself embodied in the resulting [knowing]—maybe even in novel ways“ (Radford, 2013b, S. 30). Unter Rückgriff auf Leontjews Terminologie lässt sich also sagen, dass Lernprozesse organisiert werden können, indem in einem nichtmathematischen oder bereits erschlossenen mathematischen, in jedem Fall aber für die Schülerinnen und Schüler zugänglichen Tätigkeitsrahmen die Möglichkeit der Entdeckung eines neuen, mathematischen Tätigkeitsmotivs angelegt wird.

2.2.2. Die Zone der nächsten Entwicklung als Ökologie des Lernens

Der bisher dargestellte Zugang zu Wissen und Lernen ist erst einmal ein theoretischer. Durch seine Fokussierung auf die Tätigkeit stellt er aber einen wertvollen Rahmen für die Beschreibung von Lehr-Lern-Situationen bereit. Im Folgenden sollen die bisher nur angedeuteten Tätigkeiten, in denen Lernen stattfinden soll, konkretisiert werden. Die kulturhistorische Tätigkeitstheorie geht davon aus, dass der Lehrer oder die Lehrerin eine Vorstellung von dem kulturellen Wissen hat, dass er oder sie vermitteln möchte:

> It is implicit that the teacher knows [the] algebraic structure. But knowing is not enough. It is not enough because the teacher cannot inject such a structure into the student’s consciousness. For the [knowledge] to appear in the [knowing of the student] both the student and the teacher have to work together (Radford, 2013b, S. 35).

Das Verhältnis zwischen der Lehrkraft einerseits und ihren Schülerinnen und Schülern andererseits ist also in Bezug auf das gesellschaftlich-historische Wissen, auf Knowledge,

[6] Um Missverständnissen vorzubeugen wird in dieser Arbeit stets explizit gemacht, wenn es um *Rechen*operationen geht; in allen anderen Fällen darf davon ausgegangen werden, dass Operationen im Sinne der Tätigkeitstheorie gemeint sind.

asymmetrisch.[7] Gleichzeitig existiert eine Symmetrie: Sowohl Lehrkraft als auch Schülerinnen und Schüler müssen in eine Tätigkeit eintreten. Sie müssen die Situation, in der sie gemeinsam sind, verstehen und ein gemeinsames Tätigkeitsmotiv entwickeln. Dies geschieht ausgehend von dem, was Schülerinnen und Schüler bereits alleine beherrschen und orientiert sich an dem, was sie mit Hilfe umsetzen können: Lehrkraft und Lernende sind in der *Zone der nächsten Entwicklung*.

Dieser Begriff wird in der internationalen Literatur häufig unter der folgenden Definition als ein dem Indiviuum zugeordnetes Konstrukt eingeführt:

> *It is the distance between the actual development level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers* (Vygotsky, 1978, S. 86, Hervorhebung im Original).

So betrachtet wäre die Zone der nächsten Entwicklung also der (unter Umständen messbare) Unterschied zwischen individuell abrufbarem Können und Können-mit-Hilfe. Meira und Lerman (2009) weisen jedoch darauf hin, dass die zitierte Definition nur ein Zwischenschritt in Vygotskijs Auseinandersetzung mit dem Begriff gewesen sei. Während zunächst eine Kritik traditioneller IQ-Tests im Fokus stand, habe er sich später immer mehr mit den sozialen Gesichtspunkten von Förderung beschäftigt und sei so letztlich zu seiner Theorie der semiotischen Vermittlung gekommen (S. 201).[8] In dieser Sichtweise ist die Zone der nächsten Entwicklung „a semiotic field, emerging in instruction, dialogical situations of various sorts, self-help, play, or fantasy, for the ‘social rearing of not-yet developed processes’ …, and for constructing ‘the future structure of the [intellectual] functions on the basis of the present experience by the child’ …“ (Meira und Lerman, 2009, S. 204).

Die von Meira und Lerman (2009) präsentierte Forschung deutet darauf hin, dass die Zone der nächsten Entwicklung fragil sowohl in ihrer Entstehung als auch in ihrer Aufrechterhaltung ist. Von den Beteiligten, also sowohl von der Lehrkraft als auch von den Lernenden, wird Feingefühl verlangt, um die Ziele der jeweils anderen wahrzunehmen und sich diesbezüglich abzustimmen (S. 204). Ganz ähnlich verlangen Roth und Radford (2010) eine „willingness to tune ourselves to others, to commit to a common cause, and to engage in manner that is other-oriented“ (S. 305). Beide Seiten sind verantwortlich, die Kommunikation mit den ihnen zur Verfügung stehenden Mitteln zu nähren.[9] Diese Kommunikation bezieht sich sowohl auf den Lerninhalt als auch auf die Sprache, die in ihr verwendet wird. Sie entwickelt sich dabei „towards ever more explicit ways of speaking and gesturing in the classroom setting (as contrasted to family language, for example)“ (Meira und Lerman, 2009, S. 217). Dabei integrieren Schülerinnen und Schüler Wörter, deren Verwendung sie bei der

[7] Dies drückt sich auch in den Machtverhältnissen aus. Lehrerinnen und Lehrer dürfen für sich in Anspruch nehmen, im Auftrag der Gesellschaft Autorität auszuüben.

[8] Eine noch tiefer gehende Darstellung des wissenschaftlichen Programms Vygotskijs findet sich bei Newman und Holzman (1993). Die ausführliche Besprechung seiner Intentionen bezüglich der Zone der nächsten Entwicklung (S. 55-110) stützt die hier vertretene Interpretation.

[9] Es sei hier hingewiesen auf Parallelen zur Arbeit von Tomasello (2006). Er beschreibt als die zentrale Fähigkeit, die dem Menschen die Weitergabe von kulturellem Wissen ermöglicht, dass zwei oder mehr Individuen ihre gemeinsame Aufmerksamkeit auf einen Gegenstand richten können.

Lehrkraft beobachten, in ihrem eigenen Handeln (Radford, 2000, S. 252). Aber nicht nur Wörter werden in dieser Weise übernommen. Arzarello, Paola, Robutti und Sabena (2009, S. 107 f.) berichten ähnliche Prozesse der gegenseitigen Anpassung bezüglich des Gebrauchs von Gesten und stellen die didaktische Rolle dieser Synchronisierung im Rahmen des sogenannten semiotischen Spiels (*semiotic game*, Arzarello und Paola, 2007) dar. Roth und Radford (2010) weisen darauf hin, dass dies auch bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler ihre Lehrkraft anleiten müssen – beispielsweise, an welcher Stelle noch Konkretisierungen notwendig sind. Lehrkraft und Schülerin „are each other's teacher and student; and they are so simultaneously“ (S. 303). So eröffnet die Zone der nächsten Entwicklung nicht nur der Schülerin oder dem Schüler, sondern auch der Lehrkraft Möglichkeiten zu lernen.

So verstanden ist die Zone der nächsten Entwicklung nicht losgelöst von der jeweiligen Tätigkeit zu denken. Dementsprechend solle hier der Fokus der Aufmerksamkeit weiterer Forschung liegen (Meira und Lerman, 2009, S. 217). Damit sind sie im Einklang mit Roth und Radford (2010), die fordern:

> … we need to investigate the discursive, corporeal, and other actions that encourage participants to attend to others in a responsible and committed way, and to understand how new knowledge, subjectivity, and new forms of social consciousness become variously produced. More efforts have to be deployed to understand through empirical examples zones of proximal development not only as zones of agreements but also of tensions, disagreements, misunderstandings, conflict, and subversion (S. 306).

Radford (2008b) betont, dass diese Sichtweise eine Absage ist an Ansätze, die Lernen als eine Ablösung sehen, als eine Stärkung des Individuums *gegen die anderen*. Die Schülerin oder der Schüler soll vielmehr schätzen lernen, dass und wie er in eine Kultur hineinwächst:

> For the theory of knowledge objectification, classroom functioning and the role of the teacher are not meant to promote the Enlightened individualistic idea of autonomy. The theory of knowledge objectification pleads for an idea of subjectivity and the self that goes beyond the ahistorical individualism inherited from the Enlightenment. It seeks rather to promote a concept of the autonomous person that is sensitive to the importance of history, the context and others, and where autonomy is both self-fulfilment and social commitment (S. 228).

2.2.3. Multimodalität und die Rolle von Artefakten

Wenn die Zone der nächsten Entwicklung als semiotischer Raum verstanden wird, in dem sich die Beteiligten aufeinander zubewegen, muss geklärt werden, wie genau die semiotische Vermitteltheit dieses Prozesses zu verstehen ist. Für Roth und Radford (2011) ist „anything that people use as a resource in the conduct of social life that both reproduces and transforms the activity at hand“ (S. 19) als relevant zu berücksichtigen. Dazu zählen sie unter anderem Wörter, Gesten, Körperhaltungen und -ausrichtungen, die Art des Sprechens (Betonung, Lautstärke, Tonhöhe) und Rhythmus.

Die Begründung für diese multimodale Sichtweise liegt in der Tatsache, dass „… our individual senses evolve intertwined not only one with the other senses, but also with the materiality of the objects in our surroundings“ (Radford, 2014b, S. 355). Dass dies aus biologischer Sicht eine Notwendigkeit ist, wurde bereits weiter oben angemerkt – wir müssen in der Umwelt (über-)leben, in die wir hineinwachsen. Entscheidend ist nun jedoch, dass auch Objekte, die (meistens durch andere) bereits mit Bedeutung belegt sind (und dies gilt für alle mathematischen Objekte), in dieser Weise mit unserer Wahrnehmung interagieren. So können Kinder überall in ihrer Umwelt dreieck-iges sehen, wenn sie erst einmal das Konzept „Dreieck“ verinnerlicht haben. Artefakte sind so ein konstituierender Bestandteil unseres Denkens (Radford, 2014b, S. 355). „We think with and through cultural artifacts“ (Radford, 2008b, S. 218).[10]

Dabei werden Artefakte wieder kulturhistorisch aufgefasst, sie können nicht einfach als gegeben angenommen werden (Radford, 2014b, S. 358 f.). Dementsprechend ist auch und gerade in Bezug auf Artefakte eine Person gefordert, die bereits über das kulturelle Wissen über das betreffende Objekt verfügt. „Objects cannot make clear the historical intelligence that is embedded in them. This requires that they be used in activities as well as in contact with other people who know how to ‘read’ this intelligence and help us to acquire it“ (Radford, 2008b, S. 224).

Um die Dialektik in Radfords Auffassung der Rolle von Materialität darzulegen, können einige Sätze zusammengezogen werden, die dies im Zusammenklang leisten:

> …instead of being something that evolves naturally, cognition is considered to be a culturally and historically constituted, embodied, and materially sentient form of creatively responding to, acting, feeling, imagining, transforming, and making sense of the world.
>
> (…) Concepts … are cultural codifications of human labor and, like all human labor, they are intrinsically multimodal.
>
> (…)
>
> But concepts are also multimodal in another sense. Since concepts are pure virtuality or pure possibility, their ontological nature is such that to become objects of thought and consciousness concepts have to be set into motion. They have to be actualized. Their multimodal nature reappears here, in their actualization in sensuous and material activity
>
> (…)
>
> For the students to become aware of, and participate in, such a mathematical way of thinking, the students need to engage in classroom forms of knowledge production and modes of human cooperation that … are not natural but have their own cultural history (Radford, 2014b, S. 359).

Die Multimodalität von Kognition, ihre vielfältige materielle Fundierung, steht also in einem Wechselverhältnis zur Multimodalität menschlicher Tätigkeit, weil menschliche

[10] Es ist an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass diese Sichtweise von Zeichen und Artefakten eine Abgrenzung zu anderen semiotischen Ansätzen impliziert. Zeichen werden nicht in erster Linie als Repräsentationen von (Denk-)Objekten verstanden, sondern als Werkzeuge, die (Lern-)Tätigkeiten ermöglichen (Radford, 2000, S. 241).

Tätigkeit gleichzeitig Urspung kulturellen Wissens und Ort seiner Umsetzung ist. Diesen Zusammenhang muss daher auch der Mathematikunterricht herstellen.

2.2.4. Lernen auch als Persönlichkeitsentwicklung: Subjectification

An act of our activity, of our actual experiencing, is like a two-faced Janus. It looks in two opposite directions: it looks at the objective unity of a domain of culture and at the never-repeatable uniqueness of actually lived and experienced life.

Bakhtin (1993), zit. n. Radford (2000, S. 260)

Weiter oben wurde Lernen als Objectification beschrieben: ein Prozess, in dem Knowledge dem Lerner oder der Lernerin in einer Tätigkeit gegenübertritt, ein Gegenstand des Bewusstseins wird. Doch

> … consciousness is transformed as well. This is why within the theory of objectification learning is not simply about knowing, but also about becoming. Learning is not a mere imitation or participation consistent with a pre-established practice. Learning is the fusion between cultural modes of reflecting and doing and a consciousness which seeks to perceive them. In the course of this fusion, consciousness emerges and is continuously transformed. In other terms, processes of objectification are entangled in *processes of subjectification*—processes of creation of a particular (and unique) self (Radford, 2013b, S. 26 f.).

Lernen ist also stets auch als ein Prozess der Persönlichkeitsentwicklung in Bezug auf das Gelernte zu verstehen: „… learning mathematics is not simply learning *to do* mathematics …, but rather it is learning *to be* in mathematics“ (Radford, 2008b, S. 226). Wenn hier von Persönlichkeit gesprochen wird, liegt dabei ein Verständnis von Persönlichkeit zugrunde, das von dem der westlichen Psychologie abweicht. Während letztere in diesem Begriff die für sie so charakteristische Vorstellung einer überdauernden Identität der Person ausdrückt, wird Persönlichkeit in der kulturhistorischen Schule als eine sich ständig wandelnde Entität verstanden, und das Subjekt damit als ein „unique in-flux subject that is continuously *be*coming“ (Roth und Radford, 2011, 10). Alle lebenden Wesen verändern sich demnach andauernd – eine Annahme, die durch aktuelle Ergebnisse aus der Hirnforschung bestätigt zu werden scheint, nach denen sich als Signatur von Bewusstsein immer wieder ablaufende Stoffwechselprozesse im Gehirn identifizieren lassen – die mit jedem Ablaufen die Möglichkeit einer Änderung mit sich bringen (Dehaene, 2014).

Dass das Lernen auch mit der oder dem Lernenden etwas tut, an seiner Persönlichkeit rührt, führt unweigerlich zu Emotionen in der Tätigkeit: „We can make some calculations, and we can do it while feeling boredom, thrill, exitement, challenge or something else; what we cannot do is simply feel nothing“ (Radford, 2015). Leontjew (1982), für den die Persönlichkeitsentwicklung ein zentrales Thema darstellt, schreibt erklärend:

> Die Besonderheit der Emotionen besteht darin, daß sie die Beziehungen zwischen den Motiven (Bedürfnissen) und dem Erfolg oder der Möglichkeit der

> erfolgreichen Realisierung der ihnen entsprechenden Tätigkeit des Subjekts widerspiegeln. Dabei geht es nicht um die Reflexion dieser Beziehungen, sondern um ihre unmittelbar-sinnliche Widerspiegelung, um das Erleben. Auf diese Weise entstehen sie unmittelbar nach der Aktualisierung des Motivs (des Bedürfnisses) und bevor das Subjekt seine Tätigkeit rational wertet (S. 189).

Diesbezüglich macht Radford deutlich, dass das Ineinanderfallen des individuellen Motivs und des Motivs einer von außen vorgegebenen Tätigkeit nicht die Regel ist, gerade nicht in der Schule: Für eine bestimmte Schülerin kann das Motiv, sich in der Tätigkeit des Unterrichts einzubringen, darin liegen, Bestätigung oder eine gute Note zu bekommen; es existiert keine Garantie, dass ihr Tätigkeitsmotiv das sein wird, das der Lehrer vorgesehen hatte. Gleichzeitig stellt der schulische Unterricht eine Umgebung dar, in der die Motive der Beteiligten in Bewegung sind. Daher schlägt Radford (2015) vor, „that we see activity as an *open system*, driven by an *evolving subject* and a *developing web* of interconnected and sometimes *contradictory motives*“ (S. 34). Diese Sichtweise auf Tätigkeiten und Motive sieht Unterricht als nicht nur auf inhaltliche Ziele ausgerichtet. Vielmehr spielt auch das Streben nach persönlicher Teilhabe an einer Kultur eine große Rolle. In dieser Sichtweise entstehen Emotionen im Sinne des obigen Zitats von Leontjew genau dort, wo ein *Individuum* sich mit *Kultur* auseinandersetzt. Dementsprechend gibt es gewisse Aspekte emotionalen Erlebens, die sich in einer Kultur immer wieder finden lassen, und andere, die den spezifischen Lern- und Entwicklungsweg eines Individuums auszeichnen. Die Emotionen, die Lernprozesse begleiten, bilden dabei keine Ausnahme: Es lassen sich typische Emotionen immer wieder finden, ihre konkrete Ausprägung variiert aber.[11] Beides ist es wert, als relevante Aspekte des Lehr-Lernprozesses untersucht zu werden: „… the individuals' cognitive, volitional, and emotional dimensions cannot be disentangled from these [sociocultural] contexts [in which they live and grow], for these contexts are not merely 'backgrounds' but rather constitutive elements of the human psyche“ (Radford, 2015, S. 47).

2.2.5. Bedeutung in der Theory of Objectification

Bereits in der Darstellung der bisherigen Forschungsergebnisse bezüglich algebraischer Strukturen, die mit der Theory of Objectification als Hintergrund gewonnen wurden, wurden die verschiedenen Arten benannt, auf die Schülerinnen und Schüler algebraischen Strukturen Bedeutung zuweisen (siehe Abschnitt 1.4.4). An dieser Stelle soll nun noch einmal rekapituliert werden, wie diese miteinander verknüpft sind. Die Untergliederung dieses Abschnitts macht die Zusammenhänge bereits grob deutlich: Mit Knowledge und Knowing stehen sich das kulturelle Wissen und das in Tätigkeit aktualisierte Wissen des Individuums gegenüber. Wenn dabei ein neues Tätigkeitsmotiv erkannt wird, bedeutet dies

[11] Radford (2015), der zunächst aufzeigt, dass unser Verständnis der Emotion „Liebe“ kulturell geprägt ist, schreibt hierzu:

> In the same way as love is practices and felt culturally, so is the manner in which we experience and practice learning. And in the same way that love is differently instantiated by different lovers from the same culture, so is learning (S. 42).

gleichzeitig die Erschließung eines Wissensgegenstands: Genau hier geht kulturelle Bedeutung in persönliche Bedeutung über. „The expected outcome of learning as an objectification process, is the alignment of the *personal meaning* with the *cultural meaning*" (Santi, 2011, S. 2507). Die Zone der nächsten Entwicklung verstanden als semiotisches Feld ermöglicht es, die sozialen und situativen Bedingungen von so verstandenen Lernprozessen und damit der Zuschreibung von Bedeutungen zu beschreiben. Zeichen, insbesondere verstanden als Artefakte, vermitteln zwischen den Individuen, und zwar multimodal. Der Erwerb neuer Bedeutungszuschreibungen lässt sich darüber hinaus als Persönlichkeitsentwicklung auffassen, die sich insbesondere in Emotionen äußert.

2.3. Rückblick und Ausblick

2.3.1. Inhaltliche Gegenüberstellung der beiden Ansätze

Ausgehend von den dargelegten Überlegungen dazu, was Bedeutung in der jeweiligen Theorie ausmacht und wie sie sich konstituiert, kann die weitere Ausrichtung dieser Arbeit in den Blick genommen werden. Es wurde darauf hingewiesen, dass die kollektive Konstruktion von Bedeutung im SVSt-Modell einen Ansatzpunkt bietet, den Gegenstand – algebraische Strukturen – zu behandeln. Es ermöglicht einen Zugang zur Unterrichtsrealität, der auf wenige Vorannahmen angewiesen ist. Wie beim Individuum Bedeutung generiert wird, also auch, wie sich algebraischer Struktursinn bei den konkreten Schülerinnen und Schülern ausbildet, kann das SVSt-Modell aber nicht klären. Dies leistet die Theory of Objectification, nämlich indem Lernen als das Hineinwachsen in eine Kultur gesehen wird: Die persönliche Bedeutung nähert sich in Tätigkeit der kulturellen Bedeutung an. So ausgebildeter algebraischer Struktursinn kann sich dann wiederum in weiteren Tätigkeiten zeigen und weiterentwickeln. Da Tätigkeiten stets in einem gesellschaftlich-kulturellen Rahmen stattfinden, sind „… the subjects of activity … not the Piagetian/constructivist individuals that make discoveries and construct knowledge on their own; subjects are subjects of *collective* activity" (Roth und Radford, 2011, S. 10). Insofern würdigt auch die Theory of Objectification kollektives Handeln, sie arbeitet aber anders als das SVSt-Modell auch heraus, was darin mit den Individuen passiert.

An dieser Stelle sollte ins Gedächtnis gerufen werden, dass die beiden theoretischen Modelle ganz unterschiedliche Fragen stellen und daher ganz unterschiedliche Prozesse in den Blick nehmen: Das Anliegen des SVSt-Modells ist es, (interessendichte) Situationen zu verstehen. Der Ansatz der TO geht zeitlich weit über die Beschreibung einzelner Situationen hinaus. Er ermöglicht die Beschreibung langfristiger individueller Lernprozesse, die durch konkrete Tätigkeit in einem sozialen, kulturell und gesellschaftlich geprägten Raum stattfinden.

Sowohl bei der Theorie der Objectification als auch beim SVSt-Modell handelt es sich vorrangig um Analysemodelle. Mit ihren prinzipiellen Auffassungen von Lehren und Lernen liefern sie darüber hinaus einen Hintergrund für das Design von Unterricht. Dieser muss jedoch jeweils spezifisch umgesetzt werden. Vielversprechend ist allerdings die klare Terminologie der TO, die zwischen Operationen, Handlungen und Tätigkeiten unterscheidet. Tätigkeiten mit auf dem aktuellen Wissensstand einleuchtenden Motiven können als ein Einstieg dienen, um die Entwicklung neuer (auf die konkrete algebraische Struktur bezogener) Tätigkeitsmotive und also die Entwicklung der Persönlichkeit (und als Teil dieser: algebraischen Struktursinns) zu motivieren. Das Miteinander in der Klasse sollte so gestaltet werden, wie es a) interessendichte Situationen und b) die Zone der nächsten Entwicklung erfordern. Ein Blick in die entsprechenden Abschnitte zeigt, dass hier ähnliche Vorstellungen zusammenkommen, wenn auch von unterschiedlichen Annahmen ausgehend. Es ist verlockend, die beiden Begriffe zusammenzubringen. Ebenso scheint eine gewisse Verwandtschaft zwischen dem Struktursehen im SVSt Modell und Objectifcation in der TO zu bestehen. Eine Gleichsetzung sollte jedoch nicht voreilig geschehen, denn es wurde auch gezeigt, dass die Theorien deutliche Unterschiede aufweisen.

2.3.2. Notwendigkeit einer Vernetzung

Ein Umgang mit dieser Problemlage bestünde in einer einfachen parallelen (oder auch sequentiellen) Anwendung der beiden Theorien, würde aber genau die Ausarbeitung der Zusammenhänge zwischen ihnen vernachlässigen. Wünschenswert wäre eine genauere Klärung der Verhältnisse zwischen den Theorien: Wie wären ihre Kernbegriffe aus Sicht der jeweils anderen Theorie zu deuten? Gibt es systematische Zusammenhänge, kann beispielsweise in den situativen, kollektiven Beschreibungen des SVSt-Modells ein Ansatzpunkt für die im Sozialen verankerten, aber doch individuell nachvollziehbaren Lernprozesse gefunden werden? Diese Fragen können in einem Vernetzungsprozess geklärt werden, dessen theoretische Grundlagen und Umsetzung in Abschnitt 4.3 dargestellt sind.

Bis dahin werden (in der Entwicklung der Methodologie sowie in der Planung der Datenerhebung) die Prinzipien beider Theorien als gleichermaßen relevant berücksichtigt. Die Entwicklung der Analysemethoden ist dann bereits auf die beide Theorien koordinierende Sichtweise angewiesen.

2.3.3. Abschließende Formulierung der Forschungsfragen

Die Darstellung des theoretischen Rahmens ermöglicht die Reformulierung der in Abschnitt 1.5.2 vorgestellten Forschungsfragen. Es ist nun eine Präzisierung der meisten Fragen möglich, indem auf Begriffe aus den beiden Theorien zurückgegriffen wird. Für den Begriff des *algebraischen Struktursinns* soll angenommen werden, dass es sich dabei um Wissen in der dialektischen Sichtweise der TO handelt: einerseits um eine kulturell gegebene Möglichkeit, in einer bestimmten Art und Weise zu handeln, andererseits um eine persönliche Art dies tatsächlich zu tun. Konkret lässt sich annehmen, dass jede algebraische Struktur *spezifische Tätigkeiten* erfordert. Diese lassen sich benennen, wodurch das *kulturelle Wissen* umrissen und eine Erforschung der Heranführung von Lernenden an die jeweilige Struktur ermöglicht wird. Mit der *Ausbildung algebraischen Struktursinns* ist dementsprechend das diesbezügliche Lernen gemäß der TO zu verstehen, also Objectification, die Erschließung des in der jeweiligen Struktur angelegten Tätigkeitsmotivs.

- Was zeichnet die erfolgreiche Ausbildung algebraischen Struktursinns aus? Welche typischen Abläufe lassen sich in der Ausbildung algebraischen Struktursinns erkennen?

- Wie können Tätigkeiten initiiert werden, die zur Ausbildung algebraischen Struktursinns führen?
  - Welche spezifische Rolle spielen das Unterrichtsdesign und die Aufgaben? Wie lassen sich auf algebraische Strukturen bezogene interessendichte Situationen und Zonen der nächsten Entwicklung erzeugen und erhalten?
  - Welche Verhaltensweisen und Strategien (auf Seiten der Lehrkraft, auf Seiten der Schülerinnen und Schüler) unterstützen und behindern die Ausbildung algebraischen Struktursinns?
- Welche Rolle spielen bei der Ausbildung algebraischen Struktursinns
  - die Sprache? Wie „vererben" sich Probleme von dort in die Algebra?
  - andere semiotische Mittel, insbesondere verstanden als Artefakte, also kulturelle Zeichen?
  - weitere Wege, auf denen algebraischen Strukturen Bedeutung zugewiesen wird, insbesondere Problemkontexte? Welche Tätigkeiten sind den Schülerinnen und Schülern zugänglich und welche nicht?
- Wie gehen Schülerinnen und Schüler nach erfolgter Ausbildung algebraischen Struktursinns mit algebraischen Strukturen um? Wie tragfähig ist das Konzept der Subjectification diesbezüglich?
- Gibt es überhaupt einen Strukturen übergreifenden algebraischen Struktursinn, oder ist er jeweils auf die konkrete algebraische Struktur bezogen? Gibt es übergreifende Tätigkeiten, die erschlossen werden?

Es ist darüber hinausgehend deutlich geworden, dass die gemeinsame Verwendung von SVSt-Modell und TO eine Vernetzung der beiden Ansätze erfordert. In dieser werden ebenfalls Forschungsfragen gestellt, deren Beantwortung für die weitere Arbeit wichtig ist:

- In welcher Beziehung steht das Struktursehen des SVSt-Modells zur Objectification der TO?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Konzept der Interessendichten Situation und dem der Zone der nächsten Entwicklung?

3. Methodologische Überlegungen

Ausgehend vom dargestellten theoretischen Rahmen soll in diesem Kapitel eine Methodologie entwickelt werden, die die im Anschluss vorgestellten Methoden trägt. Als integrierendes Element wird dazu zunächst die Auffassung von Mathematikdidaktik als Design Science eingeführt.

3.1. „Mathematikdidaktik als Design Science“

Die im Titel zitierte Festlegung der wissenschaftlichen Disziplin stammt von Wittmann (1995)[1]; sie ist in den vergangenen zwei Jahrzehnten immer wieder aufgegriffen worden und hat auf diese Weise einen deutlich sichtbaren Einfluss ausgeübt (Steinbring, 1998; Selter und Walther, 1999; Lesh und Sriraman, 2005; Prediger et al., 2012). Einen Hinweis darauf, was damit gemeint ist, gibt der Titel der deutschsprachigen Version des zitierten Textes (Wittmann, 1998), in dem „Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik“ bezeichnet werden.

Lesh und Sriraman (2005, S. 490 ff.) unternehmen eine spezifischere Beschreibung und benennen eine Reihe von Eigenschaften der Mathematikdidaktik als Design Science. Sie stellen fest, dass sie sich – anders als die Naturwissenschaften und durchaus ähnlich wie die Ingenieurswissenschaften – mit komplexen, von Menschen geschaffenen Systemen befasst: mit der Schulmathematik an sich, den vorkommenden Sozialformen, Materialien, Unterrichtseinheiten und so weiter. Das Ziel der zugrundeliegenden Designs geht über ihre bloße Erprobung auf Erfolg oder Misserfolg hinaus. Sie sollten nützlich und in einer verstandenen Weise anpassungsfähig sein. Die Autoren gehen davon aus, dass „[n]o single ‘grand theory’ is likely to provide realistic solutions to realistically complex problems“ (Lesh und Sriraman, 2005, S. 492, zur besseren Lesbarkeit vom Original abweichende Groß- und Kleinschreibung), vielmehr müssten stets mehrere Perspektiven zu Rate gezogen werden. Es wird festgestellt, dass die Designentwicklung üblicherweise in mehreren Zyklen abläuft.

Bei der Bezeichnung der Mathematikdidaktik als Design Science geht es also nicht nur um die Feststellung über den Status des Fachs, sondern vielmehr um ein Forschungsprogramm, das in einer bestimmten Weise Fragen stellt (etwa: „Wie lässt sich … unterrichten?“) und sich einer Menge an Methoden bedient, die die Erforschung der Wirkung von Unterrichtsdesigns erlauben. Die mathematikdidaktische Forschung kann dann als „empirical research centered around teaching units“ (Wittmann, 1995, S. 364) angelegt werden. Diese Unterrichtseinheiten (oder auch einzelne Aufgaben) sollen dabei nicht bloß ein Vehikel sein, Ziel sollte vielmehr das Entwickeln *substantieller Lernumgebungen* sein, die folgende Bedingungen erfüllen (Wittmann, 1998, S. 337 f.):

[1] Es existieren weitere Versionen mit ähnlichem Titel und Inhalt.

1. Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.
2. Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schüler/innen bieten.
3. Sie müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepaßt werden können.
4. Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten.

Das Ziel der Entwicklung solcher substanzieller Lernumgebungen verfolgend kommt man zu Untersuchungen,

> in which teaching units can be used not only as research tools, but also as objects of study. The data collected in these experiments have multiple uses: They tell us something about the teaching/learning processes, individual and social outcomes of learning, children's productive thinking, and children's difficulties. They also help us to evaluate the unit and to revise it in order to make teaching and learning more efficient (Wittmann, 1995, S. 367 f.).

Die so angelegte Verknüpfung von Entwicklungsarbeit und mathematikdidaktischer Forschung wird von vielen Forscherinnen und Forschern als eine sinnvolle Ausrichtung der Disziplin angesehen. So formuliert Jaworski (2004, S. 4) als die beiden Hauptziele der mathematikdidaktischen Forschung

1. To enhance *knowledge* in the field: knowledge about mathematics, learning mathematics, teaching mathematics, doing research in learning mathematics…
2. To enhance *practice* in the field: to enable better learning of mathematics, better teaching of mathematics, better researching…

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie die beiden in dieser Arbeit verwendeten Theorien die Rolle des Unterrichtsdesigns würdigen.

Design in der Theory of Objectification

Der theoretische Hintergrund der Theory of Objectification geht auf Marx und letztlich Hegel zurück und zeichnet sich vor allem durch eine streng materialistische Grundauffassung aus, die auch die Forschungspraxis auszeichnen soll. Dementsprechend nehmen Roth und Radford (2011) eine klare Abgrenzung gegen eine in ihren Augen zu hohe Abstraktion bei der Beforschung von Lehr-Lernprozessen vor: „…we are not interested in investigating an ideal conception of activity; we are not interested in activity *in the abstract*. Rather, we are interested in investigating real, living human activity as it presents itself“ (S. 8). Ganz ähnlich fordern Chaiklin und Hedegaard (2013): „In a dialectical conception, pedagogical research should be developed as an interaction between theoretical conceptions in the cultural-historical traditions and the demands and needs of the societal practices“ (S. 30). Diese Betonung des empirisch vorfindbaren, der gelebten Realität der Subjekte bedeutet keineswegs den Verzicht auf Theorie. Aber die Entwicklung von Theorie vollzieht sich nicht auf der theoretischen Ebene, sondern in theoriebasierten Betrachtungen der Realität. Das Beobachtete in Verbindung mit zuvor Erkanntem zu bringen ist die grundsätzliche Vorgehensweise der kulturhistorischen Schule: „Das wirkliche Forschungsziel ist das Verständnis dessen, wie sich eine Sache oder eine Begebenheit mit anderen Dingen in Beziehung setzt“ (Freitas, 2003, S. 21).

Indem die Theory of Objectification die Tätigkeit in den Mittelpunkt stellt, wird ihr auch methodologisch eine Schlüsselrolle eingeräumt (Radford, 2013b, S. 28). Konkret bedeutet das, dass sich zuerst dem Unterrichtsdesign zugewandt wird. Als Vorarbeit schlagen Radford und Sabena (2015, S. 165) eine „a priori epistemological analysis“ in der Tradition der französischen Mathematikdidaktik vor. Bei Artigue (1995, S. 7) heißt es dazu präzisierend, dass epistemologische Arbeit am jeweiligen Gegenstand notwendig sei „to be able to look at this educational world from the outside, to make its epistemological choices apparent and questionable“. Sie legt bezugnehmend auf Arbeiten von Rouche und Schneider eine Orientierung an der historischen Entwicklung nahe (Artigue, 1995, S. 9), macht aber auch klar, dass „such a focus on strong and necessary ruptures in the growth of knowledge, is not necessarily subordinated to historical analysis in didactical research“ (Artigue, 1995, S. 10). Wenn eine Aufgabe einen Prozess der Objectification anregen soll, liegt eine besondere Herausforderung darin, die Schülerinnen und Schüler in eine Tätigkeit zu involvieren, deren Motiv sie eben noch nicht verstehen – dieses Verständnis macht genau den Prozess der Objectification aus. Die Involvierung wird aber nur gelingen, wenn die Schülerinnen und Schüler sich vorerst aufgrund eines anderen Tätigkeitsmotivs auf die Aufgabe einlassen können.

Da Lernen als *soziale* Tätigkeit verstanden wird, sollte in der geplanten Lehr-Lern-Tätigkeit Interaktion unter den Schülerinnen und Schülern sowie mit der Lehrkraft ermutigt werden, wobei Radford und Sabena (2015, S. 165 f.) betonen, dass es stets unvorhersagbar bleibt, zu welcher Interaktion es letztlich kommt. Die Konzeptualisierung des Verhältnisses zwischen Lehrkraft und den einzelnen Schülerinnen und Schülern als Zone der nächsten Entwicklung (vgl. Abschnitt 2.2.2) hat auch Folgen für die Unterrichtsplanung: „The teacher is part of the activity that mediates and actualizes knowledge. (…) Much like the students, she brings to this activity her ideosyncratic way of thinking and understanding mathematics“ (Radford und Sabena, 2015, S. 166).

Design im SVSt-Modell

Auch in der Forschung zum SVSt-Modell wird mit Aufgaben gearbeitet. Zwar liegt der Fokus hier noch deutlicher als in der von der von der TO beeinflussten Forschung auf der Theoriebildung – das Ziel ist nicht, die Aufgaben zu verbessern. Es kommt also (außer in der Pilotierung größerer Studien) auch nicht zu einer Iteration des Designs. Aber die Aufgaben und die Unterrichtsgestaltung (sei es in der Schule oder im Labor) sind dennoch sehr umsichtig und mit einem expliziten Fokus auf das jeweilige Erkenntnisinteresse entwickelt, weil klar ist, dass dieses Design in den zu untersuchenden Lehr-Lernprozessen eine zentrale Rolle spielt. Ein besonderer Fokus in den Untersuchungen, die auf das SVSt-Modell zurückgreifen, sind dabei interessendichte Situationen. Über deren Entstehungsbedingungen liegen Erkenntnisse vor – ein Teil davon wurde in Abschnitt 2.1.1 berichtet –, auf die beim Unterrichts- und Aufgabendesign zurückgegriffen werden kann.

Die Auffassung von Mathematikdidaktik als Design Science wurde bereits in der Formulierung der Forschungsfragen berücksichtigt, indem dort der Initiierung von Tätigkeiten, die zur Ausbildung algebraischen Struktursinns führen, eine zentrale Rolle zugewiesen wurde. Sämtliche Fragen beziehen sich auf diese Tätigkeiten. Im Folgenden soll herausgearbeitet werden, welche weiteren methodologischen Schlüsse sich daraus ergeben, dass Prozessen im tatsächlich stattfindenden Unterricht eine derart zentrale Rolle eingeräumt wird.

3.2. Prozesse durch Rekonstruktion verstehen

3.2.1. Lehren und Lernen als Prozesse

Bei Prozessen des Lehren und Lernens handelt es sich keineswegs um „geradlinige, lineare und logisch konsequente Wege, auch wenn das wohlgeordnete mathematische Wissen dies vermeintlich zu erzwingen scheint“ (Steinbring, 1998, S. 162). Dies deckt sich mit einer Auffassung von Erziehung, die Wettstein und Thommen (2009) vertreten:

> Education should be conceived as an open, non-deterministic developmental process that in essence unfolds in the interactions between an educator and a person being educated. Education is a social and cultural event in which meaning is being constructed, imparted and partially constituted as tradition (S. 377).

Zwar geht es in diesem Zitat nicht um Lehr-Lern-Prozesse, die die Autoren als auf kürzere Zeiträume beschränkt ansehen (vgl. Wettstein und Thommen, 2009, S. 354). Dennoch ist zu erkennen, dass diese Auffassung von Erziehung mit den oben dargestellten theoretischen Ansätzen bezüglich Lehren und Lernen und der daraus hergeleiteten Forschungshaltung übereinstimmt – auch sie gehen von einem offenen, nicht-deterministischen Entwicklungsprozess aus, der sich sozial zwischen Lehrenden und Lernenden vollzieht und kulturhistorisch zu verorten ist. Da dies der Fall ist, kann den Autoren weiter gefolgt werden bezüglich der „wide ranging requirements that the research methodology governing the research process has to fulfil as a consequence. Methods must have the following features:

- enable the representation of changes as they occur over time.
- record the exchange processes between the subject who is being educated and his or her material, social and cultural environment.
- enable the conceptualization of the processes by which research subjects as well as researchers construct meaning“ (Wettstein und Thommen, 2009, S. 377).

Die Vertreterinnen und Vertreter der Theory of Objectification und auch der Theorie der Interessendichten Situationen lassen sich mit den in ihren Arbeiten angewendeten Methodologien den *rekonstruktiv-hermeneutischen Ansätzen* zuordnen, die Wettstein und Thommen als eine von zwei Möglichkeiten vorstellen, die den oben genannten Anforderungen gerecht werden können.[2] Im Folgenden soll erläutert werden, was darunter in dieser Arbeit verstanden werden soll.

3.2.2. Rekonstruktion als Forschungsparadigma

Das von Wettstein und Thommen identifizierte Forschungsparadigma nimmt an, das man mit Forschung persönliche, soziale und gesellschaftliche Konstruktionen rekonstruiert. Ähnlich wie andere Autorinnen und Autoren (z. B. Jungwirth, 2003; Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014) formulieren sie:

> What human beings do or say, also in everyday life, has social sense and reflects social rules and conventions. Communicative processes and corresponding cognitive (e.g., linguistic) processes on an individual level are precoditioned by common systems of meaning, but at the same time, they serve to create, transmit and reproduce meaning and sense in social systems. (Wettstein und Thommen, 2009, S. 364)

Rekonstruktion und Interpretation

In einer Einführung in die Theorie interessendichter Situationen benennen auch Bikner-Ahsbahs und Halverscheid (2014, S. 99 f.) das Prinzip der Rekonstruktion als zentral. Indem sich Bikner-Ahsbahs hier als rekonstruktiv forschend identifiziert und an anderer Stelle in der interpretativen Forschung verortet (Bikner-Ahsbahs, 2003), wird die Einschätzung von Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014, S. 1) gestützt, die diese beiden Begriffe synonym verwenden. Die zweifache Nomenklatur stellt aber auch hervor, dass die Forscherin mit ihren *Interpretationen* eine neue Realität *schafft*. Außerdem wird eine Traditionslinie innerhalb der deutschen Mathematikdidaktik fortgeführt, die die Interpretation betont (Maier und Voigt, 1991, 1994; Jungwirth, 2003). Griffig zusammengefasst ist die „Grundannahme interpretativer Forschung …, dass die Welt von Menschen, die darin leben, bereits vorinterpretiert ist und empirisch arbeitende Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler einer Frage auf der Basis von Rekonstruktionen dieser Interpretationen, also auf der Basis von Interpretationen zweiten Grades nachgehen“ (Bikner-Ahsbahs, 2003, S. 209) – eine Auffassung, die mit der oben genannten von Wettstein und Thommen konform ist und bereits die beiden Folgerungen für den Forschungsprozess antizipiert, die Wettstein und Thommen (2009, S. 364 f.) aus den von ihnen formulierten Grundannahmen ableiten:

1. Der Forschungsprozess, in dem die Forscherin oder der Forscher dem Forschungssubjekt entgegentritt, muss als kommunikativer Prozess verstanden werden. Die

[2] Der andere vorgestellte Ansatz wird als quantitativ-analytisch bezeichnet und erfordert spezifische statistische Tools, um die nichtlinearen, dynamischen Prozesse zu erfassen.

Datenerhebung muss also als soziale Situation verstanden werden, in der soziale Bedeutung und sozialer Sinn verhandelt werden.

2. Die untersuchten empirischen Objekte – nichtverbales Verhalten, verbale Äußerungen, Verschriftlichungen – sind prinzipiell bedeutungshaltig. Um sie zu analysieren müssen sie dokumentiert und interpretiert werden.

Problematisierung und Präzisierung des Interpretationsbegriffs

Auch die innerhalb der TO geleistete Arbeit basiert auf einem rekonstruktiven Verständnis von Forschung. Die zugrundeliegende materialistische Auffassung ermöglicht aber auch eine Kritik an problematischen Auffassungen des Interpretationsbegriffs. Zwei Zitate aus dem Buch, in dem Roth und Radford (2011) „eine kulturhistorische Perspektive auf das Lehren und Lernen von Mathematik“ (eine mögliche Übersetzung des Buchtitels) entwerfen, fassen den Standpunkt der Autoren kompakt zusammen:

> … to understand the dynamic of the situation the analyst must not ‘interpret’ what an individual ‘means to say’, ‘thinks’, or ‘feels’ – in this way we would begin to reduce the analysis to monadic subjects – but we have to focus on what is available collectively in the public sphere of their relation (S. 150).
>
> Social actors, the subjects of activity, have grounds (reasons) for acting in the way they do, and they exhibit to each other whatever is required to pull of an event as what it is. (…) Thus, we do not *interpret* individual utterances as having this or that sense. Rather, we understand ourselves to be social actors who overhear the conversation of our research participants. None of the participants in mathematical activity can see any hidden contents of the minds of others. What they act upon and react to is what the respective other makes available to them (S. 25).

Diese Haltung bedeutet nicht, dass man in diesem Forschungsparadigma nicht interpretiert – Interpretationen finden sich auch bei den zitierten Autoren. Es geht vielmehr darum zu betonen, dass die Handlungen und Äußerungen nicht als Ausdruck einer vermuteten individuellen inneren Realität des Individuums – Gedanken, Gefühle, Absichten – verstanden werden, sondern die Theorie ernst genommen wird und die Handlungen stets in ihrem sozialen Kontext verstanden werden. Auch Bohnsack (2010a; vgl. auch Bohnsack, 2010b, S. 278 f.) spricht sich für eine spezifischere Verwendung des Interpretationsbegriffs aus. Unter Berufung auf Karl Mannheim führt er den Begriff des *Verstehens* ein. Verstehen von sozialen Prozesse kann nur durch die unmittelbare Teilnahme erreicht werden kann. Es handelt sich also um eine ohne Interpretation auskommende Selbstverständlichkeit, die nicht unbedingt verbalisiert wird (Bohnsack, 2010a, S. 59 f.). Wenn nun Menschen gemeinsam leben und erleben – Bohnsack (2010a, S. 61) nennt als Beispiel die griechische „polis“ und das „Dorf“, in dieser Studie könnten an ihre Stelle die „Schulklasse“ oder eine bestimmte Clique treten –, konstituiert sich für sie „auf der Grundlage gemeinsamer Praxis“ (ebd.) ein *konjunktiver Erfahrungsraum.*

Wissenschaftliche Interpretation in der dokumentarischen Methode

Der Wissenschaftlerin oder dem Wissenschaftler ist dieser Zugang in den meisten Fällen versperrt. Besonders augenfällig ist dies beim schulischen Lernen: Ich als Forscher kann nicht unmittelbar verstehen, dazu müsste ich Schüler werden. Stattdessen muss ich interpretieren, mich eben doch der Sprache bedienen, um die Sinnkonstruktionen der Beteiligten zu erschließen. Dies geschieht in der von Bohnsack begründeten *dokumentarischen Methode* auf zwei Ebenen.

Der *immanente Sinn* – synonym wird auch von *objektivem Sinn* gesprochen – ist direkt zugänglich. Er lässt sich durch *immanente Interpretation* aus den Äußerungen der Subjekte herauslesen, wobei angenommen wird, dass die Akteure zweckrational handeln. Der immanente Sinngehalt „basiert auf wechselseitigen (reziproken) Motivunterstellungen, die gesellschaftlich institutionalisiert, also ‚objektiviert' sind und die explizit oder ‚wörtlich' zum Ausdruck gebraucht werden" (Bohnsack, 2010a, S. 60 f.). Die *genetische/dokumentarische Interpretation* basiert demgegenüber „auf der *prozess-* oder *sequenzanalytischen* Rekonstruktion von Handlungs-, Interaktions- und Diskurspraktiken sowie auf der Rekonstruktion der erlebnismäßigen Darstellung, der Erzählung und Beschreibung dieser Praktiken" (Bohnsack, 2010a, S. 61, Hervorh. im Original). So wird in der Interpretation schließlich doch das erschlossen, was für die Teilnehmenden unausgesprochen klar ist – ihr *habitualisierter Stil* oder *Habitus*.[3]

Schließlich ist der *intendierte Ausdruckssinn* zu nennen, der sich auf die Selbstdarstellung der Handelnden bezieht. Es wird interpretiert, wie dieser Sinn „von den ihn ausdrückenden Subjekten gemeint, im bewußtseinsmäßigen Draufgerichtetsein intendiert war" (Mannheim, 1964, zit. n. Bohnsack, 2010a, S. 61). Wie sich aus dem immanenten Sinngehalt der habitualisierte Stil ableiten lässt, kann man durch die Rekonstruktion des intendierten Ausdruckssinns einen *intendierten Ausdrucksstil* herausarbeiten. Im Gegensatz zur unreflektierten Habitusproduktion zeigt hier allerdings die stilproduzierende Person, „daß sie auch sich selbst beobachtend und interpretierend gegenübertritt" (Soeffner, 1992, zit. n. Bohnsack, 2010a, S. 67). Es wird an späterer Stelle gezeigt, dass dies im Unterricht vor allem auf die Lehrkraft zutrifft, die ihr Verhalten im Unterricht (teilweise) plant und reflektiert.

Als eine besondere Stärke der dokumentarischen Methode betont Bohnsack (2010a, S. 64) die Distanz, die sie gegenüber der Frage einnimmt,

> ob die zu interpretierenden Darstellungen … den Geltungskriterien der *Wahrheit* oder der *normativen Richtigkeit* entsprechen. Das heißt, es interessiert nicht, ob die Darstellungen (faktisch) wahr oder richtig sind, sondern es interessiert, was sich in ihnen über die Darstellenden und deren Orientierungen *dokumentiert*. Die Suspendierung der mit dem immanenten *Sinngehalt* verbundenen Geltungsansprüche, die ‚Einklammerung des Geltungscharakters' ist konstitutiv für eine Methode, die auf den Prozess der (erlebnismäßigen)

[3] Man mag sich hier erinnert fühlen an eine Forschungsausrichtung, die in der Mathematikdidaktik bereits in den 1980er Jahren eingeschlagen wurde. Ziel war dort, *Rahmungsprozesse* zu erforschen. Krummheuer (1984) definiert den *Primärrahmen* als „ein für ein Individuum grundlegendes Deutungs- oder Interpretationsschema" (S. 287), mit dessen Hilfe „fraglos gegebene" Deutungen hergestellt werden. Davon ausgehend werden dann *abgeleitete Rahmen* entwickelt (vgl. Abschnitt 1.4.1).

> *Herstellung* von Wirklichkeit, also auf die Frage nach dem *Wie*, zielt und nicht darauf, *Was* diese Wirklichkeit jenseits des milieuspezifischen Er-Lebens *ist*.

So wird den oben wiedergegebenen Vorbehalten von Roth und Radford begegnet. Die dokumentarische Methode erweist sich so als eine anschlussfähige und sinnvolle Ergänzung der bislang von den Vertreterinnen und Vertretern der hier angewendeten Lerntheorien präferierten rekonstruktiven Verfahren.

Klassifizierung von Analyseeinstellungen

Unter Bezugnahme auf die von Bohnsack herausgearbeitete Unterscheidung von immanentem und dokumentarischem Sinn identifizieren Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014, S. 18-21) zwei Analyseeinstellungen in der rekonstruktiven Sozialforschung. Mit der ersten Einstellung bleibt man in einer unmittelbar beschreibenden Position. „Es geht dabei um das systematische Erfassen bzw. Erschließen von subjektiven Deutungen und Einstellungen ebenso wie von Alltagstheorien“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 19). Die zweite Einstellung entfernt sich von dieser dem Common Sense nahen Haltung und „hat … nicht – wie es im Alltag meist der Fall ist – das im Blick, was jemand meint oder sagen will, sondern die Sinnstruktur, die seinem Handeln zugrunde liegt und es – im Sinne der sozialen Genese – hervorbringt. Die Analyseeinstellung ist mithin auf *Prozessstrukturen der Herstellung* gerichtet“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 19 f., Hervorhebung im Original). Genau diese Forschungshaltung ist in Bikner-Ahsbahs’ Arbeiten wiederzuerkennen, etwa wenn sie herausarbeitet, unter welchen Bedingungen interessendichte Situationen auftreten und wie es in ihnen zur Konstruktion mathematischen Wissens kommt (Bikner-Ahsbahs, 2005). Auch in der vorliegenden Arbeit wäre beispielsweise zu klären, was hinter einem „Ich versteh’ das nicht“ steht – was da nicht verstanden wird und warum, oder ob es vielleicht gar nicht so sehr um das Verstehen als intellektuelle Leistung geht, sondern beispielsweise um ein soziales Verhalten, das Probleme macht.

3.2.3. Rekonstruktion wozu?

Es ist nun noch zu klären, auf welches Ziel hin – um die Unterstellung einer a priori klaren Richtung zu umgehen könnte man auch sagen „to what end“ – rekonstruiert werden soll. Einen Ansatzpunkt bildet die Auffassung, dass Wissenschaft Theorien entwickelt und überprüft.

Forschung als Arbeit an und mit Theorie

In diesem Zusammenhang ist die Unterscheidung von theoriegeleiteter und theoriekonstruierender interpretativer Forschung nach Beck und Maier (1994) hilfreich. Die beiden Typen lassen sich als Endpunkte eines Kontinuums ansehen: Häufig arbeitet auch theoriegeleitete Forschung (neue) Theoriebestandteile aus, und es ist umstritten, inwiefern Theoriekonstruktion ohne eine Theoriebasis überhaupt möglich ist. So schreibt (Jungwirth, 2003): „Interpretative Forschung beginnt nie gleichsam ex nihilo – theorielos“ (S. 190). Gleichzeitig verweist sie auf Glaser, der die Grounded Theory genau so konzipiere. Die

Grounded Theory-Methodologie würde somit am einen Ende des angedeuteten Kontinuums liegen, auf theoretisch hergeleiteten Hypothesen aufbauende Forschung am anderen.

Nach Bikner-Ahsbahs (2003) geht es in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung um die Entwicklung so genannter *foreground-Theorien*. Damit gemeint sind „explizite, auf die Forschungsgegenstände bezogene Theorien, die innerhalb eines Forschungsbereichs entwickelt werden und Sachverhalte beschreiben, erklären oder vorhersagen" (Bikner-Ahsbahs, 2003, S. 209). Es wird also angenommen, dass sich innerhalb der theoriekonstruierenden Forschung bewegt wird. Dabei kann eine von Beck und Maier (1994) gemachte und von Bikner-Ahsbahs (2003) neu formulierte Unterscheidung von Kategorien entwickelnder und Muster rekonstruierender Forschung hilfreich sein. In die zweite Kategorie fällt dann die Idealtypenbildung, die Bikner-Ahsbahs in ihren Arbeiten als bevorzugten Weg der Theoriebildung geht.

(Ideal)-Typenbildung

Bikner-Ahsbahs (2003) bezieht sich auf die methodologische Tradition, die durch den Weberschen Begriff der Idealtypenbildung begründet wurde (vgl. Kelle und Kluge, 2010, S. 83 ff.). Unter Rückgriff auf die diesbezüglichen Arbeiten von Schütz stellt sie die Idealtypenbildung zunächst als die „Konstruktion objektiven Sinns" (Bikner-Ahsbahs, 2003, S. 213) vor. Weil die Idealtypen „losgelöst von dem subjektiven Sinnzusammenhang, in dem sie sich konstituieren, betrachtet werden, weisen sie die Idealität des ‚Immer wieder' auf. Sie werden als typisch fremde Bewusstseinserlebnisse erfasst und sind als solche prinzipiell iterierbar" (Schütz, 1932, S. 206, zit. n. Bikner-Ahsbahs, 2003, S. 213). Dabei kann zwischen *Ablauftypen* und *personalen Idealtypen* unterschieden werden.

Als auf diesem allgemeinen Verständnis aufbauend lässt sich das fünfschrittige Verfahren von Gerhard verstehen, das Bikner-Ahsbahs (2003, S. 215) wiedergibt und in der Folge an Beispielen aus der Mathematikdidaktik illustriert:

1. *Fallrekonstruktion*: Aus den Daten werden Einzelfälle rekonstruiert.

2. *Fallkontrastierung*: Die so gewonnenen Fälle werden nach dem Prinzip minimaler und maximaler Kontrastierung in Beziehung gesetzt.

3. *Ermittlung reiner Fälle*: Theoretisch werden reine Verläufe formuliert. In den Daten werden empirische Fälle gesucht, die diese reinen Fälle möglichst gut repräsentieren und somit als Prototypen dienen können.

4. *Einzelfallverstehen*: Die Einzelfälle werden den Idealtypen gegenübergestellt, um das jeweils eigene herauszuarbeiten und „das Geschehen erklärend zu verstehen".

5. *Strukturverstehen*: Es wird zu der Frage übergegangen, wie (gesellschaftliche) Strukturen die gefundenen Zusammenhänge beeinflussen.

Ausführliche Fallbeschreibungen

Aus den Forschungsfragen gehen keine klaren Anforderungen an eine Typenbildung hervor. Eventuell kann am Ende eine Annäherung an dieses Ziel vermerkt werden, zunächst soll sich jedoch mit bescheideneren Zielen begnügt werden. Diese vorsichtige Herangehensweise an die Typenbildung lässt sich auch in der dokumentarischen Methode wiederfinden, wo die Bildung von Typen zwar als wünschenswert angesehen wird, jedoch nicht als immer möglich vorausgesetzt wird. In jenen Fällen kann dann auch eine ausführliche Fallbeschreibung ein wertvolles Ergebnis darstellen (Bohnsack, 2010a, S. 161).

Solche Fallbeschreibungen können über ihren ursprünglichen Gegenstand hinausgehen und ein höheres Maß an Allgemeinheit erhalten, indem sie schließlich wieder mit den zugrundeliegenden theoretischen Ansätzen in Verbindung gebracht werden. So kann bewertet werden, inwiefern das Beschriebene den Erwartungen entspricht und wo bisheriges theoretisches Wissen nach einer Ausschärfung verlangt. Darüber hinaus kann an dieser Stelle auch die Plausibilität der Ergebnisse im Lichte der Erkenntnisse aus Bezugsdisziplinen wie der Neurowissenschaft beleuchtet werden.

3.2.4. Rekonstruktion womit? Basis der Rekonstruktionen

Es ist nun noch zu klären, auf welche Grundlage die Rekonstruktionen sich beziehen. In den beiden hier angewendeten Theorien hat man sich von der Annahme entfernt, nur als Text erfassbare Sprache sei der Gegenstand von Rekonstruktionen. Neben sie treten andere semiotische Ressourcen wie Lautäußerungen, Gesten, Mimik oder Abbildungen. Die kulturhistorische Schule weist außerdem darauf hin, wie Dinge als Artefakte eine spezifische Position einnehmen können, deren Interpretationen nach angemessenen Methoden verlangen.

Sprache und Sprechakte

Verbale Äußerungen sind diejenigen Äußerungen, die am augenfälligsten Sinn transportieren. In der Analysearbeit wird in der Theorie der Interessendichten Situationen die Sprechakttheorie von Austin (1975) genutzt, um die Bedeutung jeder Aussage umfassend deuten zu können. Der Autor unterscheidet zwischen lokutionären, illokutionären und perlokutionären Akten als verschiedenen Aspekten des Sprechens. Der lokutionäre Akt meint die „gesamte Handlung, ‚etwas zu sagen'" (Austin, 1975, S. 110). Die Bedeutung dieser Zuschreibung erschließt sich in der Unterscheidung von den anderen beiden Akten: Jedem lokutionären Akt steht ein illokutionärer Akt gegenüber, „ein Akt, den man vollzieht, *indem* man etwas sagt" (Austin, 1975, S. 115, Hervorhebung im Original). Der dritte Akt ist nicht immer, aber durchaus häufig Bestandteil eines Sprechens: Der perlokutionäre Akt beschreibt eine Wirkung des Sprechakts, die nur indirekt oder gar nicht Teil des lokutionären oder illokutionären Akts ist. Er lässt sich somit nur aus den Reaktionen auf eine Äußerung rekonstruieren. Das Bewusstsein um diese Dreigestalt von Sprechakten kann genutzt werden, um „eine Vielzahl möglicher Realitäten ähnlicher Strukturen" (Bikner-Ahsbahs, 2005, S. 65) zu rekonstruieren, die den aus dem Text entwickelten Hypothesen eine größere Allgemeinheit verleihen.

Roth und Radford (2011, 26) können diesen Annahmen von ihrem Standpunkt her folgen: „In the same way as speech act theory and conversation analysis, dialectical materialist (Marxist) approaches orient us to social interaction as the site of interest for understanding psychology“. Damit ist auch in der Methodologie der Theory of Objectification nicht die einzelne Äußerung, sondern erst ein „Hin-und-Her“ (*turn pair*) die kleinste möglichen Untersuchungseinheit (Roth und Radford, 2011, S. 101, vgl. auch S. 11 f.).

Berücksichtigung vielfältiger semiotischer Ressourcen

Eine weitere Folgerung aus der materialistischen Grundhaltung der Theory of Objectification ist die Berücksichtigung vielfältiger semiotischer Ressourcen, was den Blick über die Sprache hinaus erweitert.

> Human action is multimodal. As codified historical forms of human action, concepts are multimodal too. But they are also multimodal in their actualization, in the passage from the virtual to the actual. Indeed, in their movement into existence, in which they become objects of thought and consciousness, concepts are endowed with particular determinations. They have to be actualized in sensous multimodal and material activity (Radford, 2014b, S. 354).

Neben der philosophischen Herleitung auf Basis einer materialistischen Auffassung von Handeln und Denken wird die Annahme der Multimodalität auch durch die aktuelle neurologische Forschung gestützt. Arzarello et al. (2009) argumentieren anhand eines Zitats von Gallese und Lakoff, das Gehirn sei multimodal in dem Sinne, dass „an action like grasping … (1) is neurally enacted using neural substrates used both for action and perception, and (2) the modalities of action and perception are integrated at the level of the sensory-motor system itself and not via higher association areas“ (S. 98).

(Radford und Sabena, 2015, S. 166) betonen, dass sie sich nicht nur den traditionell betrachteten semiotischen Systemen – vor allem den schriftlichen fixierten mathematischen Symbolen – widmen, sondern jegliche Zeichen betrachten und ihr Verhältnis zueinander untersuchen. Im Gegensatz zu anderen Autorinnen und Autoren (vgl. Arzarello et al., 2009; Krause, 2016) beziehen sich Radford und Sabena (2015) nicht auf Peirce, um für einen weit gefassten Zeichenbegriff zu argumentieren, sondern auf Wygotski, bei dem sie aber folgenden Unterschied hervorstellen:

> In contradistinction to Saussure’s (1916) and Peirce’s (1958) semiotics, Vygotsky’s semiotics does not resort to a representational idea of signs. His concept of sign is rather located within his work in special education: a sign is an auxiliary means to organize our behavior. Signs are tools of reflection that allows individuals to plan action (S. 162).

Damit ist das Interesse an den Zeichen kein Selbstzweck: „… we are not interested in the semiotic resources per se. We are interested in the manner in which teachers and students resort to the semiotic resources in processes of learning …" (Radford und Sabena, 2015, S. 167).

Hierbei beziehen Radford und Sabena (2015) die Idee des semiotischen Bündels (Arzarello et al., 2009) ein. Darunter ist zunächst lediglich eine Erweiterung des Begriffs des semiotischen Systems zu verstehen: „A semiotic bundle is a *system of signs*—with Peirce's comprehensive notion of sign[4]—that is produced by one or more interacting subjects and that evolves in time" (Arzarello et al., 2009, S. 100). Die Stärke dieses methodologischen Konstrukts liegt darin, dass man das Zusammenspiel der Verwendung semiotischer Mittel sowohl *synchron* als auch *diachron* untersuchen kann: Im ersten Fall geht es um die semiotischen Ressourcen, die gleichzeitig genutzt und damit verknüpft werden; im zweiten Fall entwickeln sich diese Verknüpfungen im Laufe der Tätigkeit (Radford und Sabena, 2015, S. 167 f.; vgl. Arzarello et al., 2009, S. 100 f.).[5]

Die besondere Rolle von Artefakten

Für die TO spielen unter den Zeichen Artefakte eine besondere Rolle. In den beiden folgenden Zitaten wird eine Abgrenzung vorgenommen zu Ansätzen, die physische Objekte zwar wahrnehmen, aber in Radfords Augen dabei nicht konsequent genug sind:

> … our individual senses evolve intertwined not only one with the other senses, but also with the materiality of the objects in our surroundings. (…) The claim that I am making … goes beyond the conceptualization of artifacts as merely *mediators* of human thinking and experience, or as prostheses of the body. Artifacts do much more than mediate: they are a *constitutive part* of thinking (Radford, 2014b, S. 355).
>
> … cultural artifacts are not merely devices that provide stimuli for cognitive development. They are part of cognition, which we see simultaneously as ideational and material (Radford, 2014b, S. 360).

Die Auswahl passender Artefakte und ihre Integration in das Unterrichtsdesign ist keine einfache Aufgabe. In verschiedenen diesbezüglichen Arbeiten (Radford, 2013b; Janßen und Radford, 2016) wird deutlich, dass die Artefakte zusammen mit der Aufgabenstellung sehr gut auf das mathematische Objekt/das Motiv der mathematischen Tätigkeit abgestimmt sein müssen.

3.3. Spezifikum der TO: Eine kulturhistorische Grundhaltung

Wenn man die Idee der durch Tätigkeit konstruierten Wirklichkeit im historischen Maßstab weiterdenkt, kommt man auch zu einem gewissen Geschichtsbewusstsein, das der

[4] Wie oben beschrieben folgen Radford und Sabena (2015) Wygotski's Zeichenbegriff. Dieser ist aber ebenfalls ein weit gefasster.

[5] Auf *Catchments* – wiederkehrende Gesten(bestandteile) –, die Radford und Sabena (2015, 168) in der Folge als einen möglichen Analysefokus benennen, soll hier nicht näher eingegangen werden.

Forschung zugrunde liegt, genauer: zu einem Bewusstsein für die geschichtlich-kulturelle Gewordenheit der Tätigkeit, die beforscht wird. „… the study of individuals—what they do, how they think and feel—cannot be divorced from the sociocultural contexts in which they live and grow“ (Radford, 2015, 47). „The material, as a theoretical category, cannot be taken for granted. We need to consider it from a historical viewpoint“ (Radford, 2014b, S. 358 f.). Dahinter steht die Erkenntnis, dass „children in different societies live their everyday lives in different institutions“ (Hedegaard, 2012, S. 129). Hedegaard (2012, 129 ff.) schlägt als Analyseinstrument drei Ebenen vor:

- Eine *formal gesellschaftliche Ebene*, die in Gesetzen formalisierte, historisch entwickelte Traditionen einer Gesellschaft enthält, die die Grundlage für verschiedene Institutionen (zum Beispiel Familie, Schule) bilden,
- eine *allgemeine institutionelle Ebene*, die informelle, konventionalisierte Traditionen und Anforderungen (zum Beispiel innerhalb der Familie oder der Schule) enthält, die sich in verschiedenen Handlungsformen (*practices*) äußern,
- und eine *spezifische Ebene*, die die von den beteiligten Personen geteilten Tätigkeitsbedingungen (in der Schule oder konkreter im Klassenraum, zu Hause) enthält.

Während es Hedegaard um die allgemeine Entwicklung des Kindes geht, um „all the different practices the child attends“ (Hedegaard, 2012, S. 137), konzentriert sich die mathematikdidaktische Forschung auf einen spezifischen Ausschnitt. Wenn in dieser Arbeit der Gegenstand die Ausbildung algebraischen Struktursinns im Algebraunterricht einer 8. Klasse in Bremen ist, muss die Entwicklung algebraischen Wissens im Laufe der (westlichen) Menschheitsgeschichte beachtet werden, aber auch die politisch-gesellschaftliche Entwicklung der jüngeren Geschichte, die genau zu dieser Form des Unterrichts geführt hat: zur Konstituierung der Schulform und des Einzugsgebietes, zu einem spezifischen Curriculum, zu den konkreten Lebensbedingungen der Schülerinnen und Schüler und den sozialen Konstellationen, die im Klassenraum Bedeutung erlangen.

3.4. Mögliche Fragestellungen und Grenzen

Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014, S. 5) betonen, dass unter dem methodologischen Paradigma qualitativer Forschung ausschließlich Fragen nach dem *Wie* beantwortet werden können – dies aber eben besonders gut. Bikner-Ahsbahs und Halverscheid (2014, S. 103) präzisieren die möglichen Fragestellungen ihrer Theorie, wenn sie schreiben:

> As a general tool, the GCSt model helps to investigate [epistemic processes] and to represent their process structure …. Epistemic structures and production types already gained may provide sensitivity for specific conditions that foster or hinder the emergence of IDS in the single given classroom, but this will not always be possible.

Als Grenzen erkennen sie an, dass die Theorie der Interessendichten Situationen „cannot say much about cognitive processes of individuals and does not provide tools for epistemological analyses“ (Bikner-Ahsbahs und Halverscheid, 2014, S. 102).

Das in dieser Arbeit berücksichtigte SVSt-Modell ist nur ein Bestandteil der Theorie der Interessendichten Situationen. Dementsprechend wird es nur unter bestimmten Bedingungen angewendet, und zwar, wenn eine Situation als eine solche identifiziert wurde, in der eine hohe individuelle Involviertheit der Schülerinnen und Schüler festgestellt wurde. Es wird festzulegen sein, wie diese Bedingungen im Rahmen dieser Arbeit zu reformulieren sind (vgl. Abschnitt 4.4.1).

Auch Radford kreist die mit der Theory of Objectification erschließbaren Fragestellungen ein. Insbesondere sei kein fertiger Plan zum Unterrichten mathematischer Inhalte zu erwarten:

> Teachers and researchers may have an idea, but the process is not a mechanical one (Radford, 2013b, S. 32).
>
> The sketched approach to cognition does not offer a recipe of how to teach or how to learn. It offers a cultural and historical dialectical materialist understanding of the senses, sensation and the material and conceptual worlds that can lead us to appraise in new ways the teaching and learning of mathematics. The approach is rather an invitation to understand the role of material culture and our senses in order to imagine and envision new ways in which to think the teaching and learning of mathematics (Radford, 2014b, S. 360).

3.5. Gütekriterien qualitativer Forschung

Eine Frage, mit der sich jede wissenschaftliche Arbeit auseinandersetzen muss, ist die der zugrundeliegenden Gütekriterien. Sie wird in der qualitativen Forschung anders beantwortet als in der quantitativen Forschung. Przyborski und Wohlrab-Saar (2014; vgl. auch Przyborski und Slunecko, 2009) bemühen sich dennoch um eine Formulierung von Standards, die an die etablierten Gütekriterien der quantitativen Forschung anknüpft, aber den Eigenheiten der qualitativen Sichtweise gerecht wird und damit für diese Arbeit geeignet ist. Wo nötig, werden ihre Ausführungen um Stimmen aus der einschlägigen Literatur ergänzt. Insbesondere gilt es auf Ausführungen zu verweisen, die sich speziell auf die Arbeit an und mit Unterrichtsdesigns bezieht, wie sie in diesem Kapitel bereits grundsätzlich begründet und im nächsten Kapitel als Methode ausgeführt werden wird.

3.5.1. Validität

Validität meint die Angemessenheit der Methoden in Bezug auf die Forschungsfrage. Die qualitative Forschung begegnet dieser Anforderung in einem Zweischritt (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 22 ff.). Zum einen kann sie für sich beanspruchen, dem in der Forschungsfrage benannten Gegenstand unmittelbar entgegenzutreten – es stellt sich gar nicht das Problem quantitativer Erhebungen, bei denen die Angemessenheit der Operationalisierung nachgewiesen werden muss. Dabei kann man annehmen, dass ein längerer Kontakt mit den Studienteilnehmerinnen und -teilnehmern tendenziell zu einer höheren Glaubwürdigkeit der gemachten Analysen führt (Lincoln und Guba, 1985, 301-305). „The first-hand eperience of observing and interacting with teachers' and students' [sic] over an extended period of time constitutes a crucial source of insight when attempting to account for their activity" (Cobb und Whitenack, 1996, S. 226). So wird Designstudien – einer der an späterer Stelle vorgestellten Formen von Forschung, die sich als eine Umsetzung des oben skizzierten Forschungsprogramms betrachten lassen – eine hohe *ökologische Validität* bescheinigt (vgl. Phillips und Dolle, 2006, S. 281). Allerdings weisen Lincoln und Guba (1985, S. 305) auch darauf hin, dass der lange Aufenthalt im Feld auch das Risiko birgt, zu vorschnellen Deutungen zu kommen.

Es muss sich also der Frage gestellt werden: „Woran können wir festmachen, ob wir angemessen rekonstruiert haben, adäquat *verstanden* haben?" (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 22, Hervorhebung im Original) Man muss „erarbeiten, welche impliziten Regel(mäßigkeite)n es uns ermöglichen, uns im Alltag zu verständigen, in welchen Formen z. B. unmittelbares Verständnis abläuft und welche Formen Träger von nicht unmittelbarem Verständnis sind" (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 23). „Qualitative Methoden sind insofern valide, als sie an die Common-Sense-Konstruktionen der Untersuchten anknüpfen und auf den alltäglichen Strukturen bzw. Standards der Verständigung aufbauen" (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 24). Es muss also gewährleistet werden, dass die Leserin oder der Leser diesen Common-Sense-Konstruktionen folgen kann. Der Autor oder die Autorin muss hier eine besondere Sensibilität walten lassen. Es wird sich allerdings im folgenden Abschnitt zur Reliabilität zeigen, dass aus anderen Gründen sogar eine *Explizierung* des Alltagsverständnisses geboten ist. Darüber hinaus empfehlen Lincoln und Guba (1985, S. 305 ff.) als Gegenmittel für die von ihnen festgestellten Gefahr der vorschnellen Schlüsse eine Triangulierung, und zwar sowohl in Bezug auf die Methoden als auch in Bezug auf die Theorien. Verschiedene Verfahren oder Denkansätze angewandt auf das gleiche Datenmaterial zwingen die Forscherin oder den Forscher, mehrfach hinzusehen.

3.5.2. Reliabilität

In Bezug auf standardisierte Verfahren ist mit Reliabilität „die Möglichkeit der exakten Reproduzierbarkeit einer empirischen Untersuchung, die Genauigkeit einer Messung oder die ‚Reproduzierbarkeit von Messergebnissen' (Diekmann 2004: 217)" (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 24) gemeint. Bei qualitativen Methoden geht es nun nicht um Reproduzierbarkeit, sondern um die prinzipielle Replizierbarkeit der Untersuchungen und Ergebnisse (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 24). Als Lösung bieten Przyborski und Wohlrab-Sahr das *Prinzip der Rekonstruktion der alltäglichen Standards* und das *Prinzip des Nachweises der Reproduktionsgesetzlichkeit der Fallstruktur* an.

Das erstgenannte Prinzip fordert, dass die alltäglichen Standards, auf die sich in der Analyse bezogen wird, expliziert werden. Es genügt also nicht, wie im vorangegangenen Abschnitt zur Validität ausgeführt, sensibel für etwaige Ambivalenzen bezüglich den alltäglichen Interpretationen zu sein, vielmehr muss deutlich gemacht werden, wie mit ihnen umgegangen wurde.

Das zweitgenannte Prinzip fordert, dass die Reproduktionsgesetzlichkeit derjenigen Struktur nachgewiesen werden muss, die als Ergebnis der Analyse behauptet wird. „Es geht darum zu zeigen, dass Strukturelemente … nicht beliebig herausgegriffen sind, sondern sich sowohl im einzelnen Fall als auch über diesen hinaus systematisch finden“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 25). Die Interpretation „richtet sich also nicht primär auf eine Zusammenfassung von Themen, sondern darauf, wie diese Themen entwickelt werden und welche Strukturen darin – wiederkehrend – zum Ausdruck kommen“ (ebd.). Forschungspraktisch bedeutet das, „dass jenseits der thematischen Unterschiede nach wiederkehrenden identischen Strukturen … in einem Fall und über die Fälle hinweg gesucht wird“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 26).

3.5.3. Objektivität, Intersubjektivität und Nachvollziehbarkeit

„Als objektiv gelten Messinstrumente oder Messverfahren, wenn die damit erzielten Ergebnisse unabhängig sind von der Person, die die Messinstrumente anwendet“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 26). Man sollte dabei nun nicht dem Irrtum unterliegen, dass dies die Konstituierung von Ergebnissen bedeutet, die unabhängig von allen Umständen *wahr* sind – „temporarily and spatially unbound (nomothetic) propositions (supposedly) disconnected from the subjects uttering them“ (Przyborski und Slunecko, 2009, S. 158). In der qualitativen Forschung wird stattdessen der Begriff Intersubjektivität präferiert – Przyborski und Slunecko (2009, S. 158) verwenden „inter-subjective accessibility“ synomnym mit Objektivität.

Doch auch Intersubjektivität oder intersubjektive Zugänglichkeit ist ein hoher Anspruch. Um ihm im Rahmen qualitativer Forschung gerecht zu werden, lässt man zunächst alle möglichen Formen der Kommunikation zu, versucht sie möglichst vollständig zu erfassen und untersucht die erhobenen Daten dann mit Hilfe der bekannten Alltagsstrukturen. „Die alltäglichen Standards der Verständigung erfüllen also bei rekonstruktiven Verfahren eine ähnliche Funktion wie die Standardisierung bei den hypothesenprüfenden Verfahren“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 27). Diese Standards müssen bei der Analyse also explizit gemacht werden, um intersubjektive Überprüfbarkeit zu gewährleisten.

Wenn in den Analysen eine größere Datenmenge untersucht wurde, diese aber nicht in ihrer Gänze in der Darstellung der Analyseergebnisse präsentiert werden, müssen sie dennoch jeder und jedem Interessierten zugänglich gemacht werden.

Über die drei klassischen Gütekriterien hinaus schlagen Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014) zwei weitere Kriterien vor: Das der *Generalisierbarkeit* und das der *metatheoretischen Fundierung*.

3.5.4. Generalisierbarkeit und Repräsentativität/Repräsentanz

Kelly (2006, S. 113) äußert die Einschätzung, dass Designforschung eben nicht die kulturellen, historischen und sozialen Einflüsse „wegrandomisiert“, die unweigerlich auf Lehren und Lernen einwirken, sondern sich auf sie einlässt, um sie zu verstehen und zu beeinflussen.

Dies gilt allgemein für die qualitative Forschung: Während bei der Anwendung quantitativer Methoden „Durchschnittstypen“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 32) gebildet werden, stehen hier am Ende Idealtypen im Sinne Webers. Ziel ist dann nicht eine Repräsentativität der zugrundeliegenden Daten[6], sondern die *Repräsentanz* des sozialen Sinns (Loos & Schäffer, zit. n. Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 32) oder eine *konzeptuelle Repräsentativität*, wie es Strübing (zit. n. Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 32 f.) bezeichnet: „Es sollen alle Fälle und Daten erhoben werden, die für eine vollständige analytische Entwicklung sämtlicher Eigenschaften und Dimensionen der jeweiligen gegenstandsbezogenen Theorie relevanten Konzepte und Kategorien erforderlich ist“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 33).

Die Fälle, die Gegenstand der Untersuchung werden, können also nicht beliebig ausgewählt werden. Vielmehr muss sichergestellt werden, dass sie eine Analyse gemäß des gewählten Theorierahmens ermöglichen. Das betrifft im Falle dieser Arbeit die Auswahl der Schülerinnen und Schüler, aber auch den Beobachtungszeitraum und die dabei vermittelten Inhalte, wodurch der Umfang des Falls bestimmt wird.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Ziel der Generalisierung ein *sorgfältiges Sampling* und eine *systematische Anwendung von Analysemethoden* erfordert. Shavelson, Phillips, Towne und Feuer (2003, S. 27) benennen zudem die Einbettung der Analysen „in a broad theoretical context to show if and how the study is a paradigmatic case of the phenomenon under investigation“ als ein geeignetes Vorgehen, Generalisierbarkeit sicherzustellen. Die Anwendung von Hintergrundtheorien ist jedoch weit über diesen Apsekt hinausgehend relevant.

3.5.5. Metatheoretische Fundierung

Während die bisher genannten Kriterien in erster Linie in der methodischen Umsetzung Anwendung finden werden, sollte die metatheoretische Fundierung bereits geleistet sein, wenn die konkrete Umsetzung in Angriff genommen wird, und es wird im Folgenden argumentiert, dass dies in der vorliegenden Arbeit der Fall ist. In der Metatheorie, wie Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014) sie definieren, „werden begrifflich-theoretische Grundlagen erfasst, die mit dem Gegenstand, auf die sich das Erkenntnisinteresse richtet, nur mittelbar zu tun haben, wie z.B.: Was ist unter Kollektivität zu verstehen, unter Handeln, unter Motiv oder Orientierung bzw. Orientierungsmuster?“ (S. 29). Theoriearbeit beginne in qualitativen Studien schon dort, wo „man versucht, sich dem Phänomen, das einen interessiert, in analytischer Einstellung zu nähern, indem man es systematisch auf seine Bedingungen und Konsequenzen hin befragt, es gegenüber vergleichbaren Phänomenen systematisch abgrenzt und dabei erste Konzeptualisierungen vornimmt“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 30). Auch (Kelle und Kluge, 2010, S. 28-40 sowie 108 f.) benennen die Entwicklung eines relativ weiten *heuristischen Rahmens* als unverzichtbar. Diese Arbeit ist bereits geleistet worden, indem ausgehend vom Stand der Forschung Lerntheorien ausge-

[6]Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014, S. 32) argumentieren, dass eine solche Repräsentativität auch in quantitativen Studien nicht geleistet wird und von der zugrundeliegenden Statistik auch nicht behauptet wird. Vielmehr werde ein „numerischer Schluss (im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsaussage) von einem verkleinerten ‚Abbild‘ eines Bevölkerungsteils auf den gesamten Bevölkerungsteil“ gemacht.

wählt und von diesen ausgehend eine epistemologisch fundierte Methodologie entwickelt wurde. Als Beispiele, was alles Metatheorien sind, nennen Przyborski und Wohlrab-Sahr mit den Grundbegriffen der dokumentarischen Methode und den Bezugswissenschaften Ethnographie und Sprachwissenschaften explizit einige der Hintergrundtheorien, die weiter oben behandelt wurden.

Dieser Bezug auf Hintergrundtheorien ist insofern kein Gütekriterium, das mehr oder weniger gut erfüllt sein kann. Vielmehr handelt es sich um ein Prinzip, einen Standard, der zu erfüllen ist. Auf diese Weise wird der Aspekt der metatheoretischen Fundierung auch im Forschungsfünfeck von Bikner-Ahsbahs und Prediger (2006) betrachtet, dessen Bestandteile stets auf Hintergrundtheorien und eine philosophische Basis zurückgreifen, die so explizit wie möglich gemacht werden sollte.

3.6. Resümee zur Methodologie

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels soll die Methodologie noch einmal kurz zusammengefasst und die Beschreibung der konkreten Methoden vorbereitet werden, die den Gegenstand des folgenden Kapitels bildet. Ausgehend von einem Verständnis der Mathematikdidaktik als *Design Science* wird eine *rekonstruktive Grundhaltung* als sinnvoll und als von beiden Lerntheorien geteilt angenommen. Sie ist geeignet, die hier im Mittelpunkt des Forschungsinteresses stehenden Prozesse der Ausbildung algebraischen Struktursinns im alltäglichen Mathematikunterricht dahingehend zu erhellen, was für sie typisch ist und welche Variation sie aufweisen. Dabei wurde die Terminologie der dokumentarischen Methode als hilfreich herausgestellt.

Als Beitrag der Theory of Objectification wird die Aufgabenkonstruktion unter Rückgriff auf die Tätigkeitstheorie aufgenommen. Die Unterrichtsplanung bleibt über die Dauer der Unterrichtseinheit andauernd im Fokus der Aufmerksamkeit und stellt den Vergleichshorizont bei der Suche nach den relevanten Faktoren in der Ausbildung algebraischen Struktursinns dar. Bei den Analysen im Sinne der dokumentarischen Methode helfen die dargestellten Konstrukte aus der Sprechakttheorie (die drei Ebenen des Sprechakts) sowie die theoretischen Konzepte zu semiotischen Ressourcen (das semiotische Bündel) und Artefakten (kulturhistorischer Artefaktbegriff). Die dargestellten Gütekriterien sind bei der Erarbeitung all dieser Methoden leitend und werden dementsprechend immer wieder aufgegriffen.

4. Darstellung und Begründung des methodischen Vorgehens

In diesem Kapitel werden zunächst die *Methoden der Datenerhebung* beschrieben und begründet. Durch die Anlage der Studie als designbasierte Studie spielen die *Unterrichtsplanung und ihre Begründung* eine besondere Rolle. Ihm wird daher ein eigener Abschnitt gewidmet. Die Analyse der Daten stützt sich auf eine *methodisch abgesicherte Vernetzung der beiden grundlegenden Theorien* dieser Arbeit, diese wird daher den *Analysemethoden* vorangestellt. Den Abschluss des Methoden-Kapitels bilden Überlegungen zur *Darstellung der Analysen.*

4.1. Erhebungsmethode

4.1.1. Konzeptueller Rahmen: Designbasierte Studie

Es wurde sich in der Methodologie der Auffassung von der Mathematikdidaktik als designentwickelde und -beforschende Wissenschaft angeschlossen. Wie genau die Umsetzung eines solchen Forschungsprogramms aussehen kann, ist in verschiedenen Kontexten diskutiert worden. Teile dieser Diskussion sind bereits in Abschnitt 3.1 wiedergegeben worden. Im Folgenden soll dargelegt werden, wie die vorliegende Arbeit darin verortet ist.

Formen intervenierender Forschung

In einem Überblickstext unterscheidet Jaworski (2004) zwischen drei Typen von Forschung, die eine Verknüpfung von Wissenserwerb und Praxisentwicklung anstreben: *Design research* (in der deutschsprachigen Forschung auch als Entwicklungsforschung bezeichnet, vgl. Prediger et al., 2012), *Learning study* (basierend auf dem japanischen Konzept der *Lesson study*) und *Co-learning inquiry*. Ihr Hauptunterscheidungsmerkmal ist die Weise, in der die Lehrkräfte in den Forschungsprozess eingebunden sind: Während sie in den beschriebenen Designstudien eher eine ausführende Rolle einnehmen, sind die Lehrerinnen und Lehrer in Co-learning inquiries gleichberechtigte Mitglieder des Forschungsteams; Learning studies lassen sich als eine Zwischenform auffassen.

Die Beschreibungen von Jaworski (2004) machen deutlich, dass eine angemessene Gewichtung gefunden werden muss zwischen der wünschenswerten Einbindung der Lehrkraft einerseits und ihrer drohenden Überforderung andererseits. Dabei kann je nach Ausrichtung der Forschung unterschiedlich bewertet werden, *wie* wünschenswert die starke Einbindung von Lehrerinnen und Lehrern ist. Sie ist sehr wünschenswert, wenn die Intervention eine nachhaltige Verbesserung des Unterrichts anstrebt, und weniger wichtig, wenn es hauptsächlich darum geht herauszufinden, was grundsätzlich möglich ist, wie Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer und Schauble (2003, S. 10) es tun, wenn sie schreiben: „Design studies are typically test-beds for innovation. The intent is to investigate the possibilities for educational improvement by bringing about new forms of learning in order to study them" – im Vordergrund steht nicht, diese neuen Formen des (Lehren und) Lernens dauerhaft zu etablieren.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen den verschiedenen Ansätzen besteht also in der Formulierung ihrer Aufgaben: Die von Jaworski (2004, S. 12 ff.) beschriebenen Co-learning inquiries behandelten relativ offene, auf das eigene Unterrichten bezogene und von den Interessenlagen der teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer bestimmte Fragestellungen. Demgegenüber betonen sowohl Design research als auch Learning studies stärker die Rolle von Theorie. Während bei letzteren allerdings das Wissen und die möglichen Wissenszuwächse der beteiligten Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt steht, konzentriert sich Design research auf die Entwicklung von didaktischen Modellen, also lokalen Theorien (Jaworski, 2004, S. 11). Da es genau hierum auch in dieser Arbeit geht, sind geeignete Ansätze in diesem Feld zu suchen. Die alternativen Ansätze intervenierender Forschung werden in der konkreten Gestaltung der Forschung aber dennoch Berücksichtigung finden.

Design research

In ihrer Beschreibung von Design research geht Jaworski vor allem auf Cobb et al. (2003) ein. Hier soll deren Darstellung noch um weitere Stimmen der Methodenliteratur angereichert werden, um deutlich zu machen, wie genau diese Herangehensweise an Lehr-Lern-Forschung für die vorliegende Arbeit fruchtbar sein kann. Dabei soll aber gleich zu Beginn deutlich gemacht werden, dass es *die Designstudie* nicht gibt; vielmehr handelt es sich um ein „Cluster Concept" wie *Demokratie* (Wittgenstein, 1953, zit. n. Phillips und Dolle, 2006, S. 287) – auch hier fallen mehrere durchaus unterschiedliche Regierungssysteme unter den gleichen Begriff.

Auf die ersten beiden von fünf Eigenschaften, anhand derer Cobb et al. (2003) Design research charakterisieren und die die weitere Besprechung strukturieren soll, ist bereits eingegangen worden: Erstens geht es darum, neue Erkenntnisse über Lernprozesse und geeignete Unterrichtsdesigns zu gewinnen; zweitens geschieht dies, indem auf Basis vorhandenen Wissens entwickelte Unterrichtsdesigns zum Einsatz gebracht werden (Cobb et al., 2003, S. 9 f.). Daraus leitet sich eine dritte Eigenschaft ab, die von vielen Autorinnen und Autoren als zentral angesehen wird: „Design experiments create the conditions for developing theories yet must place them in harm's way" (Cobb et al., 2003, S. 10). In der kulturhistorischen Sprache von Radford (2014a, S. 11) bedeutet dies, dass die interessierenden gemeinschaftlichen Tätigkeiten von der didaktischen Qualität der mathematischen Fragestellungen abhängen, von der Reichhaltigkeit, Tiefe und Vielfalt der angeregten mathematischen Untersuchungen. Die Lehrkraft spielt dabei eine zentrale Rolle. Insgesamt wird ein zyklisches Vorgehen notwendig: Aufbauend auf Theorie wird Praxis gestaltet – die „prospective side" des Kreislaufs –, diese Praxis wird untersucht und zur Grundlage neuen theoretischen Wissens – die „reflective side".[1]

[1]Steinbring (1998, S. 165 f.) spricht von der konstruktiven und der analytischen Dimension oder Sichtweise, die sowohl die mathematikdidaktische Forschung als auch die mathematische Unterrichtspraxis haben. Er

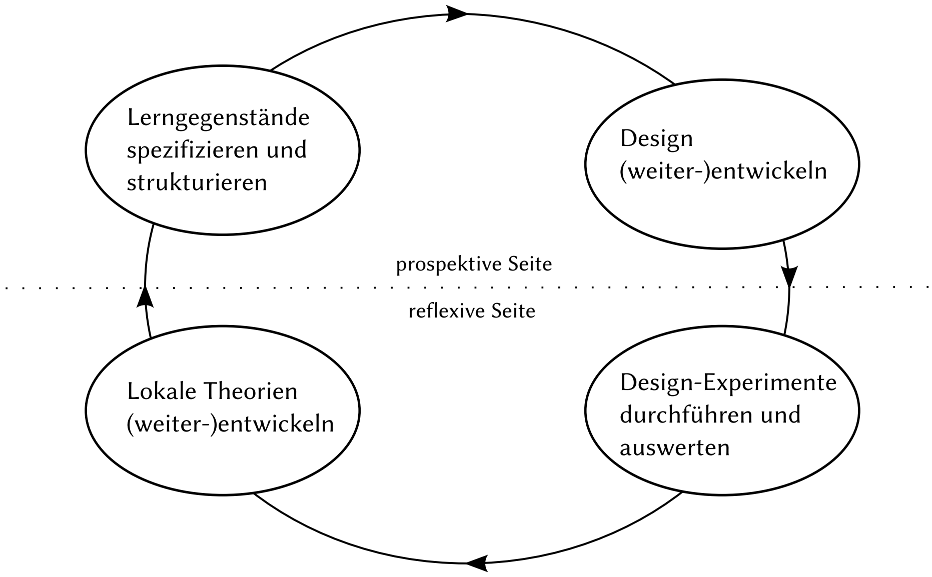


Abbildung 4.1.: Der Entwicklungsprozess in Designstudien in Anlehnung an Prediger et al. (2012, S. 453), ergänzt um die Benennung der Seiten nach Cobb et al. (2003).

Prediger et al. (2012) formulieren diesen Kreislauf genauer aus (vgl. Abb. 4.1). Auf der prospektiven Seite werden Lerngegenstände spezifiziert und strukturiert und ein Design (weiter-)entwickelt. Neben den erarbeiteten „spezifizierten und strukturierten Gegenstände" und „Lehr-Lern-Angeboten" entstehen als Produkte auch „Design-Prinzipien". Sie werden im Entwicklungsprozess benötigt, um diesen zu strukturieren. Dabei ist zu betonen, dass die fachdidaktische Theoriebildung für beide Schritte die Grundlage bildet. „Je weniger fachdidaktisches Wissen vorhanden ist, desto mehr Kreativität ist gefragt bei der Erstellung eines ersten Designs von Lernaktivitäten, desto explorativer ist auch die Untersuchung der Lernprozesse angelegt, die durch die Lehr-Lernarrangements initiiert werden sollen" (Prediger et al., 2012, S. 454).

Die auf der prospektiven Seite des Kreislaufs entwickelten Produkte bilden die Grundlage für die Durchführung und Auswertung von Design-Experimenten, die dann die Grundlage der (Weiter-)Entwicklung lokaler Theorien sind. Diese lokalen Theorien können einerseits auf die Lernprozesse bezogen sein und ihre Verläufe und Hürden beschreiben. Andererseits können sie auf die Lehrprozesse fokussieren und deren Bedingungen und Wirkungsweisen klären.

Bislang wurde nur ein einfacher Kreislauf beschrieben, doch es ist naheliegend, die gewonnenen Erkenntnisse wieder zu nutzen und mindestens einen weiteren Zyklus zu durchlaufen. Genau dies macht bei Cobb et al. (2003) das vierte Merkmal von Design research aus. Das fünfte Merkmal schließlich beschreibt weniger den Ablauf als die Haltung, mit der Design research betrieben wird:

geht allerdings von einer stärkeren Arbeitsteilung, also getrennten Ausrichtungen aus – eine Wissenschaftlerin könnte also konstruktiv arbeiten, eine andere analytisch; beide sollten sich aber der Arbeit der anderen bewusst sein.

> Theories developed during the process of experiment are humble not merely in the sense that they are concerned with domain-specific learning processes, but also that they are accountable to the activity of the design. The theory must do real work. (…) The critical question that must be asked is whether the theory informs prospective design and, if so, in precisely what way? (Cobb et al., 2003, S. 10 f.)

Cobb et al. gehen von stark auf die Theoriebildung bezogenen Designstudien aus – eine Auffassung, die auch der Konzeption der vorliegenden Arbeit zugrundeliegt. In den von ihnen benannten Merkmalen fehlt allerdings eines, das von anderen Autorinnen und Autoren (vgl. Collins, Joseph und Bielaczyc, 2004; Kelly, 2006) als zentral angesehen wird: „design studies should produce an artifact that outlasts the study and can be adopted, adapted, and used by others" (Kelly, 2004, S. 116). Zwar ist auch die vorliegende Studie durchaus auf Erkenntnisse aus, die für die Praxis Bedeutung haben, eine dauerhafte Verwendung der entwickelten Designs (etwa durch Aufnahme in ein Schulbuch) ist aber kein ausdrückliches Ziel. Insofern werden am Ende gerade bezüglich der Praxis Aspekte vorliegen, an denen weiter gearbeitet werden muss. Und wie auch bei Phillips und Dolle (2006, S. 290), die genau diesen Punkt betonen, bietet es sich an dieser Stelle an, de Corte und Verschaffel (2002) zu zitieren. Sie schreiben, ein systemischer Ansatz, der auf Designstudien zurückgreift,

> [can] be beneficially complemented by more analytic research, such as studies in which different versions of complex learning environments are systematically contrasted and compared with a view to the identification of those aspects which contribute especially to their high power and success (S. 529).

Es kann also davon ausgegangen werden, dass ein solches Weiterarbeiten an den gewonnenen Ergebnissen auch im Fall der vorliegenden Arbeit wünschenswert sein wird.

Nachdem nun deutlich geworden sein sollte, was für eine Art von Forschung betrieben werden soll, muss noch einmal zur Methodologie zurückgekehrt werden und ein zentraler Punkt Erwähnung finden: Eine Forschung, die so stark auf Prozesse setzt – Prozesse der Unterrichtsplanung und des Unterrichtens – muss auch ihre Gütekriterien auf diese Prozesse anwenden (Jaworski, 2004, S. 17). Es wird im Folgenden also auch bei der Unterrichtsplanung und -umsetzung (die in einer Designstudie wie der vorliegenden Teil der Erhebungsmethode werden) darauf eingegangen, wie den oben genannten Gütekriterien Rechnung getragen wird.

Konzeption der vorliegenden Studie

Um die Frage beantworten zu können, inwiefern algebraischer Struktursinn unabhängig von den jeweils betrachteten algebraischen Strukturen ist, wurde entschieden, dass der Unterricht zu mehreren Themen in einer Klasse Grundlage der Untersuchung werden sollte. Die auftretenden „Pausen" zwischen den beobachteten Unterrichtseinheiten – Phasen, in denen andere Themen behandelt wurden sowie Zeiten, in denen gar kein Unterricht stattfand (Ferien, Praktika, Klassenfahrten) – konnten vom Forscher genutzt werden, um aus den bereits gewonnenen Daten Erkenntnisse zu Fragen zu gewinnen, die beim Design der nächsten Unterrichtseinheit helfen können. In wöchentlichen Treffen zwischen dem Forscher und der Lehrkraft – „debriefing sessions“ im Sinne von Cobb et al. (2003, S. 12) – konnten außerdem Überlegungen zum bisherigen Verlauf ausgetauscht, Feedback an die Lehrkraft gegeben und kleine Änderungen in der Unterrichtsplanung vorgenommen werden. Der Lehrkraft wurde also eine Rolle zugewiesen, die über das zuverlässige Durchführen von Anweisungen – „function like astronauts“ (Dede, 2004, S. 110) – hinausgeht. Vielmehr sollte sie in der Lage sein, jeweils angemessene Unterstützungen für die Schülerinnen und Schüler zur Verfügung zu stellen, eine Entscheidung, die aus der Überzeugung resultiert, dass spezifische individuelle und soziale Faktoren sich niemals komplett durch einen standardisierten Verlauf erfassen lassen (Dede, 2004, S. 110 f.) und dass gerade eine gute Lehrerin „teachable moments“ nutzt, die im Unterricht auftreten (Phillips und Dolle, 2006, S. 279,vgl. auch Bikner-Ahsbahs und Janßen, 2013). Außerdem war die Vermittlung eines Gefühls von Teilhaberschaft und persönlicher Involvierung intendiert (Jaworski, 2004, S. 19).

Die begleitenden Analysen im Designprozess waren erste Deutungen, eher Alltagsdeutungen als die später angestrebten tiefer gehenden Analysen. Die dabei verwendeten Daten lagen nach dem Unterricht unmittelbar vor: Feldnotizen des Forschers, Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler, als Bezugspunkt die Unterrichtsplanung. In Einzelfällen konnte auf kurze Videoclips zurückgegriffen werden, Transkripte lagen aber noch nicht vor. Die Diskussionen bezogen sich auf spezifische, aktuelle Fragestellungen und hatten einen stark subjektiven Charakter, auch weil die Lehrkraft hier eher als Teilnehmerin denn als Beobachterin agierte.

4.1.2. Sampling

Der Auswahl der Fälle, also dem Sampling, kommt eine zentrale Bedeutung bezüglich der Reliabilität und der Generalisierbarkeit zu. Da es in dieser Arbeit um die weitere Erschließung eines Themas geht, zu dem es bereits einige Erkenntnisse und Hypothesen gibt, sollten diese bei der Auswahl des Untersuchungsfeldes und der zu untersuchenden Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden – ein Vorgehen, das Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014, S. 182 ff.) als „Sampling nach bestimmten, vorab festgelegten Kriterien“ betiteln, Kelle und Kluge (2010, S. 50-55) als einen „qualitativen Stichprobenplan“. Dabei wird „angestrebt, eine bestimmte Bandbreite von … Einflüssen zu erfassen, indem theoretisch relevante Merkmale in ausreichendem Umfang durch Einzelfälle vertreten sind“ (Kelle und Kluge, 2010, S. 55).

Auswahl des Untersuchungsfeldes

Dazu musste zunächst ein Untersuchungsfeld gefunden werden, in dem die Ausbildung algebraischen Struktursinns zu beobachten sein *könnte*. Für die Datenerhebung wurde eine achte Klasse ausgewählt, deren Lehrkraft bereit war, an einer längeren Studie mitzuwirken. Die Wahl fiel deshalb auf den achten Jahrgang, weil hier gleich mehrere Unterrichtsthemen angesiedelt sind, die den Schülerinnen und Schülern (teilweise erstmals) eine Konfrontation

Themenbereiche	**Inhalte** **alle**	 **nur E-Kurs**
Arithmetik und Algebra	Terme und Termumformungen	Lineare Gleichungen
Funktionale Zusammenhänge	Wertetabellen und Graphen, auch mit Computersoftware	Terme linearer Funktionen
	Proportionale und antiproportionale Zuordnungen	Lineare Funktionen, auch mit Tabellenkalkulation

Tabelle 4.1.: In der 7. und 8. Klasse auftretende Themen mit direktem Bezug zu algebraischen Strukturen in den einzelnen Themenbereichen; in den Themenbereichen Geometrie und Stochastik ist kein unmittelbarer Bezug zu algebraischen Strukturen angelegt (Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft, 2010, S. 10-12).

mit algebraischen Strukturen im engeren Sinne (also unter Verwendung symbolischer Notation) abverlangen. Der Bildungsplan für das Bundesland Bremen nennt zunächst allgemein den Umgang mit Variablen und linearen Strukturen als Schwerpunkte in der 7. und 8. Klasse (Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft, 2010, S. 6). Die Themen, die sich in einen Zusammenhang mit algebraischen Strukturen (konkret: mit Variablen, Termen und Gleichungen) bringen lassen und bis zum Ende der 8. Klasse behandelt sein sollten, sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

Daraus können drei übergreifende Unterrichtsthemen formuliert werden, denen dann die verbindlichen fachbezogenen Kompetenzen zuzuordnen sind, die bis zum Ende der 8. Klasse erworben sein sollen (Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft, 2010, S. 21 f.). In der folgenden Aufstellung sind diejenigen Bestandteile, die nur für die Schülerinnen und Schüler des E-Kurses[2] gelten, in runde Klammern gesetzt; Einschränkungen, die nur für Schülerinnen und Schüler des G-Kurses gelten, sind in eckige Klammern gesetzt.

- In Bezug auf *lineare Gleichungen*: Die Schülerinnen und Schüler …
  - beschreiben einfache inner- und außermathematische Zusammenhänge mit Variablen, Termen und Gleichungen
  - (lösen lineare Gleichungen durch Probieren, algebraisch und graphisch und überprüfen die Ergebnisse)
  - (verwenden ihre Kenntnisse über lineare Gleichungen zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme)

[2]Der Bildungsplan unterscheidet zwischen grundlegenden und erweiterten Anforderungen. „Die notwendigen Kompetenzen, die zur Erweiterten Berufsbildungsreife führen, werden in den grundlegenden Anforderungen festgelegt; die Kompetenzen, die für den Mittleren Schulabschluss bzw. für die Versetzung in die Gymnasiale Oberstufe gelten, sind in zusätzlichen bzw. erweiterten Anforderungen ausgewiesen" (Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft, 2010, S. 4). Dies führt an vielen Schulen dazu, dass die Schülerinnen und Schüler entsprechenden Kursen zugeordnet werden, die kurz G- und E-Kurs genannt werden.

- In Bezug auf *lineare Funktionen*: Die Schülerinnen und Schüler …
  - beschreiben einfache inner- und außermathematische Zusammenhänge mit Variablen, Termen und Gleichungen
  - erfassen einfache Beziehungen zwischen Größen durch Tabellenkalkulation und nutzen dies für Berechnungen
  - setzen Werte in Terme ein und berechnen diese
  - stellen funktionale Zusammenhänge in eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen (und in Termen) dar, (auch mit Computersoftware)
  - wechseln zwischen diesen Darstellungen (und benennen Vor-, Nachteile und Grenzen der einzelnen Darstellungsarten)
  - interpretieren Graphen (und Terme) linearer Funktionen
  - (interpretieren Schnittpunkte von Graphen linearer Funktionen – auch in Sachzusammenhängen)
  - erkunden lineare und nicht lineare funktionale Zusammenhänge
  - erkunden Eigenschaften linearer Funktionen – auch mit Computersoftware – und stellen Vermutungen auf
  - nutzen proportionale und antiproportionale, lineare und nicht lineare Funktionen zur Bearbeitung außer- und innermathematischer Problemstellungen – auch mit Computersoftware
- In Bezug auf *(quadratische) Terme*: Die Schülerinnen und Schüler …
  - beschreiben einfache inner- und außermathematische Zusammenhänge mit Variablen und Termen
  - setzen Werte in Terme ein und berechnen diese
  - fassen [einfache] Terme zusammen, (multiplizieren sie aus, faktorisieren sie und nutzen binomische Formeln)

Hinzu kommen prozessbezogenen Kompetenzen mit Bezug auf die drei Unterrichtsthemen, die in Tabelle 4.2 als Tätigkeiten angedeutet werden. Die detaillierteren diesbezüglichen Ausführungen des Bildungsplans (Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft, 2010, S. 19 f.) sollen hier nicht in Gänze wiedergegeben werden, wurden aber bei der Unterrichtsplanung berücksichtigt.

Es lässt sich resümieren, dass mit den drei Unterrichtsthemen ein guter Teil des Basiswissens abgedeckt wird, das im Rahmen der 12. ICMI-Studie von MacGregor (2004, S. 325 f.) identifiziert wurde. Neben den übergreifenden Forderungen, die wie in Abschnitt 1.3.1 bereits angemerkt auch einen Blick für Strukturen umfassen, werden von MacGregor ein Verständnis für die Beziehung zwischen Graphen und Funktionen, die Kenntnis der Eigenschaften linearer Funktionen und die Fähigkeit zur Verwendung verschiedener Darstellungsmittel zum Modellieren und Problemlösen angesprochen. Ihr letzter Punkt, dass

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhalte	
	alle	**nur E-Kurs**
Argumentieren und Kommunizieren	Informationen aus Graphen ziehen	
Problemlösen	Untersuchen von Mustern und Beziehungen	
Modellieren	Angeben von Realsituationen zu Tabellen, Graphen, Funktionen und umgekehrt	Aufstellen von Gleichungen zu Realsituationen
		Interpretieren von Tabellen, Graphen, Gleichungen in Realsituationen

Tabelle 4.2.: In der 7. und 8. Klasse zentrale Tätigkeiten mit direktem Bezug zu algebraischen Strukturen in den Prozessbezogenen Kompetenzen (Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft, 2010, S. 8 f.)

Schülerinnen und Schüler „the pleasure of doing mathematical experiments" (MacGregor, 2004, S. 326) erfahren sollen, findet in der konkreten Unterrichtsplanung Berücksichtigung.

Die drei Unterrichtseinheiten wurden gemeinsam mit der Lehrerin geplant und von ihr durchgeführt. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich jedoch in ihren Analysen auf die ersten beiden Unterrichtseinheiten, die sich mit linearen Gleichungen und linearen Funktionen beschäftigen. Hintergrund ist die Tatsache, dass der Umgang mit quadratischen Termen laut Bildungsplan nur von der Schülerinnen und Schülern des E-Kurses verlangt wird. Zudem bemerkt Leuders (2011), dass „die binomischen Formeln an dieser Stelle im Curriculum oft wie ein Fremdkörper daher[kommen], da ihr Nutzen, etwa bei der Lösung von Problemen im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen, sich für die Schülerinnen und Schüler noch nicht erschließt" (S. 58). Es ist insofern mit Hinblick auf den theoretischen Hintergrund fragwürdig, ob den Schülerinnen und Schülern ein Tätigkeitskontext geboten werden kann, der eine sinnvolle Annäherung an das Thema ermöglicht.

Auswahl der Schülerinnen und Schüler

Um die im Zentrum dieser Arbeit stehenden Lern- und Entwicklungsprozesse zu erfassen, wurden zwei Schülerpaare ausgewählt, die über den gesamten Erhebungszeitraum zusammen arbeiten sollten. Es wurde also eine Entscheidung für eine langfristige Begleitung spezifischer individueller Prozesse getroffen und damit gegen eine hohe Anzahl verschiedener zu beobachtener Schülerinnen und Schüler. Bei der Auswahl der so beobachteten Schülerinnen und Schüler wurde im Sinne einer „bewusst heterogenen Auswahl" (Kelle und Kluge, 2010, S. 52) darauf geachtet, dass jeweils mindestens eine_r

- weiblichen bzw. männlichen Geschlechts war,

- im G-Kurs bzw. im E-Kurs eingestuft war,
- sprachliche Auffälligkeiten zeigte,
- und über einen Migrationshintergrund[3] verfügte.

Beim Geschlecht handelt es sich um eines der beiden von Kelle und Kluge (2010, S. 51) benannten soziodemographischen Merkmale, die innerhalb einer Schulklasse variieren.[4] Die Betrachtung solcher Merkmale ist sinnvoll, weil sie „die sozialstrukturellen Handlungsmöglichkeiten abbilden, mit denen Akteure konfrontiert sind“ (Kelle und Kluge, 2010, S. 51). Die Einteilung in E- und G-Kurs strukturiert noch direkter die Möglichkeiten und Limitierungen der Schülerinnen und Schüler und musste daher berücksichtigt werden. Die Berücksichtigung sprachlicher Auffälligkeiten und des Migrationshintergrunds ergab sich aus den weiter oben dargestellten Forschungsergebnissen, nach denen sprachliche Probleme häufig unterdurchschnittliche Leistungen in der Algebra nach sich ziehen (siehe Abschnitt 1.4.3). Die sich insgesamt ergebene Auswahl der beobachteten Schülerinnen und Schüler ist in Tabelle 4.3 dargestellt.

Name	Geschlecht	Leistungsniveau	sonstige Merkmale
Ahmed	männlich	E-Kurs	
Herbert	männlich	E-Kurs	
Katie	weiblich	G-Kurs	Migrationshintergrund
Sabine	weiblich	E-Kurs	sprachlich auffällig

Tabelle 4.3.: Zusammensetzung der beobachteten Schülerinnen und Schüler[5]

4.1.3. Datenaufnahme

Leitende Maxime bei der Erhebung der Daten war es, die Unterrichtsplanung und die Realität des geplanten Unterrichts möglichst gut erfassen können und so für eine systematische Bearbeitung der Forschungsfragen in einer Weise nutzbar zu machen, die für jedermann nachvollziehbar ist (vgl. Cobb et al., 2003, S. 12).

[3]Dabei wurde der Definition des Statistischen Bundesamtes (2013) gefolgt, nach der ein Migrationshintergrund bei all jenen Personen vorliegt,

> die nach 1949 auf das heutige Gebiet der Bundesrepublik Deutschland zugezogen sind, sowie alle in Deutschland geborenen Ausländerinnen und Ausländer und alle in Deutschland als Deutsche Geborene mit zumindest einem Elternteil, der zugezogen ist oder der als Ausländerin bzw. Ausländer in Deutschland geboren wurde (S. 64).

[4]Das andere Merkmal wäre die Schichtzugehörigkeit. Sie ist allerdings deutlich schwieriger zu operationalisieren.

[5]Es wird hier bereits deutlich, dass bei der Anonymisierung die Erhaltung oder das Sichtbar-machen von Eigenschaften wie Migrationshintergrund/Autochthonie keine Rolle spielte. Eine genauere Erklärung und Rechtfertigung des angewendeten Vorgehens findet sich im folgenden Abschnitt.

Die wöchentlichen Treffen mit der Lehrkraft wurden wie von Cobb et al. (2003, S. 12) vorgeschlagen mit Hilfe von Audioaufnahmen und teilstandardisierten Mitschriften dokumentiert.

Da beide verwendeten Hintergrundtheorien den im Sozialen stattfindenden Handlungen eine große Bedeutung zuschreiben und die Beobachtung von Lernprozessen genau hier ansetzt, wurde eine Erhebung mit Videokameras durchgeführt. Dabei dienten zwei Kameras auf Stativen dazu, die beiden ausgewählten Schülerpaare frontal zu filmen. Zur besseren Verständlichkeit der Äußerungen dieser insgesamt vier Schülerinnen und Schüler wurden hochsensible Tischmikrofone eingesetzt, mit deren Hilfe sich die Äußerungen der Schülerinnen und Schüler auch unter den schwierigen akustischen Bedingungen des Klassenunterrichts noch in den meisten Fällen verstehen lassen. Mit einer weiteren Kamera wurde das allgemeine Unterrichtsgeschehen dokumentiert. Sie befand sich stets im hinteren Bereich der Klasse und wurde vom Forscher nachgeführt, wenn sich das Geschehen örtlich verlagerte. In Arbeitsphasen wurde diese Kamera darüber hinaus genutzt, spontan interessant erscheinende Interaktionen aufzunehmen.

Damit liegen für viele Situationen doppelte Daten vor, die garantieren, dass auch nach Abschluss der Studie „rigorous, empirically grounded claims und assertions“ (Cobb et al., 2003, S. 12) möglich sind. Da die Videoaufzeichnungen nur eine verhältnismäßig geringe Auflösung (720 × 576 Pixel) aufweisen und damit die Arbeitsmaterialien der Schülerinnen und Schüler nicht immer im Bild erkennbar sind, wurden zudem die Mappen und sonstige Arbeitsprodukte zu geeigneten Zeitpunkten eingesammelt und gescannt beziehungsweise fotografiert. Desweiteren war der Forscher in der Klasse präsent und nahm Feldnotizen auf.

Zusätzlich zu den Videoaufnahmen wurden im Unterricht Fotos der erstellten Tafelbilder, Wandcollagen und Poster gemacht. In Einzelfällen wurden auch die Settings auf den Tischen der Schülerinnen und Schüler fotografiert. Diese Bilddaten ergänzen die anderen Daten; mit ihnen können teilweise Zeigegesten aus den Videos plausibilisiert werden, und auch die Entstehung bestimmter Schreibweisen ist aus diesen Daten nachvollziehbar. Sie werden für sich genommen aber keiner Analyse unterworfen.

Alle die Schülerinnen und Schüler betreffenden Daten wurden anonymisiert. Sie wurden zu diesem Zweck aufgefordert, Pseudonyme zu wählen. Ziel war es, die Identität für Dritte zwar zu verschleiern, ohne sie den Schülerinnen und Schülern zu nehmen. Sie selbst werden in der Lage sein, sich in dieser Arbeit wiederzuerkennen und ihren spezifischen Anteil daran wahrzunehmen (vgl. Kramer, 2003). Vorgabe bei der Auswahl der Pseudonyme war lediglich, keine tatsächlich in der Klasse vorhandenen Namen zu wählen. Ansonsten gab es keinerlei Beschränkungen, insbesondere waren die gegebenen Eigenschaften des eigentlichen Namens (Geschlecht, ethnische und/oder religiöse Zugehörigkeit, Anfangsbuchstabe etc.) nicht bindend. Schlüsse von einem vermeintlich deutschen oder türkischen Namen auf den ethnischen Hintergrund der betreffenden Schülerin sind daher nicht möglich, auch andere soziale Stigmata und Stereotypen, die mit Vornamen zusammenhängen, wurden durch die spezifische Wahl der Schülerinnen und Schüler verwischt.[6] Da es in dieser Studie nicht um die Bedeutung der Herkunft geht, sind diese Abstraktionen durchaus willkommen.

Ein Überblick über die letztlich erhobenen und für die Analysen nutzbaren Daten findet sich in Anhang B.

[6] Sämtliche Schülerinnen und Schüler hielten sich jedoch bei der Namenswahl an ihr biologisches Geschlecht.

4.2. Begründende Beschreibung der Unterrichtsdesigns

Die Unterrichtsdesigns waren gemäß des oben beschriebenen theoretischen Hintergrunds – hierbei vor allem den Annahmen der Theory of Objectification (vgl. Abschnitt 2.2) – so aufgebaut, dass ihr mathematischer Inhalt in einem Tätigkeitskontext erlernt werden sollte. Idee war es, dass den Schülerinnen und Schülern sofort ein plausibles Tätigkeitsmotiv zu vermitteln sein sollte, aus der nichtmathematischen Tätigkeit dann aber in einem Prozess von Objectification und Subjectification ein mathematisches Motiv erkannt werden würde, die Tätigkeit somit zu einer mathematischen Tätigkeit werden würde. Für das Design bedeutete dies, dass passend zu den gewählten mathematischen Inhalten Tätigkeitskontexte gefunden werden mussten, die einerseits an sich für Schülerinnen und Schüler der achten Klasse interessant sein können, andererseits das Potenzial einer mathematischen Sicht enthalten. Daher wird im Folgenden zu jedem der beiden behandelten Themenkomplexe zunächst dargestellt, wie die mathematische Struktur und die damit verbundene Tätigkeit a priori gedacht wurde. Darauf aufbauend wird dann erklärt, welche außermathematische Tätigkeit gewählt wurde, um die Schülerinnen und Schüler an die mathematische Struktur heranzuführen. Zudem werden besondere Designideen in ihrer Zielsetzung erklärt. Am Ende jeder Darstellung steht eine kurze Beschreibung des tatsächlichen Verlaufs der Unterrichtseinheit und bei den ersten Einheit eine Wiedergabe der Schlüsse, die daraus in Bezug auf die nächste Unterrichtseinheit gezogen wurden. Die Aufgabenstellungen, auf die in den Beschreibungen eingegangen wird, finden sich in Anhang A.

4.2.1. Lineare Gleichungen

Mit linearen Gleichungen sind Polynomgleichungen ersten Grades in einer Variable gemeint, die auf einer Grundmenge $\mathbb{M}$ definiert sind. In der Schule liegt der Schwerpunkt in der Regel auf Gleichungen, die genau eine Lösung haben – so auch in dem Lehrwerk, das in der untersuchten Klasse verwendet wurde (Böer et al., 2008). Die Lösung einer solchen Gleichung lässt sich bei geeigneten Werten durch Probieren finden, das Standardverfahren besteht aber darin, gleichartige Terme zusammenzufassen und die Gleichung durch Äquivalenzumformungen in die Form zu bringen, in der auf der einen Seite der Gleichung die Variable steht, sodass auf der anderen ihr Wert abgelesen werden kann (vgl. Hoch, 2007, S. 24).

Problematisch an dieser Definition ist nun, dass die Begriffe *Gleichung* und *Äquivalenzumformung* als bekannt vorausgesetzt werden. Da lineare Gleichungen aber die ersten Gleichungen sind, die mit dem Ziel eingeführt werden, systematische Lösungsverfahren anzuwenden, ist davon nicht unbedingt auszugehen. Es muss erst gelernt werden, dass das *Gleichheitszeichen* nun nicht mehr als Operationszeichen, als Rechenaufforderung zu verstehen ist (vgl. Prediger, 2007). Es signalisiert hier vielmehr eine Bedingung, die erfüllt werden soll: Bei Einsetzen des Lösungswertes für die Variable erhält man eine wahre Aussage, also auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens den gleichen Zahlenwert. Diese Gleichheit kann beim Umformen erhalten werden, wenn auf die Terme auf beiden Seiten der Gleichung stets die gleichen Rechenoperationen (konkret die Addition und Subtraktion von reellen Zahlen und Variablentermen sowie die Multiplikation und Division mit reellen, von 0 verschiedenen Zahlen[7]) angewendet werden. Bei der Durchführung solcher *Äquivalenzumformungen* muss den Schülerinnen und Schülern klar sein, dass *Skalarterme* und *Variablenterme* getrennt zu betrachten sind. Die von Hoch (2007) genutzte allgemeine Formel oder Standard-Formel beschreibt die minimale Form einer linearen Gleichung mit genau einer Lösung. In ihm lassen sich die beiden Kernbestandteile der Struktur klar zuordnen:

$$\underbrace{a \cdot x}_{\text{Variablenterm}} + \underbrace{b}_{\text{Skalarterm}} = 0, x \in \mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}, \text{ feste } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Komplexere lineare Gleichungen können (auch mehrere) Skalar- und Variablenterme auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen aufweisen, lassen sich durch Äquivalenzumformungen aber stets in die dargestellte Form überführen, sofern sie eindeutig lösbar sind.[8]

Streichholzschachtelgleichungen

Lineare Gleichungen mit Lösungen aus $\mathbb{N}$ lassen sich als Rätsel darstellen, die folgendermaßen gestellt werden können: Wir unterteilen die Tischfläche in zwei Seiten. Auf beiden Seiten liegt die gleiche Anzahl an Streichhölzern, doch nicht alle sind sichtbar. Zusätzlich zu den losen Streichhölzern liegen auf dem Tisch nämlich auch Streichholzschachteln, die alle die gleiche Anzahl an Streichhölzern enthalten. Die Frage ist nun, wie viele Streichhölzer die Schachteln jeweils enthalten.[9].

Solche *Streichholzschachtelgleichungen* sind allerdings nicht geeignet, Gleichungen zu repräsentieren, in denen nichtnatürliche oder auch nur große Zahlen vorkommen. In gewissem Maße wären Anpassungen möglich (Zerteilen der Streichhölzer, größere Schachteln mit mehr Platz), doch spätestens bei negativen Anzahlen stoßen solche Anpassungen an ihre Grenzen. Die Schulbücher *mathbu.ch*, *Mathematikbuch* und *mathe live* lösen dies so, dass sie an den Streichholzschachtelgleichungen lediglich das Prinzip erklären, dann die Formelsprache einführen und damit üben lassen. In der Studie wurde stattdessen die Idee verfolgt, nichtnatürliche und große Zahlen in das vorhandene Schema einzuführen und so dem handelnden Lernen zugänglich zu machen, indem den Schülerinnen und Schüler nach einiger Zeit anstelle der Streichhölzer Karten zur Verfügung gestellt wurden, auf die beliebige Werte geschrieben werden können. Die Anwendung dieses Vorgehens bedeutete, dass lange Zeit ausschließlich mit Streichholzschachtelgleichungen gearbeitet wurde. Zugrunde lag der Gedanke, dass sich die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise intensiv mit der Struktur auseinandersetzen und ihre Aufmerksamkeit ganz auf diese richten könnten, statt

[7]Die Multiplikation und Division mit Variablentermen kann zu einer Veränderung der Lösungsmenge führen, tritt im Unterricht aber in der Regel ohnehin nicht auf, zum einen, weil man damit einer Lösung nicht näher kommt, zum anderen weil damit das Gebiet der linearen Gleichungen verlassen werden würde.

[8]Für nicht lösbare Gleichungen ist $a = 0$ und $b \neq 0$, man käme also auf die falsche Aussage $b = 0$; wenn beide Koeffizienten 0 sind, die Gleichung sich also durch Äquivalenzumformungen in die Aussage $0 = 0$ überführen lässt, ist die Gleichung für alle Elemente der Grundmenge erfüllt.

[9]Das in der untersuchten Klasse verwendete Schulbuch *mathe live* (Böer et al., 2008, S. 23-36) bedient sich dieses Ansatzes. Er wurde im deutschsprachigen Raum scheinbar durch das *mathbu.ch* (Affolter et al., 2003) eingeführt, lässt sich aber in ähnlicher Form schon deutlich früher nachweisen (Radford und Grenier, 1996)

sich in immer neue Anwendungskontexte einarbeiten zu müssen (Swafford und Langrall, 2000, S. 108 f.). Der Schritt hin zu einer rein symbolischen Sprache ist jedoch nicht zu unterschätzen und verdient besondere Aufmerksamkeit.

Strukturgleiche Gleichungen

Bereits bei der Einführung, dann aber auch bei den Übergängen zu Gleichungen mit nichtnatürlichen Lösungen sowie bei der Einführung der symbolischen Schreibweise wurde mit *strukturgleichen Gleichungen* gearbeitet. Gemeint sind damit solche Gleichungen, die sich in ihrer algebraischen Struktur gleichen und somit die gleichen strukturierenden Tätigkeiten erfordern. Der Einsatz strukturgleicher Gleichungen bietet sich an, um Neues zu lernen, ermöglicht aber auch Binnendifferenzierung beim Üben (Leuders, 2009). Sie können sich nämlich hinsichtlich ihrer Komplexität unterscheiden, etwa indem bei einer Aufgabe mehr sortiert werden muss als bei einer anderen, mit größeren oder schwierigeren (Primzahlen, Zehnerübergang) Zahlen operiert werden muss oder ein Problem auftritt, dass vorher nicht bestand (zum Beispiel nichtnatürliche Werte für die Unbekannten). So sollen alle Schülerinnen und Schüler an für sie angemessenen Aufgaben arbeiten können, gleichzeitig gibt es aber ein gemeinsames Thema in der Klasse.

Strukturieren durch Unterstreichen

Vor allem in Hinblick auf den späteren Umgang mit komplizierteren Termen erschien es sinnvoll, schon bei den recht übersichtlichen linearen Gleichungen Strategien zur Strukturierung bereitzustellen. Insbesondere wurde als hilfreich erachtet, die einzelnen Teilterme zu unterstreichen. Dieses Vorgehen wurde vorbereitet durch die Aufforderung an die Schülerinnen und Schüler, schon bei den Streichholzschachtelgleichungen zu strukturieren.

Einpacken und Auspacken

Zum Üben wurde das Spiel *Einpacken und Auspacken* eingeplant. Eine Schülerin oder ein Schüler konstruiert von der ihr bekannten Lösung (z. B. $x = 3$) her eine möglichst komplizierte Gleichung, die ein anderer oder eine andere dann lösen muss (Malle, 1993, 257 f.; Stacey, 2011, S. 11 f.). So kann a) die Idee der Äquivalenzumformung unterstützt werden, b) der Umgang mit Gleichungen flexibilisiert und so c) ihre Nutzung für die Lösung von Anwendungsproblemen vorbereitet werden.

Anwendungsaufgaben

In der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen wurde angenommen, dass Anwendungsaufgaben keine große Hürde mehr darstellen würden, wenn die Struktur den Schülerinnen und Schülern erst einmal klar sei. Sie wurden daher lange zurückgestellt und dann anhand von Aufgaben eingeführt, die in verschiedener Weise die Modellierung mit linearen Gleichungen als Mathematisierungsmuster erforderten. Die Klasse wurde in Gruppen aufgeteilt, die jeweils eine von vier Aufgaben bearbeiten sollte. Es wurde davon ausgegangen, dass den Schülerinnen und Schülern diese Modellierungen nicht vollumfänglich gelingen würden, ihnen aber anhand einer Musterlösung und durch den Vergleich mit den drei anderen Aufgaben klar werden könne, wie lineare Gleichungen zum Lösen von Anwendungsaufgaben genutzt werden können.

Überblick über den Verlauf und Folgerungen für die nachfolgende Unterrichtseinheit

Die Arbeit mit den erkundenden Aufgaben, anhand derer die Schülerinnen und Schüler ein Lösungsverfahren für Streichholzschachtelgleichungen finden sollten, war für die Lehrerin relativ mühsam, weil viele Fragen auftraten. In mehreren Gruppen schauten die Schülerinnen und Schüler in die Schachteln oder kamen durch Raten auf die richtige Lösung, für die sie dann im Nachhinein eine Begründung suchten. Diese Begründung bestand dann darin, dass die Gleichung aufging, sodass das Finden einer Lösungsstrategie sich erübrigte. Es schien, dass die Anforderungen des gestellten Rätsels nicht klar genug waren, gleichzeitig zeigten sich viele Schülerinnen und Schüler schnell frustriert und demotiviert von der Tatsache, dass sie selbst nach Hinweisen zu keiner Lösung kamen. Die Ergebnisse, die letztlich erzielt wurden, waren aber zufriedenstellend: Es wurde in einer Weise über Gleichungen geredet, die ihre Struktur hervorstellte. Die Äquivalenzumformungen, die durchzuführen waren, um die Gleichungen in die Form „Variablenterm = Skalarterm“ zu überführen, wurden von einem Teil der Schülerinnen und Schüler zunehmend sicher ausgeführt. Andere stießen bei fast jeder neuen Gleichung auf Probleme. Dies beschränkte sich nicht auf diejenigen Fälle, bei denen laut Planung etwas Neues dazukam, wie die Darstellung der Gleichungen in alphanumerischer Schreibweise oder die Möglichkeit negativer oder nicht-ganzzahliger Lösungen. *Jede* Gleichung schien für diese Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung zu sein. In der ganzen Klasse jedoch wurde die Division, die auszuführen ist, um auf den Wert der Variablen zu kommen, nicht als Äquivalenzumformung aufgebaut, sondern als ein „Verrechnen der einen Seite mit der anderen“. Die Lehrerin selbst problematisierte diese Interpretation nicht.

Das Spiel Einpacken und Auspacken scheiterte im ersten Anlauf am Aufgabenverständnis und Engagement der Schülerinnen und Schüler. Im zweiten Durchlauf zeigten sich sehr unterschiedliche Ergebnisse: Während einige Schülerinnen und Schüler sehr aufwändige Gleichungen konstruierten, beschränkten sich andere auf ein Minimum.

Durchgehend zeigten sich deutliche Probleme in der Arithmetik bei fast allen Schülerinnen und Schülern, insbesondere im Umgang mit negativen Zahlen und Brüchen.

In der nachgelagerten Einführung von Anwendungsaufgaben zeigte sich, dass die starke Ausrichtung auf die Entwicklung der algebraischen Struktur, ausschließlich verstanden als symbolisch-algebraische Struktur, den Schülerinnen und Schülern nicht wie erhofft ermöglichte, die Struktur außermathematisch anzuwenden. Vielen Schülerinnen und Schülern wurde von Anfang an nicht klar, warum man überhaupt mit Gleichungen arbeiten sollte; sie arbeiteten probierend oder repräsentierten die gegebenen Probleme sofort so, dass sie sich arithmetisch lösen ließen. Zudem wurde den Lösungen der anderen Gruppen nur wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Die Präsentationen waren teilweise unmotiviert, einige Kinder waren damit überfordert das darzustellen, was ihre Gruppe erarbeitet hatte. Hierbei spielten die Musterlösungen eine kritische Rolle: Sie wurden unmittelbar übernommen, ein

Verständnis für sie entstand dabei nicht immer. Es wurde deutlich, dass bei der Planung implizit ein Anwendungsverständnis zugrunde gelegen hatte, in dem eine verstandene Struktur wie ein Computerprogramm mit Daten gefüttert werden könne, es dabei also nur noch um die Ausführung ginge. Diese implizite Annahme wurde dem Forscher und der Lehrerin erst im Verlauf des letzten Teils der ersten Unterrichtseinheit deutlich. Die kulturhistorische Tätigkeitstheorie half dabei, eine alternative Denkweise zu entwickeln, die in der nächsten Unterrichtseinheit berücksichtigt werden sollte: Jegliche Anwendung müsste als Teil des Umgangs mit der algebraischen Struktur verstanden werden. Es wären also Tätigkeiten erforderlich, die Anwendungen von Anfang an mit einbeziehen.

In der abschließenden Übungsphase wurde deutlich, dass nur ein kleiner Anteil der Schülerinnen und Schüler alle erwarteten Lernschritte vollzogen hatten. Diejenigen, die schon mit dem Lösen linearer Gleichungen Probleme hatten, wurden mit der Einführung von Anwendungsaufgaben komplett abgehängt. Die anderen, die die symbolisch repräsentierten Gleichungen sicher lösen konnten, konnten mit unterschiedlichem Erfolg mit den Anwendungsaufgaben umgehen. Einen intuitiven Zugang beim *Aufstellen der Gleichungen* eigneten sich die wenigsten Schülerinnen und Schüler an. Hier schien der Verweis auf die Streichholzschachtelgleichungen nur wenig zu helfen.

4.2.2. Lineare Funktionen

In der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen wurde stärker als in der vorherigen Unterrichtseinheit auf das Verfahren der a priori-Analyse zurückgegriffen. Durch die unterschiedlichen Inhalte ist wirkliche Vergleichbarkeit nicht gegeben, doch insgesamt erfolgte eine stärkere Durchdringung des mathematischen Stoffs, auch durch die Lehrerin.

Zusammenfassung der a priori-Analyse

Mit linearen Funktionen werden in der Schulmathematik Polynomfunktionen ersten Grades bezeichnet.[10] Der Funktionsterm einer linearen Funktion entspricht also seiner äußeren Form nach der linken Seite der oben dargestellten Standardform einer linearen Gleichung. Hier wird nun aber die Variable nicht als *Unbekannte* (Malle, 1993, S. 46 f.), sondern als innerhalb eines Definitionsbereichs $\mathbb{D}_f$ *Veränderliche* aufgefasst (Malle, 1993, S. 80). Dies führt zu einer Veränderlichkeit des anhand des *Funktionsterms* bestimmbaren *Funktionswertes* $f(x)$:[11]

[10] Sie sind damit im Allgemeinen keine linearen Abbildungen im Sinne der Hochschulmathematik, sondern affine Abbildungen.

[11] Im deutschen Mathematikunterricht steht in der Regel zunächst der Zuordnungscharakter der linearen Funktionen im Vordergrund und es wird folglich von *linearen Zuordnungen* gesprochen. Auch das in der beobachteten Klasse verwendete Schulbuch (Böer et al., 2008) verwendet diesen Begriff (S. 130-138). In dieser Herangehensweise treten Überlegungen zum Definitions- und Wertebereich in den Hintergrund. Der Funktionsterm steht isoliert für sich, seine Rolle wird allenfalls durch eine vorherige Beschreibung genauer benannt, im verwendeten Lehrwerk beispielsweise „Wasserhöhe in m nach Tagen (t)“ (S. 134). In der durchgeführten Unterrichtseinheit wurde sich im Großen und Ganzen an diese Konvention gehalten, während in der vorliegenden Arbeit allgemeiner von linearen Funktionen und ihrer Struktur die Rede ist, die ja letztlich auch der durchgeführten Unterrichtseinheit zugrunde lag.

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funktionswert}} = \underbrace{a \cdot x}_{\text{Variablenterm}} + \underbrace{b}_{\text{Skalarterm}}, x \in \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}, \text{ feste } a, b \in \mathbb{R}$$

Der Variablenterm enthält als Faktor die Steigung. Sie lässt sich als den Zuwachs des Funktionswertes bei Erhöhung der Variablen um 1 deuten. Anschaulich fassbar wird sie aber vor allem in der Darstellung der Funktion als *Graph*. Dieser ist bei linearen Funktionen stets eine Gerade. Die Steigung lässt sich dort anhand von *Steigungsdreiecken* ermitteln. Diese sind zueinander ähnlich, und bei Division der Änderung in y-Richtung durch die Änderung in x-Richtung ergibt sich wieder die Steigung. Der Funktionswert für $x = 0$ entspricht b aus der oben dargestellten Gleichung, es gibt somit den Anfangswert bzw. y-Achsenabschnitt an.[12]

Damit sind die beiden bei linearen Funktionen immer wiederkehrenden Elemente benannt: Der *Anfangswert* und die *Steigung*, die ein *gleichmäßiges Zu- oder Abnehmen* beschreibt. Sie lassen sich wiederfinden, wenn lineare Funktionen in *Wertetabellen* oder *verbal* beschrieben werden. Letzteres bedeutet insbesondere, dass sich die algebraische Struktur der linearen Funktion auch in Anwendungskontexten nachweisen lässt, die sich (in Näherung) entsprechend beschreiben lassen.

Rückgriff auf Erfahrungen aus der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen

Hier floss die oben beschriebene Folgerung aus der ersten Unterrichtseinheit ein, dass Anwendungen als Teil des Umgangs mit der algebraischen Struktur verstanden werden. Es wurde nun also nicht mehr davon ausgegangen, dass den Schülerinnen und Schülern *eine* ihnen unmittelbar zugängliche Tätigkeit angeboten werden müsse, um ihnen den Einstieg in die mathematische Tätigkeit zu bieten. Vielmehr wurde diese Einstiegstätigkeit als eine erste Anwendung der Struktur aufgefasst, denen weitere gegenübergestellt werden müssten, um die Struktur auch in den Anwendungen entdecken zu können. Es wurde also durchgehend mit Aufgaben gearbeitet, die sich in Analogie zu den oben beschriebenen strukturgleichen Gleichungen als *strukturgleiche Anwendungen* bezeichnen lassen: Den Ausgangspunkt bildete das gleichmäßige Befüllen von Gefäßen, die Schülerinnen und Schüler waren aber gleichzeitig aufgefordert, andere passende und unpassende Kontexte zu bedenken.

Ein alternativer Zugang hätte darin bestanden, proportionale Funktionen als bekannt anzunehmen und ihre Besonderheit – den Anfangswert 0 – hervorzustellen und aufzulösen. Dies hätte allerdings die Herausforderung mit sich gebracht, die Schülerinnen und Schüler an eine Struktur zu erinnern, deren Merkmale teilweise deutlich von der neuen Struktur abweichen (Anfangswert immer 0/Graph geht immer durch den Ursprung, Vervielfachung der unabhängigen Variable führt zu Vervielfachung der abhängigen Variable). Eine Verankerung in Anwendungskontexten, in denen die neue Struktur mit ihren neuen Merkmalen klar hervortreten würde, schien angebracht.

[12] Gerade anhand der Darstellung im Koordinatensystem wird offensichtlich, dass es durchaus Werte geben kann, die kleiner als der Anfangswert sind. *Bezugswert* wäre also im Allgemeinen ein passenderer Begriff. In der Unterrichtseinheit wurden die Funktionen allerdings nur in Ausnahmefällen auch für negative x betrachtet.

Befüllen von Gefäßen als Zugang

Ausgangspunkt war das gleichmäßige Befüllen von Gefäßen, zu denen verschiedene Aufgaben gestellt wurden. Diese waren mit einigen Darstellungsformen leichter zu verfolgen als mit anderen. Ein Wechsel sollte durch verschiedene Handlungsziele angeregt werden. Dies sollte dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler ein übergeordnetes Motiv für einen Teil der möglichen Gefäße (nämlich die mit überall gleichem Querschnitt) entdecken: Die behandelten Zusammenhänge sind strukturell gleich, bei allen lässt sich ein gleichmäßiges Wachstum feststellen. Wenn man dies verstanden hat, werden die einzelnen, auf unterschiedliche Ziele ausgerichteten Handlungen Teil einer übergeordneten Tätigkeit, nämlich dem Umgang mit linearen Funktionen.

Getrennte Einführung des Begriffs *Steigung*

Die Unterrichtseinheit wurde ausgehend von der Annahme geplant, dass der Steigungsbegriff bereits bekannt sei. Die Lehrerin gab jedoch zu bedenken, dass (trotz der Behandlung proportionaler Funktionen im 7. Schuljahr) davon nicht auszugehen sei. Eine Integration der zusätzlichen Begriffsbildung in den Lernprozess zu linearen Gleichungen wäre zwar möglich gewesen, hätte aber den Fokus weg von den Strukturen verschoben, die Kern dieser Untersuchung sind. Daher wurde entschieden, die Unterrichtseinheit mit einer Kurzeinheit zum Steigungsbegriff zu beginnen, in der Steigungen und Steigungsdreiecke anhand von Treppen eingeführt wurden.

Geplanter Verlauf der weiteren Unterrichtseinheit

Eine Annahme, die implizit schon in der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen gemacht wurde, bestand darin, dass das Verständnis für eine algebraische Struktur nur durch Konfrontation mit ihr in verschiedenen Situationen möglich ist – dies war genau der Leitgedanke hinter den strukturgleichen Gleichungen. In den Unterrichtsaktivitäten und Aufgabenblättern zu linearen Funktionen wurde dieses Prinzip noch deutlicher umgesetzt und immer mindestens zwei Sichtweisen miteinander verbunden.

Die Aufgabenblätter 2a und 2b sollten die kontextuelle Beschreibung eines praktisch erfahrenen linearen Zusammenhangs mit ihrer Erfassung in Wertetabellen verbinden. In der kontextuellen Beschreibung des schrittweisen Befüllens verschiedener zylindrischer Bechergläser durch Schülerpaare sollten die folgenden strukturellen Merkmale in den Fokus gerückt werden:

- Es wird in jedem Füllvorgang die gleiche Menge an Wasser hinzugefügt. Aufgrund der Form des Gefäßes führt dies zu einem gleichmäßigen Anstieg des Wasserstandes bei jedem Füllvorgang.
- Es lässt sich stets ein Anfangsfüllstand benennen, dieser kann allerdings auch 0 sein.

In den Wertetabellen lassen sich weitere Werte zunächst schrittweise, also additiv bestimmen. Die Gleichheit der Füllvorgänge (in der Praxis gewährleistet durch das Abmessen mit einem Zufüllgefäß) erlaubt die Zusammenfassung mehrerer Füllvorgänge durch Multiplikation.[13] Letztgenannte Eigenschaft ermöglicht auch die komprimierte Darstellung der Berechnung des Füllstands für beliebige Anzahlen von Füllvorgängen durch Terme. Diese verfügen nun in sich über eine bestimmte Struktur, die im Vergleich zwischen verschiedenen Termen deutlich wird: Sie setzen sich stets aus dem x-fachen des Zuwachses pro Füllvorgang und dem Anfangsfüllstand zusammen.

An dieser Stelle wurde nun in Aufgabenblatt 3 und 4 untersucht, wie eine Änderung der kontextuellen Beschreibung sich auswirkt. Zum einen sollte dabei erkannt werden, dass sich nicht nur Wasserstände so beschreiben lassen. Die allgemeineren Begriffe Zuwachs und Anfangswert sollten es ermöglichen, die strukturelle Gleichheit der Kontexte zu erfassen, und sie in die Struktur der Wertetabellen und Terme zu übersetzen (es änderte sich lediglich die Beschriftung). Zum anderen lassen sich auch Funktionen mit negativer Steigung als strukturgleich auffassen, wenn man nicht mehr von Zuwachs, sondern von Veränderung spricht. Alle bisher erkannten strukturellen Merkmale bezüglich der verschiedenen Darstellungsformen blieben erhalten.

In Aufgabenblatt 5 wurde der Blick dann auf Graphen als Darstellung linearer Funktionen zweier kontinuierlich veränderter Größen gelenkt. Wie zuvor sollte hier eine gleichmäßige Veränderung zu erkennen sein — die Graphen linearer Funktionen sind daher stets Geraden. Die Veränderung lässt sich wie zuvor bei den Termen zahlenmäßig beschreiben (jetzt allerdings nicht mehr als die Veränderung pro Vorgang, sondern pro Einheit), diese Zahl kann hier als Steigung erfasst werden. Der y-Achsenabschnitt entspricht dem Startwert aus der kontextuellen Beschreibung und der Konstanten in der Termdarstellung.

Die Schülerinnen und Schüler des E-Kurses sollen laut Bildungsplan auch mit Verfahren der Schnittpunktberechnung vertraut werden. Dabei handelt es sich aus Sicht der Fragestellung dieser Arbeit um einen besonders interessanten Zusammenhang: Schnittpunkte lassen sich berechnen, indem die Gleichung gelöst wird, die man durch Gleichsetzen der Funktionsterme erhält. Bei linearen Funktionen ergibt sich eine lineare Gleichung. Dies mussten die Schülerinnen und Schüler erkennen und hatten somit Gelegenheit zu zeigen, inwiefern und in welcher Weise sie das Wissen aus der ersten Unterrichtseinheit (nach einem längeren Zeitraum) anwenden konnten. Andererseits wurde es wieder zum Gegenstand eines Lernprozesses: Eine Vorstellung zu linearen Gleichungen wurde „nachträglich“ aufgebaut, dass nämlich die Lösung einer linearen Gleichung als Schnittstelle zweier linearer Funktionen aufgefasst werden kann (Haug und Holzäpfel, 2011, S. 23).

Am Ende der Unterrichtseinheit wurden zur Sicherung der Erkenntnisse zwei weitere Aktivitäten geplant: Um den Zusammenhang zwischen den Parametern im Zuordnungsterm und der Gestalt des Graphen im Koordinatensystems zu festigen, sollten die Schülerinnen und Schüler in einem Gedankenexperiment mutmaßen, wie sich ein gegebener Graph bei den Veränderungen der jeweiligen Parameter verhalten würde. Die Vermutungen wurden dann anhand einer interaktiven Lernumgebung überprüft. Der Zusammenhang der Darstellungsformen wurde nochmals betont, indem in einer weiteren Unterrichtsstunde die Schülerinnen und Schüler des G-Kurses in einer gegebenen Darstellungsform (Term,

[13] Hier wird auf die Vorstellung der Multiplikation als wiederholte Addition gleicher Summanden (Padberg und Benz, 2011, S. 127 f.) zurückgegriffen.

Graph, verbale Beschreibung eines Anwendungskontextes) benennen sollten, inwiefern sich Steigung und Anfangswert dort erkennen lassen. Die Schülerinnen und Schüler des E-Kurses beschrieben parallel, was der Schnittpunkt in den jeweiligen Darstellungsformen bedeutet. Sämtliche Ergebnisse wurden an der Rückwand der Klasse in einer Tabelle zusammengefügt und sollten so während der anschließenden Übungsphase vor der Klassenarbeit als Gedächtnisstütze dienen.

Überblick über den Verlauf

In der Einführung des Begriffs der Steigung waren die Schülerinnen und Schüler durchaus involviert und es gab Anzeichen dafür, dass die grundlegende Idee der Steigungsbestimmung deutlich wurde. Die Aufgabe, wie man aus den gemessenen Werten für die Stufentiefe und die Stufenhöhe ein Maß für die Steigung konstruieren könne, lief aber auf ein Raten hinaus. Somit blieb die Rechnung „Stufenhöhe : Stufentiefe“ willkürlich und war in der Folge immer wieder Gegenstand von Nachfragen.

Das eigentliche Befüllen der Gefäße wurde erwartungsgemäß durchgeführt und die Messungen waren im Allgemeinen zufriedenstellend. Die meisten Gruppen bemerkten schon währenddessen, dass die Zuwächse theoretisch stets die gleichen sein müssten und erkannten so eines der angelegten Merkmale der Struktur. Die verbale Beschreibung der Füllprozesse war aber dennoch problematisch. Häufig war schon die Fragestellung unklar. Die Lehrerin und der Forscher mussten die intendierte Struktur hervorstellen, sie war aber allen nachvollziehbar. Dies ließ sich erkennen an geeigneten Beschreibungen anderer linearer Zusammenhänge und einer Verinnerlichung der tragenden Begriffe.

Das Ausfüllen von Wertetabellen linearer Zusammenhänge gelang in der Folge meistens gut. Als Fehlannahme trat dabei häufig auf, dass eine Vervielfachung der unabhängigen Variable zu einer gleichen Vervielfachung der abhängigen Variable führen müsse, wie es bei proportionalen Zuordnungen der Fall ist. Durch Hervorstellung des Anfangswertes war den Schülerinnen und Schülern ihr Irrtum aber schnell deutlich. Die meisten Schülerinnen und Schüler konnten begründet den Term aus gegebenen Merkmalen einer Entwicklung herleiten und andererseits mit dem Term Funktionswerte bestimmen.

Mit der stetigen Entwicklung wurden auch Graphen als Darstellungsmittel eingeführt. Hier zeigen sich Probleme im Umgang mit der Steigung: Diese waren teilweise eher technischer Art (Wo sollte man das Steigungsdreieck einzeichnen?), verwiesen aber teilweise auch auf grundlegendere Schwierigkeiten (Wie kann man auf Werte kommen, wenn sie nicht direkt ablesbar sind?). Hier waren sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehrerin weniger flexibel als erhofft. Die Steigung erfuhr eine Verengung auf die Steigungsdreiecke, es wurde oftmals vergessen, dass sie auch in den Funktionstermen, in den Wertetabellen oder in den verbalen Beschreibungen der realen Zusammenhänge gefunden werden konnte.

Die Einführung der Definition linearer Funktionen führte weder bei den Schülerinnen und Schülern noch bei der Lehrerin zu einer höheren Präzision im Diskurs über lineare Funktionen. Immer wieder kam es zu sehr ungenauen Sprechweisen, Fachbegriffe (beispielsweise die Bezeichnungen der Achsen des Koordinatensystems, „Variable“, „Wert“) wurden insgesamt gemieden. Darunter litt auch die Unterhaltung, die über die Veränderung der

Graphen unter Veränderung der Parameter geführt werden sollte, ebenso die Erstellung der Tabelle, die die Ergebnisse sichern sollte. Hier gelang es den Schülerinnen und Schülern zwar jeweils, die strukturellen Merkmale (Steigung, Anfangswert) in den jeweiligen Darstellungen zu identifizieren, es wurde dabei aber stets unzureichend zwischen den konkret vorliegenden Zahlen und Buchstaben und ihrer strukturellen Rolle unterschieden.

Die Ermittlung von Schnittpunkten zweier linearer Funktionen im E-Kurs gelang im Klassengespräch gut, insbesondere fiel das Lösen der auftretenden Gleichung den Schülerinnen und Schülern leicht. In der Folge waren sie aber in der Mehrheit nicht in der Lage, das besprochene Vorgehen in anderen Kontexten durchzuführen.

4.3. Empirisch basierte Theorievernetzung als Ausgangspunkt der Datenanalysen

In Kapitel 2 wurde erläutert, inwiefern das SVSt-Modell und die Theory of Objectification mit ihren spezifischen Blickwinkeln auf das Lernen von Mathematik dabei helfen können, um die Ausbildung algebraischen Struktursinns zu untersuchen. Es wurde bereits angedeutet, dass zwar jeder der beiden Blickwinkel für sich genommen interessante Ergebnisse verspricht, durch eine Vernetzung aber ein gemeinsames Potenzial entwickelt werden soll.

Dabei können Strategien der Vernetzung von Theorien der Mathematikdidaktik helfen, wie sie in den vergangenen Jahren in der entsprechenden Arbeitsgruppe bei der CERME und daraus hervorgegangenen Kooperationen formuliert worden sind (vgl. zusammenfassend Prediger, Bikner-Ahsbahs und Arzarello, 2008; Bikner-Ahsbahs und Prediger, 2014). Sie bieten einen methodologisch abgesicherten Rahmen, in dem sich verschiedener Ansätze bedient werden kann, ohne dass dabei über wichtige Konflikte hinweggegangen wird.

4.3.1. Möglichkeiten der Theorievernetzung

Einen Überblick über die möglichen Formen von Theorievernetzung geben Prediger et al. (2008), indem sie sie nach ihrem Grad der Integration anordnen (vgl. Abbildung 4.2). Für die vorliegende Aufgabenstellung sind die Ansätze *Combining* und *Coordinating* relevant:

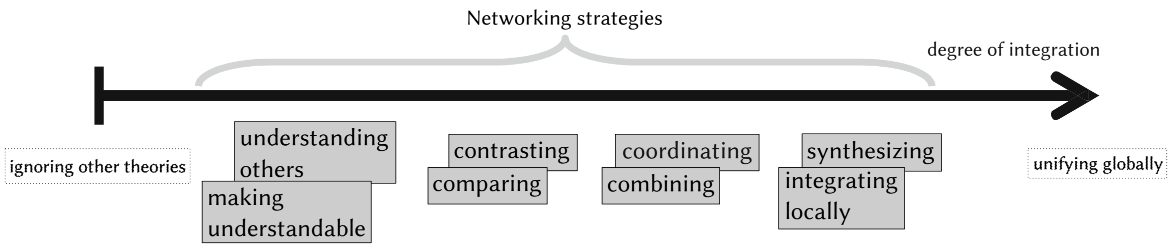


Abbildung 4.2.: Strategien der Theorievernetzung nach dem Grad der Integration angeordnet (Darstellung in Anlehnung an Prediger et al., 2008, S. 170, mit Umkehrung der Strategien in den Paaren wie von Bikner-Ahsbahs in Präsentationen vertreten)

> Following the idea of triangulation, combining and coordinating means looking at the same phenomenon from different theoretical perspectives as a method for deepening insights into the phenomenon. The distinction between combining and coordinating is drawn according to the degree of integration of theory elements with respect to their compatibility. *Combining* theoretical approaches does not necessitate the complete compatibility of the theoretical approaches under consideration. Even theories with conflicting basic assumptions can be combined in order to get a multi-faceted insight into an empirical phenomenon in view. In contrast, we use the word *coordinating* when a conceptual framework … is built by fitting together elements from different theories for making sense of an empirical phenomenon (Prediger und Bikner-Ahsbahs, 2014, S. 119 f.).

Beide Schritte wurden in der im Folgenden vorgestellten Theorievernetzung durchgeführt.[14]

4.3.2. Combining: Entwicklung eines hypothetischen Modells

Bezüglich der hier durchzuführenden Vernetzung wurde zunächst nach Art des Combining vorgegangen, also ein beschränkter Datensatz aus beiden Perspektiven betrachtet. Dabei wurde aus Sicht des SVSt-Modells geklärt, was Struktursehen im vorliegenden epistemischen Prozess bedeutet, und aus Sicht der Threory of Objectification, was das zu erkennende Tätigkeitsmotiv wäre und wie es sich den einzelnen Schülerinnen und Schülern offenbart.

Hilfreich war dabei das von Radford (2008a) vorgeschlagene PMQ-Modell. Es beruht auf der Beobachtung, dass die *Methodologie* sich aus den *Fragen* und *Prinzipien* einer Theorie ergibt, aber auch von sich aus Anforderungen stellen kann – etwa dass bestimmte Begriffe genauer geklärt werden. Dieser Zusammenhang lässt sich auch anhand eines Rückblicks auf die vorangegangenen Kapitel zu den Theorien und zur Methodologie dieser Arbeit nachvollziehen. Daraus ergibt sich, dass diese drei Elemente als die jeweilige Theorie auszeichnend betrachtet werden können. Radford schlägt vor, dass sich eine Theorie stets durch ein Tripel (P, M, Q) beschreiben lässt, wobei P eine System von Prinzipien, M die Methodologie und Q eine Menge paradigmatischer Fragen sind, von denen die Theorie ausgeht. Genauer führt Radford (2008a) aus:

- „P … includes implicit views and explicit statements that delineate the frontier of what will be the universe of discourse and the adopted research perspective".
- „M … includes techniques of data collection and data-interpretation as supported by P".
- Die in Q enthaltenen paradigmatischen Fragen „generate specific questions as new interpretations arise or as the priniples [P] are deepened, expanded or modified" (S. 320).

So erhält man eine Grundlage, auf der sich Theorien zum Zwecke ihrer Vernetzung vergleichen lassen:

[14] Diese war auch Gegenstand eines Beitrags auf der CERME 8 in Antalya (Janßen und Bikner-Ahsbahs, 2013).

> The interest of considering theories as flexible triples … for the research problem of networking theories resides in the fact that a connection between theories can happen at several levels. For example, a connection can happen at the level of principles, at the level of methodologies, at the level of questions or as combinations of these. But the conceptualization of theories in terms of triplets can also shed some light on the question of the limits of networking theories (Radford, 2008a, S. 322).

Der entscheidende Berührungspunkt findet sich hier nun in der von beiden Theorien immer wieder untersuchten Frage der Entstehung von Wissen. Während das SVSt-Modell dabei kollektives Struktursehen in den Blick nimmt, nähert sich die TO der Frage in oben beschriebener Weise über den Begriff der Objectification.

Bei der Durchsicht der Videodaten der ersten Unterrichtsstunde konnten zwei Zustände unterschieden werden: Zunächst vollführten die Schülerinnen und Schüler immer wieder Kreisläufe, in denen zunächst gesammelt und verknüpft wurde. Dies führte dann zu Momenten des Struktursehens. Dabei wurden alle möglichen Strukturen gesehen, auch solche, die sich nicht auf den mathematischen Gehalt der Situation bezogen; manche stellten sich schnell als falsch heraus. Es kam jedoch auch zu einigen Momenten von Objectification (und damit Subjectification). Dies ermöglichte dann den Schülerinnen und Schülern, einen anderen Blick einzunehmen. Sie sahen nun die intendierte Struktur und konnten damit arbeiten. Es drängt sich die Vermutung auf, dass Struktursehen und Objectification unter bestimmten Umständen die gleiche Situation beschreiben könnten. Wenn sich diese Vermutung bestätigen ließe, könnte in den entsprechenden Fällen das SVSt-Modell die vorbereitenden kollektiven Handlungen beschreiben, die dann in eine bestimmte Form des Struktursehens beziehungsweise in einen Moment der Objectification hineinführen. Als Subjectification gewendet könnte dieses Erkennen eines neuen Tätigkeitsmotivs die Entwicklung des Struktursinns voranbringen.

Die Theorien könnten sich also gegenseitig ergänzen: Während die TO relativ unspezifisch in Bezug auf die Bedingungen bleibt, unter denen es zu Objectification kommt, reicht das SVSt-Modell nicht in den Bereich individueller Lernprozesse hinein. Aus der Perspektive des SVSt-Modells lässt sich Objectification als ein individueller Prozess sehen, der seinen Ausgangspunkt in Momenten des Struktursehens hat. So gesehen könnten Kreisläufe des Sammelns, Verknüpfens und Struktursehens die Grundlage bilden für Objectification. Nicht jedes Struktursehen müsste zu Objectification bei einer oder einem der beteiligten Schülerinnen und Schüler zu Objectification führen. Wenn dies aber passieren würde, läge eine ganz neue Qualität vor: Der Schüler oder die Schülerin sähe hier nicht mehr nur eine Struktur. Er oder sie wäre darüber hinaus in der Lage, sie in einer Tätigkeit zu nutzen; er oder sie hätte ein neues Tätigkeitsmotiv entdeckt. Die damit verbundenen Abläufe sind das Gebiet der TO und ließen sich in ihrer Sprache beschreiben, insbesondere könnte auf die Idee der Subjectification zurückgegriffen werden.

Das bedeutet, das bis zum Moment der Objectification das SVSt-Modell im Vordergrund steht. Es erlaubt es, die epistemischen Prozesse zu erfassen, die möglicherweise zu Objectification führen. Wenn dies eintritt, tritt das SVSt-Modell in den Hintergrund und der dialektische Prozess von Objectification und Subjectification wird in den Blick genommen.

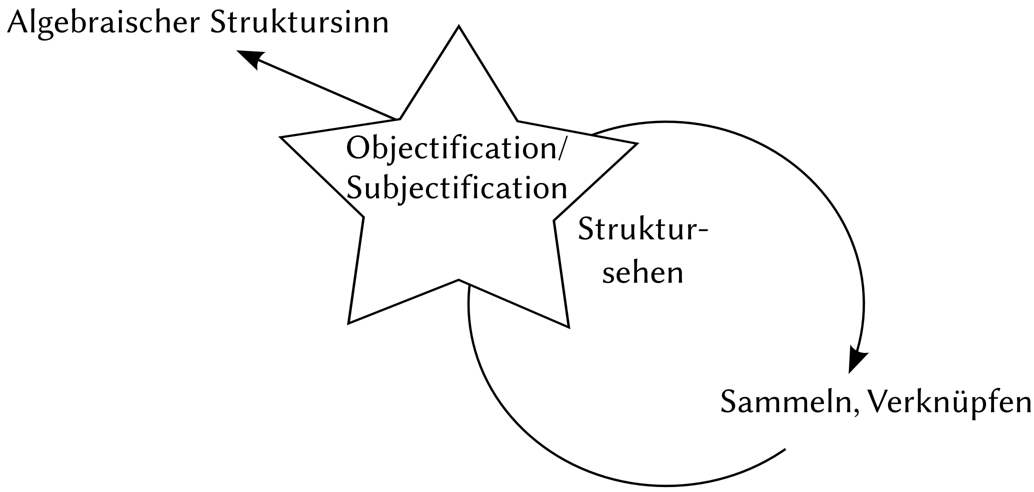


Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung des vernetzten Modells: Objectification/Subjectification als ein Spezialfall des Struktursehens (Janßen und Bikner-Ahsbahs, 2013, S. 2834).

Die Theory of Objectification erlaubt es, die Entwicklung algebraischen Struktursinns als einen individuellen Lernprozess zu verstehen. Mit diesem hypothetischen Vernetzungs-Modell (vgl. Abb. 4.3) kann nun eine koordinierende Analyse vorgenommen werden.

4.3.3. Ergebnisse der koordinierenden Analyse

Im Folgenden wird ein Transkriptausschnitt[15] vorgestellt, dessen Analyse zeigt, inwiefern das dargelegte hypothetische Modell dabei helfen kann, das Erlernen des Umgangs mit Strukturen besser zu verstehen. Die Ergebnisse der Analyse ermöglichen eine Ausschärfung des Modells und bereiten so die Analysemethoden vor, die im weiteren Verlauf der Arbeit angewendet werden.[16]

In der dargestellten Situation aus der ersten Unterrichtseinheit, in der Sabine und Herbert versuchen, die ihnen präsentierte Streichholzschachtelgleichung (vgl. Abbildung 4.4) zu lösen, wird es befördert durch einen von der Lehrerin eingebrachten Hinweis. Zuvor[17] hatten Herbert und Sabine versucht, der Anforderung nachzukommen, „dass das gleich bleibt“ (26). Der Forscher hatte zudem den Hinweis gegeben: „Es ‚es muss- immer noch gleich sein- ‚aber ‚einfacher.“ (76, 78) Sabine und Herbert ist aber nicht klar, was mit den Pronomina „das“ beziehungsweise „es“ gemeint ist. Für die Lehrerin und den Forscher ist klar, dass die Einsetzungsgleichheit der beiden Seiten zueinander erhalten bleiben muss

[15]Der vorliegende Transkriptausschnitt ist nach den Regeln erstellt worden, die in Abschnitt 4.4.2 erläutert werden. Der Transkriptionsschlüssel und weitere Informationen zum Verständnis der Transkripte findet sich in Anhang C. Auf Belegstellen im Transkript wird im Folgenden stets durch in Klammern gesetzte Zahlen verwiesen, die sich auf die entsprechende Äußerung beziehen.

[16]Es handelt sich also eigentlich um methodologische Arbeit, die hier eingeschoben wird, weil erst jetzt (mit dem Wissen um die Inhalte der Unterrichtseinheit) das Nachvollziehen der Analyse möglich ist.

[17]Das ausführliche Transkript dieser Episode findet sich auf Seite 101.

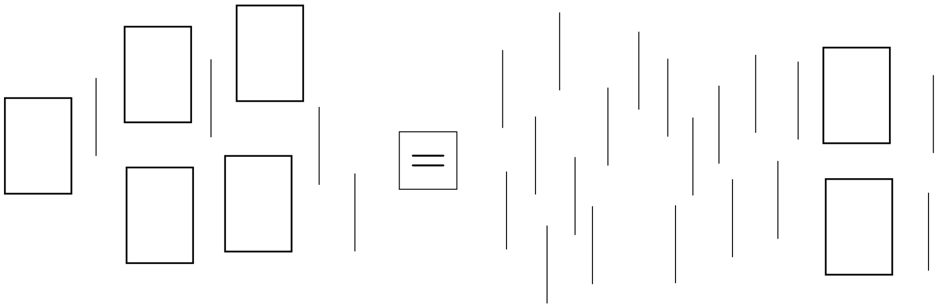


Abbildung 4.4.: Schematische Darstellung der Streichholzschachtelgleichung, die Sabine und Herbert lösen sollten. Auf der linken Seite der Gleichung liegen 5 Schachteln und 4 Streichhölzer, auf der rechten Seite 2 Schachteln und 19 Streichhölzer.

– diese ist angelegt in der gegebenen Regel, dass insgesamt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl an Streichhölzern vorliegt. Sabine und Herbert jedoch interpretieren möglicherweise zusätzlich, dass jede der beiden Seiten für sich genommen gleich bleiben muss: Die physisch vorliegenden Streichhölzer und Schachteln sollen über die Zeit unverändert bleiben. Zunächst weichen sie nur zaghaft von dieser Regel ab, indem sie Streichhölzer und Streichholzschachteln zwischen den beiden Seiten austauschen (27-40). Schnell wird ihnen jedoch klar, dass dies keinen Mehrwert mit sich bringt. Die Auffassung, dass beide Seiten der Gleichung in ihrer Materialität gleich bleiben müssen, führt zu einem Stillstand, es wird kein Fortschritt erzielt bezüglich der eigentlich intendierten Frage, welche Transformationen man durchführen könnte, die die Lösung des Rätsels sichtbar werden lassen, gleichzeitig aber die Einsetzungsgleichheit erhalten (41-114). Die Lehrerin ist ratlos, bis sie Sabine einen Hinweis zuflüstert:

Episode 4.1: Ausschnitt aus 111205_2_LG1_40-41: Sabine und Herbert entdecken eine Strategie zum Lösen linearer Gleichungen

114 L: Okay was kann man denn jetzt auf beiden Seiten (*tippt mit den Händen auf beide Seiten des Gleichheitszeichens, siehe Abbildung 4.5*) machen damit das übersichtlicher wird ihr müsst immer das gleiche machen. (*Herbert zieht etwas Schmutz vom Tisch, die Lehrerin schaut Sabine lange an, Sabine schaut auf den Tisch, hat immer noch die drei Schachteln in der Hand*) (...) (*steht auf und geht weg, dabei flüstert sie Sabine ins Ohr*) ‚was wegnehmen.
115 SBN: Was wegnehmen. (*lacht*)
116 HBT: Ah ‚Mann bis du schlau- Frau Kahn ist voll gemein. ‚was wegnehm okay-
117 SBN: Also wenn wir neun sind fünf , ah nimm mal vier weg’
118 HBT: Eins zwei drei vier. hab ich.
119 SBN: Ich hab vier doch weggen (*lacht*)
120 HBT: Oah- (.) also fünfzehn. (*schaut Sabine an*)
121 SBN: Ja’ ‚und fünfzehn- (*zeigt auf die rechte Seite, siehe Abbildung 4.6*) (.) (*tippt*

Abbildung 4.5.: Die Lehrerin tippt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auf den Tisch (114).

Abbildung 4.6.: Sabine deutet auf die 15 Streichhölzer auf der rechten Seite der Gleichung (121).

Abbildung 4.7.: Sabine tippt nacheinander auf die Streichholzschachteln auf der linken Seite der Gleichung (121).

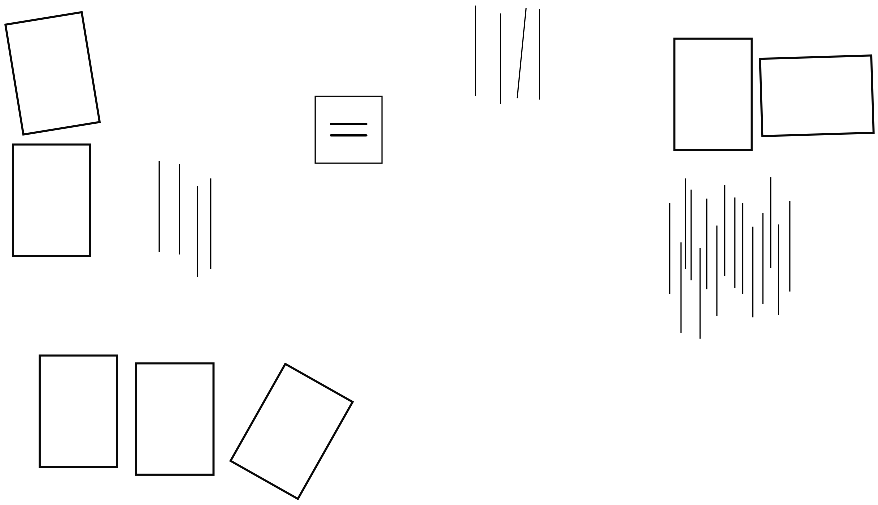


Abbildung 4.8.: Schematische Darstellung der Situation auf dem Tisch, die Sabine herstellt (121)

> *nacheinander auf die Streichholzschachteln auf der linken Seite, siehe Abbildung 4.7*) ,eins zwei drei vier fünf. (*nimmt drei der Schachteln und legt sie in die Mitte, die hergestellte Situation ist in Abbildung 4.8 dargestellt*) ,durch drei' sind fünf-
> 122 HBT: Ja-
> 123 SBN: Und jetzt ham wir das hier (*schiebt die drei Streichholzschachteln zu den Streichhölzern*) und die drei (*klatscht einmal in die Hände*) WIR HAMS. (*rückt auf dem Stuhl zurück*) (.) (*rückt wieder nach vorne*) ,guck- ,weil jetzt habt ihr ,wenn (*zeigt erst auf die Streichhölzer, dann auf die Schachteln*) die jetzt hier drinne wärn ,ne' (*Herbert schaut grinsend auf den Tisch vor sich*) ,ham wir noch (*zeigt auf die vier Streichhölzer, die immer noch auf der linken Seite liegen*) vier draußen-
> 124 HBT: Hähä'
> 125 SBN: Bin voll schlau' ,und (*zeigt schnell auf die isolierten Streichhölzer und Schachteln*) die sind doch da drinne. (...) ,glaubst du das geht' (*zieht die Schachteln wieder auf die linke Seite*) (.)
> 126 HBT: Also nochmal (*legt die flache Hand auf die linke Seite*) ,da sind fünfzehn-
> 127 SBN: Ja und hier sind dann auch fünfzehn weil fünfzehn geteilt durch drei sind-
> 128 HBT: (*synchron*) drei sind fünf. (*spreizt die Finger der rechten Hand*)
> 129 SBN: Ja.
> 130 HBT: Öy wir habens- whoo-
> 131 SBN: (*beide Schüler drehen sich zur Lehrerin*) Frau Kahn-
> 132 L: (*außerhalb des Bildbereichs*) Stopp stopp stopp ich komm gleich.

Der Hinweis der Lehrerin befähigt zunächst Sabine, dann auch Herbert, die Auffassung materieller Gleichheit zu überwinden. Indem sie „wegnehmen“ dürfen, können sie die identischen Teile auf beiden Seiten der Gleichung ignorieren (vier Streichhölzer und zwei Schachteln). Die übrigen drei Streichholzschachteln und 15 Streichhölzer werden verbunden, indem sie räumlich zueinander gebracht werden (123). Sabine und Herbert sehen, dass 15 durch 3 teilbar ist und überprüfen ihr Ergebnis (123-128). Die Möglichkeit etwas wegzunehmen hilft also beim Struktursehen und beim Eintreten in Objectification. Ohne an dieser Stelle ins Detail zu gehen, deutet die Emotionalität in dieser Szene deutlich auf den Sprung hin, den Sabine und Herbert hier bezüglich der Struktur linearer Gleichungen machen. Man kann dies als einen Hinweis nehmen sowohl für ein (wieder aufkeimendes) starkes Interesse an der Situation als auch die individuelle Entwicklung – Subjectification – die sich in diesem Moment vollzieht. Sabine und Herbert merken, dass sie etwas können, was ihnen vorher unmöglich erschien.

Die zentrale Rolle der Handlung „wegnehmen“ ließ den Forscher in der Analyse an einen späteren Moment in der Unterrichtseinheit denken, in dem sie wieder zum Tragen kommt – nun allerdings als Metapher. Fünf Monate nach Ende der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen, in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen, geht es für den E-Kurs darum, den Zeitpunkt zu ermitteln, zu dem der Wasserstand zweier Badewannen, in denen das Wasser abgelassen wird, gleich ist. Die eine Badewanne hat zwar zu Beginn den höheren Wasserstand, dieser sinkt dort aber schneller. Anhand einer Wertetabelle wurde der gesuchte Zeitpunkt bereits auf ein Intervall eingegrenzt.

In der im nachfolgende Transkriptausschnitt[18] dargestellten Situation ist bereits argumentiert worden, dass die Werte der beiden Funktionsterme zum gesuchten Zeitpunkt gleich sein müssen. Dies führt zu einer Gleichung an der Tafel, die aber erst einmal nicht als solches benannt wird. Nun fragt die Lehrerin:

Episode 4.2: Ausschnitt aus 120504_1_LZ9_20-23: „Streichhölzer" als Gedächtnisstütze

8 L: So was is das denn jetzt hier- (*zeigt kurz auf die Gleichung, ein Schüler meldet sich*) (.) (*Lehrerin deutet kurz auf den Schüler*)
9 SX1: (unverständlich) (*Unruhe in der Klasse*)
10 L: (*zeigt auf die Tafel*) Das sind zwei Terme ja'
11 SBN: (*meldet sich, zeigt dabei auf die Tafel, redet ohne abzuwarten los*) Ich weiß ich weiß ich weiß mit den Zigarettendingern (*wedelt mit der Hand in der Luft*) ,Streichhölzern'
12 L: (*wiegt die Hand in der Luft, spitzt den Mund*) Achso-o-
13 AGR: Gleichungn'
14 L: Ne Gleichung genau.
15 SX2: A-a-a-h.
16 L: (*deutet mit der Hand auf die Tafel, schaut dabei die Klasse an*) Aber habt ihr verstanden warum ich die gleichsetze- (*allerlei Zwischenrufe, nichts genau zu verstehen*) (...) (*schaut in die rechte hintere Ecke, zeigt mit der linken Hand auf die linke Seite der Gleichung*) ,ja ,weil ja- ,zu dem (*gestikuliert mit der rechten Hand im Takt*) Zeitpunkt x ,den wir rausfinden wolln- ,der Wasserstand gleich is. (*zeigt abwechselnd auf die linke und die rechte Seite der Gleichung*) ,also das is dann gleich- (.) (*setzt die Geste fort*) ,es kommt die gleiche Zahl raus (*lässt die linke Hand bei der rechten Seite der Gleichung liegen, gestikuliert mit der rechten Hand nach rechts und nach links*) deswegen kann ich das gleichsetzen-
17 KLY: Und wie rechnen Sie das dann'
18 L: So und wie rechne ich ne Gleichung aus' ich will jetzt ja den Zeitpunkt x rausfinden' (*drei SuS melden sich*) (.) ,Marie.
19 MRI: Man muss doch da immer ,also ,weil die (*macht eine Handbewegung von links nach rechts*) ,wie bei den Streichhölzern immer-
20 L: J-a ,sach an. ,wie mach ich das.
21 MRI: (*hält die Hand weiterhin in der Luft*) Ähm ,erstmal (*macht eine leichte Handbewegung von links nach rechts*) minus zweihundert kann ich wegnehm-
22 L: J-a das is schonmal super' (*schreibt neben die Gleichung* „| – 200")
23 KLY: (*klagend*) Ach ja ,nein (unverständlich)
24 L: (*zeigt auf „200" auf der linken Seite der Ausgangsgleichung*) So wenn ich hier zweihundert wegnehm was bleibt dann da über-
25 MRI: Äh minus sieben x.

[18] Das vollständige Transkript ist auf Seite 395 zu finden.

26 L: Genau. (*schreibt in einer neuen Zeile „$-7x =$“*) ‚und da’ (*zeigt auf die rechte Seite der Ausgangsgleichung*)
27 MRI: Fünfzehn x plus hundert.
28 L: (*schreibt rechts weiter „$15x + 100$“*) Super Marie.
29 KNH: Ich hab auch-
30 L: (*ist gerade fertig mit Schreiben*) Sehr schön
31 MRI: Und dann-
32 L: (*macht eine kurze Handbewegung in Maries Richtung*) So stopp wer macht weiter Kizzy.
33 KZY: Ähm und dann minus sieben’ ‚äh nein-
34 AMD: (*in allgemeiner Unruhe am lautesten*) Nein nein nein ‚minus fünfzehn.
35 L: Bitte’ (*schaut Kizzy an*)
36 KZY: Minus fünfzehn x’
37 L: (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) Dann hab ich hier minus dreißig x.
38 SBN: Plus fünfzehn.
39 L: (*spitzt den Mund*) Oh- (*schreibt rechts neben die Gleichung „$| + 15x$“*) (..) ‚so was kommt dann (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) da hin’ (*schaut in die Klasse, niemand meldet sich, allgemeine Unruhe, erst nach und nach gehen einige Finger nach oben*) (7sec)
40 SX3: Acht. (*Lehrerin dreht sich zur Tafel und schreibt "8x = 100"*) (.)
41 MRI: (*allgemeine Unruhe, nur die Äußerungen von Marie und Khanh verständlich*) Ich hasse die Zahl sieben-
42 KNH: Was habt ihr gegen sieben’
43 L: (*zeigt auf „$-7x$“ in der vorherigen Gleichung, schaut Paul an*) Minus sieben plus fünfzehn’ (...) (*zeigt langsam auf „$8x$“ in der neuen Zeile*) (..)
44 PL: Acht. (*nickt einmal*)
45 L: (*dreht sich zur Klasse*) So ‚und jetzt’ (*breitet ihre Arme aus, mehrere Schülerinnen und Schüler melden sich*)
46 SBN: Wir teiln. (.) (*Lehrerin zeigt ruckartig auf Khanh*)
47 KNH: Geteilt durch acht doch oder nich- (...) (*Lehrerin dreht sich wieder zur Tafel und schreibt rechts neben die Gleichung „$: 8$“, schreibt direkt in der nächsten Zeile weiter „$x =$“*)
48 SBN: Sind zwölf komma fünf-
49 L: (*schreibt direkt weiter „$12,5$“*) O-h- (..) (*Khanh klatscht*) ‚also. bei- (*zeigt erst auf „$12,5$“, dann auf „x“ auf der linken Seite der letzten Zeile, dann auf das „x“ in der Titelzeile der Tabelle*) meim x- (*zeigt auf "Minuten in der Titelzeile der Tabelle*) Minuten ‚bei zwölf komma fünf Minuten weiß ich dass der Wasserstand (*hält die beiden Hände nebeneinander*) gleich is.
50 HBT: A-h- (*Applaus von fast allen*)

Die Episode lässt sich aus Sicht des SVSt-Modells als Struktursehen in einem neuen Kontext sehen. Nach einem langen Zeitraum, in dem Gleichungen im Unterricht keine Rolle spielten, hilft das Wort „Streichhölzer“ (11) all jene Abläufe zu aktivieren, die aufbauend auf den Streichholzschachtelgleichungen erlernt wurden. Das im folgenden Lösungsprozess nun metaphorisch gebrauchte Wort „wegnehmen" (21, 24) unterstreicht die Bedeutung der konkreten Tätigkeit, in der durch Objectification und Subjectification die Struktur linearer Gleichungen erschlossen wurde. Durch Objectification wird also Wissen konserviert und ist auch nach langer Zeit noch abrufbar. Auch dabei tritt wieder Struktursehen auf. Es zeigt sich deutlich, wie nicht nur bei einzelnen Schülerinnen und Schülern, sondern in der ganzen Gruppe, kollektiv, die alte Tätigkeit aufgerufen wird. Die Metonymie „Streichhölzer" steht dabei für die gesamte erinnerte Situation.

Die koordinierende Analyse bestätigt also das oben dargestellte hypothetische Modell und erweitert es. Sie liefert einen Eindruck davon, wie in diesem vernetzten Modell Struktursehen und Objectification nicht nur beim Lernen von Neuem, sondern auch bei der Anwendung von bereits Erlerntem in der Klasse ineinandergreifen. Auch hier ist Struktursehen der soziale Rahmen für das *Wieder*erkennen eines Tätigkeitsmotivs, den *Wieder*einstieg in eine Tätigkeit. Es handelt sich dann um einen Spezialfall des Struktursehens. Anders als im allgemeinen Fall, in dem durchaus auch mathematisch falsche oder belanglose Strukturen gesehen werden können, existiert hier ein spezifisches Motiv, das sich rekonstruieren lässt. Es äußert sich im beobachteten Fall in einer Metapher, die im gegebenen Handlungskontext verankert ist. Interessant ist, dass die entscheidende Metapher von der Lehrerin vorgesagt wurde.

Die Theorien lassen sich also diachron, nacheinander, auf die Daten anwenden, wobei Momente von Objectification den Anlass bilden, die TO zu nutzen. Struktursehen wird als notwendige Bedingung für Objectification interpretiert. Diese Sichtweise ermöglicht eine systematische Strukturierung der Videodaten, die den Ausgangspunkt der im folgenden Abschnitt erklärten Analysemethoden bildet.

4.4. Analysemethoden

Im Folgenden soll beschrieben und begründet werden, welche Daten in welcher Weise analysiert werden. Eine erste diesbezügliche Entscheidung besteht darin, zunächst nur die Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen intensiv zu untersuchen. Dahinter steht die Überlegung, dass der zweiten Unterrichtseinheit im Kern die gleichen aus den Hintergrundtheorien abgeleiteten Designprinzipien zugrunde lagen (vgl. Abschnitt 4.2) – den einzigen größeren Unterschied bildet die frühere Einbindung verschiedener Tätigkeitskontexte. Daher können die Daten aus der zweiten Unterrichtseinheit dazu dienen, die Anwendbarkeit der anhand der ersten Unterrichtseinheit gewonnenen Aussagen abzusichern. Wie dabei vorgegangen wurde, wird am Ende dieses Abschnitts, in Unterabschnitt 4.4.6, diskutiert; zuvor geht es ausschließlich um die Analyse der ersten Unterrichtseinheit. Sie erfolgt wie in der Methodologie angekündigt anhand der dokumentarischen Methode und mündet in der Untersuchung der Ergebnisse dahingehend, inwiefern sie typisches enthalten. Der Gesamtverlauf der Analysen wird schematisch in Abbildung 4.9 dargestellt und kann der Leserin oder dem Leser als Überblick über den weiteren Inhalt dieses Kapitels dienen.

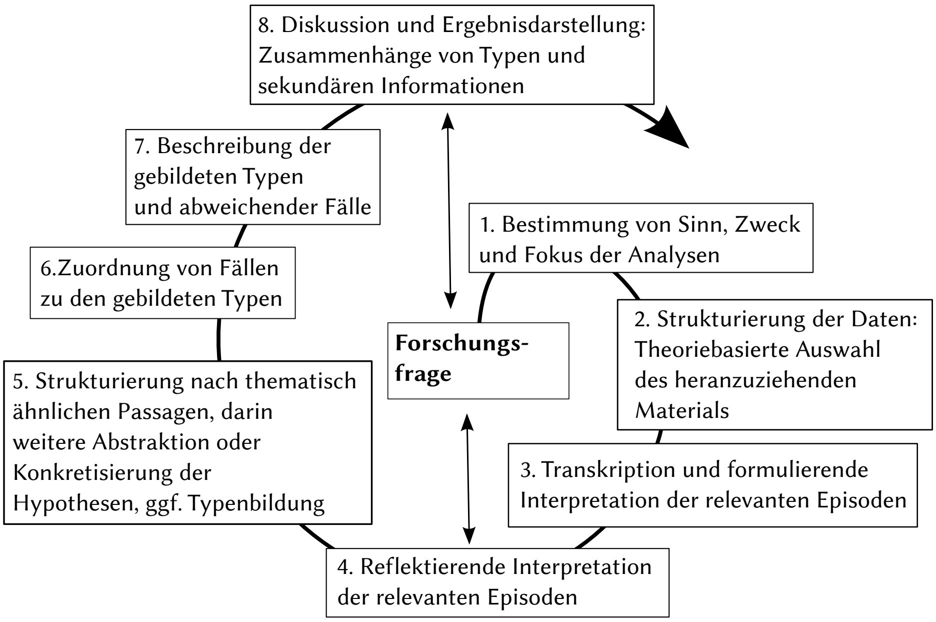


Abbildung 4.9.: Schematische Darstellung des in dieser Arbeit angewendeten Analyseverfahrens: Ausgehend von der Forschungsfrage und immer wieder auf diese bezogen (Idee der Darstellung: Kuckartz (2014, S. 124), dort bezogen auf die typenbildende Inhaltsanalyse in der Tradition von Mayring)

4.4.1. Strukturierung der Daten

Cobb et al. (2003, S. 13) schreiben mit Bezug auf Designstudien:

> A central challenge in conducting retrospective analyses is to work systematically through the extensive, longitudinal data sets generated in the course of a design experiment so that the resulting claims are trustworthy. As part of this process, it is important to be explicit about the criteria and types of evidence used when making particular types of inferences so that other researchers can understand, monitor, and critique the analysis.

Mit den oben beschriebenen Erhebungsmethoden kommen großen Datenmengen zustande. Sie müssen in ihrer Gänze zur Beantwortung der zugrundeliegenden Forschungsfragen herangezogen werden. Allerdings ist nicht jede Situation, die auf den Videoaufnahmen zu sehen ist, in einen Zusammenhang mit den Fragestellungen dieser Arbeit zu bringen. Augenfällige Beispiele sind die Klärung von Klassenangelegenheiten oder das Austeilen von Aufgabenblättern. Teilweise stehen auch ethische Fragen einer Auswertung der Daten entgegen, etwa wenn die Schülerinnen und Schüler Privatgespräche führen. Daher muss nun im Nachhinein eine Auswahl getroffen werden.

Eine radikale Möglichkeit einer solchen Auswahl stellt die auszählende Auswertung der Videos, also ihre quantitative Analyse, dar. Gemäß vorgegebenen Kriterien könnten Ereignisse indiziert, ihr gemeinsames Auftreten ausgewertet und Aussagen über die Häufigkeit (unter bestimmten Bedingungen) gemacht werden. Ein solches Vorgehen ist aber nur möglich, wenn für die Konstruktion der notwendigen Kriterien bereits ein Rahmen vorliegt. Genau ein solcher Rahmen, der die Ausbildung algebraischen Struktursinns beschreibt, ist aber Ziel dieser Arbeit.

Es wurde bereits zuvor für ein qualitatives Vorgehen argumentiert, und in der Tat liefert die bereits weiter oben diskutierte Literatur einen geeigneten Startpunkt. Radford und Sabena (2015) beschreiben ihre Methode der Datenauswahl folgendermaßen:

> From video and the transcript, episodes are selected, which are helpful in answering the specific research questions (Q) of the study. These episodes are carefully analysed over and over in detail, and confronted with the theoretical assumptions (P) (S. 166).[19]

Cobb und Whitenack (1996) wenden bei einer ähnlichen Ausgangslage wie der hier vorliegenden ein mehrschrittiges Verfahren an, das im Folgenden als Leitfaden dienen soll. In einer ersten Analyse wird das Videomaterial direkt (also ohne Transkription) betrachtet und entschieden, welche Episoden für die weiteren Analysen in Frage kommen.[20] Für das von Radford und Sabena vorgeschlagene Vorgehen ist es zunächst notwendig festzulegen, was eine Episode als hilfreich bezüglich der Fragestellung auszeichnet. Dazu sind Kriterien und ein einheitliches Verfahren notwendig. Die erste Forschungsfrage, die nach einer Beschreibung der Ausbildung algebraischen Struktursinns verlangt, lässt sich mit dem dargelegten theoretischen Hintergrund folgendermaßen formulieren: Welche Strukturen werden von den Schülerinnen und Schülern im Struktursehen erkannt? Wie verhalten sich diese Strukturen zur jeweils intendierten Struktur und dem dazugehörigen Umgang, also dem kulturell etablierten Objekt/Motiv? Es werden also zunächst die Szenen identifiziert, in denen Struktursehen stattfindet oder Strukturen erweitert werden. Die Identifikation stützt sich dabei auf die Kriterien, die in Abschnitt 2.1.1 (Seite 27) benannt wurden; auf die Bedingung, dass es sich um interessendichte Situationen handelt, wird zunächst verzichtet. Dies geschieht per Durchsicht des gesamten Videomaterials unter Zuhilfenahme der dazugehörigen Unterrichtsplanung, die dabei hilft, das Geschehen einzuordnen. Dabei entstehen parallel Episodenpläne, aus denen hervorgeht, was in den Szenen geschieht, in denen kein Struktursehen zu erkennen war. Dies ermöglicht eine kritische Bewertung der Kodierung und gegebenenfalls den Rückgriff auf zuvor als irrelevant bewertete Szenen. Das gewählte Vorgehen trägt der Tatsache Rechnung, dass es in dieser Arbeit um die Rekonstruktion *mathematischer* Lernprozesse geht und nicht primär um die Rekonstruktion von Wissen und Lernen bezüglich *sozialen* Sinns, und demnach thematisch-inhaltliche Kriterien relevant werden (Martens, Petersen und Asbrand, 2014, S. 183). Die Fokussierung auf

[19] Die Buchstaben in Klammern beziehen sich auf das in Abschnitt 4.3.2 dargestellte PMQ-Modell.

[20] Auch die dokumentarische Methode, an der sich in den späteren Analysen orientiert wird, kennt eine solche Vorauswahl (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 292 f.; Bohnsack, 2010a, S. 135, dort als Teil der formulierenden Interpretation). Sie geht in ihrer klassischen Form jedoch von einzelnen Interviews oder Gruppendiskussionen als Datenbasis aus. Diese werden zunächst thematisch gegliedert, um dann eine Auswahl zu treffen. Da dieser Rahmen in der vorliegenden Studie deutlich überschritten wird, führe ich im Folgenden ein auf die hier vorliegende Problematik zugeschnittenes Verfahren ein. Dieses weist allerdings Bezüge zu neueren Arbeiten auf, die die dokumentarische Methode für die Interpretation von (Unterrichts-)Videografien nutzbar machen wollen; auf diese wird an gegebener Stelle hingewiesen.

Struktursehen lässt sich als eine Präzisierung der sonst in der dokumentarischen Methode üblichen Suche nach „Höhepunkte[n] des Engagements und der Intensität“ (Fritzsche und Wagner-Willi, 2014, S. 137) – sogenannten „Fokussierungsakten“ (Nentwig-Gesemann, zit. ebd.) – betrachten.

Neben den Codes für Struktursehen oder die Erweiterung von Strukturen wurden ad hoc weitere Codes entwickelt, um das sonstige Geschehen zu strukturieren (siehe Tabelle 4.4). Ziel dabei war es, am Ende fundierte Entscheidungen darüber treffen zu können, welche Szenen nicht analysiert werden sollten und welche Episoden die Aufmerksamkeit des Forschers verdienen, obwohl sie theoriebasiert zunächst nicht in die engere Auswahl kamen.

4.4.2. Umgang mit den unterschiedlich kodierten Episoden

Überblick über die unterschiedliche Behandlung der Episoden

Es folgt nun das, was Cobb und Whitenack (1996, S. 122) als „analyses of analyses“ bezeichnen. Auf Struktursicht verwiesen unmittelbar die Codes *Struktursehen* und *Erweitern einer bereits erkannten Struktur*. Die so kodierten Episoden bildeten den Kern der Aufmerksamkeit dieser Studie. Dabei wurden sie nicht isoliert betrachtet, vielmehr wurde ihre Rolle im Entwicklungsprozess der betreffenden Schülerinnen und Schüler in den Blick genommen. Es wurde also anhand von Transkripten untersucht, inwiefern es zu Objectification kam und welche Rolle dabei die vermuteten Faktoren spielten. Wie genau dabei vorgegangen wurde, wird ab Seite 98 erläutert.

In einer zweiten Phase wurden Codes in den Blick genommen, die weitere Schlüsse bezüglich der Forschungsfragen zulassen könnten. Sie lassen sich in vier Kategorien unterteilen und wurden dementsprechend unterschiedlich behandelt. In der ersten Kategorie finden sich Episoden, in denen zuvor behandelte – aber nicht unbedingt umfänglich verstandene – Strukturen zum Tragen kommen (*Anwenden bereits erworbener Strukturen*, *Rückgriff auf vorherige Erkenntnisse*). Die so kodierten Episoden gehen in verschiedenen Weisen in die Analysen ein: Die Episoden, bei denen dies sinnvoll war, wurden transkribiert und genau wie die Episoden mit Struktursicht analysiert. Häufig wurde in diesen Episoden aber gar nicht gesprochen, ein Transkript hätte also keine über die bereits im Kommentar zu der Episode abgelegte Beschreibung hinausgehenden Informationen enthalten. In diesen Fällen wurde auf eine Transkription verzichtet. Dennoch gehen diese Episoden über die erstellten Beschreibungen in die Gesamtbetrachtung ein. Die zweite Kategorie umfasst solche Episoden, in denen die Schülerinnen und Schüler unter Umständen Strukturen explizieren (*Besprechung von Erkenntnissen in der Klasse*, *Zusammenfassung von Erkenntnissen*). Ob dies tatsächlich geschieht, muss allerdings im Einzelfall entschieden werden, nur dann wurde transkribiert. In jedem Fall enthalten sie eine Schilderung des aktuellen Kenntnisstandes und werden zusammenfassend protokolliert. Noch unklarer ist a priori bei der dritten Kategorie, ob sie bezüglich der Forschungsfrage interessante Äußerungen enthält. Sie wurde eingeführt um der Möglichkeit nachzugehen, dass die Schülerinnen und Schüler außerhalb der bereits behandelten Episoden Interesse äußern oder sich Anzeichen dafür finden lassen, dass eine Persönlichkeitsentwicklung wie von der TO postuliert stattgefunden hat

Code	Beschreibung
!	Eventuell später interessante Szenen. (Werden immer zusätzlich inhaltlich codiert.)
allgemeine Organisation	Allgemeine, nicht auf die mathematischen Inhalte bezogene Sachverhalte werden besprochen oder erledigt (Klassenangelegenheiten, Technik u. ä.).
Anwenden bereits erworbener Strukturen	Die Schülerinnen und Schüler wenden eine (neu) erworbene Struktur auf neue Aufgaben an. Dabei kommt es i.A. nicht zu neuen Erkenntnissen bezüglich dieser Struktur, ansonsten wird dies entsprechend zusätzlich kodiert.
Arbeit, deren Inhalt vorerst nicht zu erkennen ist	Die Schülerinnen und Schüler gehen Aktivitäten nach, die sich zwar auf die Aufgabe oder das Material zu beziehen scheinen, deren Inhalt und Ziel aber vorerst unklar bleiben (z. B., weil nur ein Schüler oder eine Schülerin arbeitet und keine Gründe sichtbar macht). Insbesondere ist es nicht möglich zu bestimmen, inwiefern neue Erkenntnisse erzielt oder angewendet werden.
Arbeit, die nicht auf Erkenntnisgewinn ausgerichtet ist	Arbeit an den gegebenen Aufgaben, die nicht erkenntnisorientiert ist, wie bspw. das Niederschreiben vorher diskutierter Sachverhalte, das Vorbereiten weiterer Schritte ü.ä.
Besprechung von Erkenntnissen in der Klasse	Neue Erkenntnisse werden in der Klasse besprochen.
erkenntnisorientiertes Arbeiten	Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit dem Ziel, neue Erkenntnisse zu erlangen. Es handelt sich aber nicht zwingend um eine interessendichte Situation, diese wird ggf. extra codiert.
Erweitern einer bereits erkannten Struktur	Wie von Bikner-Ahsbahs beschrieben kann eine bereits erkannte Struktur mit weiteren Beobachtungen und anderen Strukturen verknüpft werden, dies erweitert/vertieft dann die Struktursicht. Solche Fälle werden mit diesem Code versehen.

Code	Beschreibung
Hausaufgaben-Besprechung	Hausaufgaben werden in der Klasse besprochen. Wenn die Hausaufgaben eine Vorbereitung der nächsten Unterrichtsaktivität darstellen, wird lediglich diese codiert.
IDS/Struktursehen	Szenen, die unter Umständen als interessendicht bewertet werden können und/oder in denen Strukturen gesehen werden.
inhaltlich interessante Zwischenäußerung	Schülerinnen und Schüler machen zwischendurch eine in Bezug auf den Lernprozess interessante Aussage. Dies kann, muss aber nicht mit den in der Klasse besprochenen Inhalten zu tun haben.
inhaltliche Organisation	Auf die mathematischen Inhalte bezogene Sachverhalte werden in der Klasse besprochen oder zwischen einzelnen Schüler_innen nochmals geklärt. Dazu zählt insbesondere, wer welche Aufgabe machen soll.
Klärung technischer Fragen	Fragen, die ausschließlich mit den verwendeten technischen Hilfsmitteln (Taschenrechner, Zeichenmittel, IT) zusammenhängen.
Lehrerin/Forscher gibt Feedback	Die Lehrerin oder der Forscher gibt Feedback zu bisher Erarbeitetem, also bspw. individuellen Vorschlägen, schriftlichen Ergebnissen oder hergestellten Dingen.
Lehrerin/Forscher hilft	Die Lehrerin oder der Forscher hilft, indem er/sie Hinweise gibt, Frage stellt, auf mögliche Probleme oder Lösungswege hinweist usw.
Metaäußerung Datenerhebung	Die Schülerinnen und Schüler reden (wertend) über die Datenerhebung.
Metaäußerung Inhalt	Die Schülerinnen und Schüler reden (wertend) über Inhaltliches (bspw. über die Aufgabenstellung, ihre Schwierigkeit, ihren Sinn, die Organisation des Unterrichts usw.).
Probleme aufgrund mangelnden Vorwissens	Die Schülerinnen und Schüler sehen sich mit Problemen konfrontiert, die nicht auf mangelhaften Umgang mit den algebraischen Strukturen zurückzuführen sind, sondern auf andere Lücken im mathematischen Wissen. Dazu zählen vor allem Probleme im Kopfrechnen, in der Bruchrechnung, im Umgang mit negativen Zahlen und im Anwenden eigentlich etablierter Verfahren.

Code	Beschreibung
Probleme aufgrund nicht angeeigneter Strukturen	Ein oder mehrere Schüler_innen erfahren Probleme, weil sie Strukturen, die vorausgesetzt werden, sich nicht oder falsch angeeignet haben.
Probleme aufgrund von mangelnder Aufmerksamkeit	Die Schülerinnen und Schüler können nicht mitarbeiten, weil sie entweder gerade unaufmerksam sind oder es an einem entscheidenden Moment vorher waren.
Rückgriff auf vorherige Erkenntnisse	Vorherige Erkenntnisse werden genutzt. Dies kann sichtbar werden, indem die Schülerinnen und Schüler diese Erkenntnisse in ihren Aufzeichnungen nachschlagen, oder indem sie sich explizit darauf beziehen.
Schüler erklärt sein Vorgehen	Eine Schülerin oder ein Schüler erklärt sein Vorgehen, entweder einer Mitschülerin oder der Lehrerin. Dazu zählen auch Erklärungen, die indirekt eine Sichtweise deutlich machen.
sonstiges	In diese Kategorie fallen Privatgespräche, Untätigkeit der Schülerinnen und Schüler bei nicht vorhandener Strukturierung durch die Lehrkraft, allgemeine Unruhe in der Klasse, Geburtstagsfeiern u. a..
Schüler oder Schülerin außerhalb des Bildbereichs	Mindestens einer der Schüler hält sich außerhalb des Bildbereichs auf.
Schülerinnen und Schüler beteiligen sich am Klassengespräch	Die Schülerinnen und Schüler leisten inhaltliche Beiträge zu einer in der Klasse geführten Diskussion. Das Vorlesen einer Aufgabe o.ä. wird nicht kodiert.
Schülerinnen und Schüler bitten Lehrerin/Forscher um Hilfe	auch: durch Blicke u. ä.
Schülerinnen und Schüler bitten Mitschüler um Hilfe	auch: durch Blicke u. ä.
Vermittlung etablierter Mathematik-Kultur	Die Lehrerin (oder der Forscher) vermittelt den Schülerinnen und Schülern etablierte Schreib- und Sprechweisen.
vor/nach dem Unterricht	Mit diesem Code wird die Phase vor Beginn und nach Ende jeglicher Unterrichtsaktivitäten gekennzeichnet.

Code	Beschreibung
Zusammenfassung von Erkenntnissen	Die Schülerinnen und Schüler fassen in vorherigen Prozessen entwickelte Erkenntnisse mündlich oder schriftlich zusammen, teilweise auch, indem sie sie sich gegenseitig erläutern, evtl. auch an Beispielen.

Tabelle 4.4.: Liste der Codes mit den dazugehörigen Beschreibungen. Fett hervorgehoben sind diejenigen Codes, die weiter untersucht wurden. Zusätzlich gab es einen Code für Videomaterial, das aus technischen Gründen nicht kodierbar war, etwa weil keine Tonspur vorlag.

(*inhaltlich interessante Zwischenäußerung*, *Metadiskussion*, *SuS beteiligen sich am Klassengespräch*). Schließlich wurde bei einer Reihe von Codes festgelegt, dass sie nach Abschluss der Analysen zu einer Unterrichtseinheit nochmals gesichtet werden sollten, und zwar jeweils unter einer spezifischen Fragestellung. Der Code *erkenntnisorientiertes Arbeiten* könnte Aufschluss darüber geben, wann solches Arbeiten in die Ausbildung von Struktursinn mündet und wann nicht, also Gelingensbedingungen erhellen. Die Codes *Lehrerin/Forscher gibt Feedback* und *Lehrerin/Forscher hilft* können rückblickend ebenso dazu genutzt werden, die Bedingungen erfolgreicher Interventionen durch die Lehrkraft zu erkunden.

Der Code *Probleme aufgrund nicht angeeigneter Strukturen* wurde angelegt, um die entsprechenden Episoden bezüglich der Frage zu untersuchen, inwiefern ein Strukturen übergreifender Struktursinn existiert, und wenn nicht, was zum Anschein seiner Existenz beiträgt.

Transkription der entsprechenden Episoden

Bevor nun dargestellt werden kann, wie die Analysen konkret vonstatten gingen, soll auf das angewendete Transkriptionsverfahren eingegangen werden. Dieses wurde von den Autorinnen und Autoren beider zugrundeliegenden Theorien als hilfreich erkannt und ist auch methodologisch begründet: Ausgehend von den Grundannahmen der interpretativen Forschung wird möglichst interpretationsfrei transkribiert. So werden beispielsweise Äußerungen, bei denen der Tonfall am Ende angehoben wird, als solche dokumentiert und nicht als Frage interpretiert. Darüber hinaus wird versucht, alle im Video sichtbaren Begleiterscheinungen wie Gesten, Mimik oder Hintergrundgeräusche der anschließenden Interpretation zugänglich zu machen. Der Transkriptionsschlüssel findet sich auf Seite 383 im Anhang.

Teilweise wurde beim Transkribieren deutlich, dass die Episoden für sich genommen nicht nachvollziehbar sind. In diesen Fällen wurde das Transkript soweit erweitert, dass es für sich genommen eine Sinneinheit bildete.

Formulierende Interpretation der als relevant identifizierten Episoden

Die so erstellten Transkripte ermöglichen eine erste Analyse der Szenen. Das dabei angewendete Vorgehen ist der dokumentarischen Methode entlehnt. Der erste Schritt wird dort als formulierende Interpretation bezeichnet (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 293 f.). Dabei „geht es um eine *zusammenfassende* (Re-)*Formulierung* des immanenten, des *kommunikativ-generalisierten* oder – alltagssprachlich ausgedrückt – des allgemein verständlichen *Sinngehalts*“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 293, Hervorh. im Original; vgl. Darstellung der Begriffe auf S. 48 in dieser Arbeit). Der Inhalt wird paraphrasiert. „Ziel ist es, die thematische Struktur, die Gliederung des Textes, die sich meist nicht unmittelbar erschließt, nachzuzeichnen“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 293), wobei jedoch voreilige Sinn- und Kohärenzbildungen vermieden werden sollen (Martens et al., 2014, S. 192).

Dies ist besonders in einer auf Wissen und Wissenserwerb ausgerichteten Arbeit zentral (Martens und Asbrand, 2009, S. 213). Hier kann das mathematische Wissen identifiziert werden, insofern es als gesehene Struktur (in der Sprache des SVSt-Modells) oder als Gegenstand von Objectification (in der Sprache der TO) expliziert wird. Doch nicht alle das mathematische Wissen betreffenden Handlungen und Aussagen explizieren es direkt – sie werden zunächst nur (mathematisch) wertfrei wiedergegeben und müssen in der reflektierenden Interpretation weiter erschlossen werden (vgl. Martens et al., 2014, S. 190). Für diese bildet die beschreibende Interpretation eine notwendige Vorarbeit.

Reflektierende Interpretation der als relevant identifizierten Episoden

Als Leitfragen der reflektierenden Interpretation nennen Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014, S. 295):

- Was zeigt sich hier über den Fall?
- Welche Bestrebungen und/oder welche Abgrenzungen sind in den Redezügen implizit?
- Welches Prinzip, welcher Sinngehalt kann die Grundlage der konkreten Äußerung sein?
- Welches Prinzip kann mir verschiedene (thematisch) unterschiedliche Äußerungen als Ausdruck desselben ihnen zugrunde liegenden Sinnes verständlich machen?

Es wird wiederum deutlich, dass sich die dokumentarische Methode eigentlich auf Interviews oder Gespräche bezieht. Doch die grundlegende Idee lässt sich auch auf Verhalten im Unterricht anwenden (Bonnet, 2009; Martens und Asbrand, 2009; Wagner-Willi, 2013). Auch hier gibt es „atheoretisches, stillschweigendes Wissen“ (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 298), das das Handeln leitet, und gerade die reflektierende Interpretation ist laut Wagner-Willi (2013, S. 223) „geeignet, um neben der Rekonstruktion der Orientierungsrahmen selbst auch spezifischere[n] Fragestellungen, wie sie für die fachdidaktisch orientierte Unterrichtsforschung typisch sind, nachzugehen“. Bonnet (2009) betont allerdings, dass dabei gewisse Anpassungen vorzunehmen sind, wenn nicht mehr soziologische, sondern didaktische Fragen behandelt werden. Im Folgenden werden daher einige der Grundbegriffe der dokumentarischen Methode (vgl. S. 48 in dieser Arbeit) erläutert und auf für diese Studie spezifische Vorgehensweisen eingegangen.

Bonnet (2009, S. 224) setzt in seinen Ausführungen damit an, dass im Unterricht „neben dem dokumentarischen Sinngehalt auch dem intendierten Ausdruckssinn und dem objektiven Sinngehalt nachgegangen werden [muss], da sie wesentlich dazu beitragen, das Spannungsverhältnis zwischen institutionellem Rahmen und individueller Freiheit zu erfassen“. Der *objektive Sinngehalt* liegt in den Handlungen, in denen die Lehrkraft den institutionellen Rahmen verkörpert, in dem der Unterricht stattfindet. Diese Tätigkeit – Roth und Radford bezeichnen sie als *schooling* – ist nicht im Fokus dieser Arbeit, muss aber stets mitgedacht werden. Wichtiger ist bei einer stark fachdidaktischen Ausrichtung jedoch der *intendierte Ausdruckssinn* – der „Ebene der absichtsvollen kommunikativen Selbstdarstellung der Akteure“ (Bonnet, 2009, S. 223). Der intendierte Ausdruckssinn wird ebenfalls nicht unbedingt expliziert, aber in denjenigen Handlungen der Lehrkraft deutlich, mit denen sie die formale Verantwortung für das Unterrichtsgeschehen einlöst, konkret in der Gestaltung von Lernprozessen, sei es durch die Erstellung und Ausgabe von Arbeitsblättern oder durch die verbale Anleitung der Schülerinnen und Schüler. Wie in der Methodologie bereits angedeutet handelt die Lehrkraft hier nicht rein habituell, sondern ist didaktisch orientiert.

Eine weitere wichtige Überlegung besteht darin, dass man „[f]ür den jeweils untersuchten Fachunterricht … nicht von vornherein unterstellen [kann], dass der unterrichtliche Erfahrungsraum für die Orientierungsrahmen der Lernenden überhaupt relevant wird – dass er also im eigentlichen Sinne überhaupt ein Erfahrungs- und nicht nur ein Anwesenheitsraum ist“ (Bonnet, 2009, S. 224 f.). Es gebe also im Schulunterricht unter Umständen viele verschiedene „Orientierungsrahmen von Unterrichtsgruppen der Schulklasse bis hin zu Individuen“ (Bonnet, 2009, S. 225), weil die Konjunktivität des Erfahrungsraums nicht immer gegeben ist und er somit zerfällt. Dies habe auch Bedeutung für den Begriff der *Focussierungsmetapher*. Man müsse sich darauf einstellen, dass ein Einpendeln auf solche Darstellungen konjunktiver Erfahrungen seltener oder auch gar nicht stattfindet. „Man sollte aber auch darüber nachdenken, nicht nur bei kollektiv verdichtetem, sondern auch signifikant nicht kollektivem Geschehen von einer Focussierungsmetapher zu sprechen“ (Bonnet, 2009, S. 225).

Laut Bonnet verlangt die Rekonstruktion individueller Orientierungsrahmen nach einer Triangulierung. Als geeignete Verfahren schlägt er Gruppendiskussionen oder Interviews vor. Aufgrund der Anlage der hier dargestellten Studie, die sich über einen längeren Zeitraum erstreckt, erscheint dies weder praktikabel noch den Forschungsfragen angemessen. Denn Bonnet strebt mit seinem Vorgehen Aussagen über das implizit vorliegende *Wissen* an, während es in dieser Arbeit um die Entwicklung dieses Wissens – also *Lernen* – geht. Es erscheint also wenig sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler über ihre (mathematischen) Orientierungsrahmen in einer bestimmten Situation zu befragen. Entscheidend ist vielmehr, wie sich diese im Laufe der Zeit weiterentwickeln. Es findet also eine Triangulation über mehrere Situationen hinweg statt, die eine Entwicklung offenbaren kann.

Spezifisch für diese Studie wird untersucht, in welchen Fällen über das Struktursehen hinausgehend auch Objectification stattfindet. Dabei sind wieder die in der Theorie erläuterten Definitionen leitend. Da Objectification sich aber nicht absolut, sondern nur durch seine Rolle a) im inhaltlichen und b) im emotional-affektiven Gefüge der Situation erkennen lässt, das noch dazu semiotisch vermittelt ist, ist hier eine entsprechend angepasste Analyseform notwendig (vgl. Martens et al., 2014, S. 193). Dabei wird eine Reihe von Techniken genutzt, auf die bereits in Abschnitt 3.2.4 eingegangen wurde, namentlich die von Austin (1975) benannten Sprechakte, das semiotische Bündel (Arzarello et al., 2009) und der aus der TO motivierte Blick auf Artefakte. Konkret kam eine Merkliste von Analysefoki zum Einsatz, die zudem besondere Aufmerksamkeit für Emotionsäußerungen, Nicht-Explizites (Pronomina, Gesten, unvollendete Sätze), Lücken im Erkenntnisprozess sowie Momente der Fremdheit (*Otherness*) einforderte.

Unter Rückbezug auf die Unterrichtsplanung lässt sich dann feststellen, welche Rahmenbedingungen für das Auftreten von Objectification hilfreich sind und unter welchen Umständen Probleme auftreten. Übergreifende Interpretationstechnik ist die *Suche nach*

Homologien (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 300 ff.): Dabei wird untersucht, welche Sinnmuster im Datenmaterial immer wieder auftreten und so für eine Kohärenz des Handelns sorgen. So wird die anschließende Typenbildung bereits vorbereitet.

Ergebnis der reflektierenden Interpretation sind Fallbeschreibungen (Bohnsack, 2010a, S. 139 ff.). Zusammenfassend werden darin zentrale Orientierungen und Rahmenkomponenten sowie die dramaturgische Entwicklung dargestellt. Es geht dabei auch darum, sich selbst und der Leserin oder dem Leser die vorhandene Spannung zu vermitteln. In dieser Arbeit geht es konkret darum, die dokumentierten Prozesse von Struktursehen und Objectification nachvollziehbar zu machen. Dazu können neben auf einzelne Passagen bezogenen auch auf den Gesamtverlauf zielende Beschreibungen treten. Mit ausführlichen Fallbeschreibungen ist bereits eine wissenschaftliche Leistung erbracht, sie bezieht sich jedoch (weitgehend) auf die einzelnen Fälle. Im Sinne der Generalisierbarkeit ist aber ihre Überschreitung wünschenswert – sie wird in der Typenbildung realisiert, die in Abschnitt 4.4.4 besprochen wird. Zuvor soll allerdings ein Beispiel gegeben werden, das vermittelt, wie bei den Analysen konkret vorgegangen wurde.

4.4.3. Beispiel: Analyse einer Episode

Mit der Theory of Objectification kann man auch bezüglich der in dieser Arbeit angewendeten Methoden von kulturellem Wissen sprechen, das in Tätigkeit umgesetzt wurde. Um den Leserinnen und Lesern das Nachvollziehen der Analysetätigkeit zu ermöglichen, empfehlen Przyborski und Wohlrab-Sahr (2014, S. 401), die angewandte Methode an mindestens einem Beispiel vorzuführen. Diesem Vorschlag soll hier nachgekommen werden, indem die ausführliche Analyse der Episode dargestellt wird, die bereits in der koordinierenden Analyse zum Zwecke der Vernetzung der Theorien auszugsweise dargestellt und untersucht wurde (vgl. Abschnitt 4.3.3, dort als Abbildung 4.4 auch eine Darstellung der Streichholzschachtelgleichung, mit der sich Sabine und Herbert hier beschäftigen).

Episode 4.3: 111205_2_LG1_40-41: Sabine und Herbert entdecken eine Strategie zum Lösen linearer Gleichungen

Weil Herbert und Sabine auf Hinweise von außen hin zuvor versucht haben, die gegebene Gleichung umzusortieren, suchen sie gerade nach der korrekten Ausgangsgleichung. Die Lehrerin steht hinter ihnen, der Forscher ihnen gegenüber.

17 F: Fünf und zwei hattet ihr am Anfang-
18 SBN: Arr-
19 L: (*legt eine der Schachteln von der rechten Seite der Gleichung auf die linke Seite*) So.
20 SBN: Oh ja so. (*nimmt die hinzugekommene Schachtel auf der linken Seite und stapelt in der Hand nach und nach alle Schachteln auf der linken Seite übereinander*) ,so kannst sein. (*Herbert lacht*) ,ha ,ha ,irgendwie verplant. (*hält den Stapel in beiden Händen und schaut darauf*) (.)
21 F: (*zeigt auf die Streichhölzer auf der rechten Seite*) Das sind neunzehn'
22 HBT: Ja.

23 F: Okay.
24 HBT: Äh- (*verschiebt beim Zählen die Streichhölzer nach und nach ein Stück nach links, Sabine hält weiterhin mit beiden Händen die Schachteln und schaut darauf, die Lehrerin schaut in der Klasse umher*) ‚eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebzehn achtzehn neunzehn
25 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Wie rechnet man das denn-
26 L: (*legt ihre Hand kurz auf die rechte Seite, wo Herbert gerade das Zählen beendet*) So was kann man denn hier verändern zum Beispiel ‚so dass das gleich (*hält ihre Hände kurz über den beiden Tischen*) bleibt. (*tippt mit allen Fingern mehrfach auf die Tische*) ‚das muss immer gleich bleiben das ist ganz wichtig.
27 HBT: Wir tauschen (*legt seine Hand auf die rechte Seite*) vier Stäbchen gegen (*hebt die Hand leicht an und zeigt auf die linke Seite*) vier Stäbchen.
28 L: (*schaut Herbert an*) Ja aber das nutzt ja nix oder'
29 SBN: (*gleichzeitig*) M-a-nn- wie unn-ö-t-i-g-
30 HBT: Ja aber ist getauscht.
31 SBN: Du bist übelst unnötig.
32 HBT: (*lacht, leise*) Ich mein-
33 L: Das bringt uns ja nix aber was könnte man denn machen. (*schaut Herbert an*) (4sec) (*die Lehrerin schaut in der Klasse umher*)
34 SBN: (*Herbert lacht*) Ich denk nur immer ein (*schüttelt eine der Streichholzschachteln mit der rechten Hand, mit der linken hält sie weiterhin den restlichen Stapel*) Kasten gegen Stäbchen tauschen.
35 HBT: (*aufgestützt, schaut erst zu Sabine und dann zur Lehrerin*) Ja- ‚denk ich auch schon die ganze Zeit nach.
36 L: (*schaut Herbert an und macht eine ruckhafte Kopfbewegung nach vorne, Sabine hat wieder alle Schachteln auf einem Stapel und spielt damit herum, Herbert spielt mit den Streichhölzern auf der rechten Seite*) Hm'
37 HBT: Aber wir wissen ja nich wieviel drinne is.
38 L: Nee tauschen- (*schaut auf Sabines Hände*) (unverständlich) ‚wir wissen ja nich (*zuckt mit den Schultern, verzieht den Mund nach unten*) wie viel da drin sind- ‚das geht ja nich.
39 SBN: (*spielt weiter mit den Schachteln, Herbert jetzt mit den Streichhölzern vor ihm*) Ja deswegen ja. (.) ‚wie denn' ‚helfen Sie uns. (*lehnt sich zurück, schaut die Lehrerin an*) ‚geben Sie uns noch (*macht eine Handbewegung in Richtung der Lehrerin*) mehr Tipps.
40 L: Ja man kann ja noch- ‚geh mal vom (*macht eine wegwerfende Handbewegung, schaut Herbert an*) Tauschen weg- ‚vielleicht kann man ja noch was anderes machen.
41 HBT: Schenken.
42 SBN: (*fast gleichzeitig*) Rechnen.
43 HBT: Schenken. (*die Lehrerin verzieht das Gesicht, schaut Sabine an*) (..)
44 SBN: Was für schenken Mann bist du blöd geteilt oder so rechnen- (*lässt eine Schachtel auf den Tisch fallen, die Lehrerin schaut Herbert an, beißt dabei die Lippen zusammen*) ‚(unverständlich)

45 HBT: Ich hab keine Ahnung.
46 SBN: (*rückt auf ihrem Stuhl herum*) Frau Kahn das ist übelst kompliziert. (*streicht sich durch die Haare*)
47 HBT: Ja.
48 AMD: (*ruft von seinem Tisch her*) Oh Mann Frau Kahn ,keiner versteht das.
49 SBN: (*lacht, zeigt auf ein Schülerpaar weiter hinten, das schon eine Lösung hat*) Doch.
50 L: Doch- (*Sabine lacht*) ,es ham schon welche rausgefunden. (*dreht sich nach hinten um*)
51 AMD: Wer-
52 MRI: (*reißt die Arme hoch*) WUU- WIR- (*Unruhe in der Klasse, Sabine, Herbert und die Lehrerin schauen nach hinten*) (...)
53 KZY: Frau K-a-h-n- ,könn Sie mir helfen'
54 L: Ich komm gleich.
55 HBT: A-lter-
56 L: (*nimmt Herberts Hand, die in der Mitte des Tischs liegt und legt sie zur Seite*) Herbert. Konzentrat-i-o-n jetzt hier-
57 SBN: Ja. ,also wir solln (*öffnet kurz die Hände, spielt dann wieder mit den Schachteln*) vom Tauschen wegkomm-
58 L: Also man kann das ,genau. ,nicht tauschen sondern vielleicht was andres machen
59 SBN: Versch-
60 L: Was andres verändern. (*steht auf*) ,was kann man denn noch ,so leg das da mal hin. (*nimmt Sabine die Schachteln aus der Hand und legt sie wieder auf der linken Seite hin*) ,so was kann man denn vielleicht sonst noch machen so dass das gleich bleibt. (*Herbert bewegt die Streichhölzer auf der linken Seite einzeln ein Stückchen nach rechts*) (..)
61 SBN: Oah-
62 L: (*schaut zu Sabine*) Auf beiden Seiten das gleiche machen so dass das gleich bleibt. (*stellt sich gerade hin und verzieht das Gesicht, schaut zwischen beiden Schülern hin und her, lächelt*) (...)
63 HBT: (*stützt sich auf*) Haj-a-
64 SBN: Weiß ich nich. ,gleich viel Kästchen.
65 L: Was' was' (*beugt sich vor und dreht ihren Kopf mit dem linken Ohr zu Sabine*)
66 SBN: (*macht eine unbestimmte Bewegung in Richtung der Streichholzschachteln und Streichhölzer*) Gleich viele Kästchen oder so. (*lässt die Schultern sinken*)
67 L: (*stellt sich wieder aufrecht hin*) Wie gleich viele Kästchen. (*Sabine zuckt mit den Schultern, beide Schüler schauen auf den Tisch vor sich*) ,was gleich viele Kästchen.
68 HBT: (*grinst*) Geht aber auch nich.
69 SBN: (*macht eine ruckhafte Bewegung mit dem ganzen Oberkörper*) Ja geht ja auch n-i-c-h. (*streicht sich durch die Haare*) ,hä'
70 HBT: (*schaut auf zur Lehrerin, Sabine schaut weiterhin auf den Tisch*) Gleich viele Stäbchen vielleicht'
71 SBN: (*bewegt die Hand rythmisch über der Mitte des Tisches, während sie spricht*) Aber dann is es ja nicht mehr g-l-e-i-c-h-

72 L: Dann ist es nicht mehr gleich. (*Herbert lässt seinen Kopf auf den Tisch sinken*)
73 HBT: Oah ey-
74 L: Es muss auf beiden Seiten ,ihr müsst- (*atmet tief ein und schaut nach oben*)
75 HBT: (*richtet sich wieder auf*) Das ist übelst kompliziert. ,echt. (*bewegt die Streichhölzer vor sich etwas hin und her, gähnt*)
76 F: Gleich ,aber einfacher vielleicht. (*die Lehrerin, Sabine und Herbert schauen ihn an*)
77 L: (*schaut den Forscher an, Hand vor dem Mund*) Hm'
78 F: Es ,es muss- immer noch gleich sein- ,aber ,einfacher.
79 L: Ja. (*zeigt kurz auf den Forscher, schaut wieder auf die Schüler*)
80 SBN: (*bewegt den Oberkörper nach hinten, dann wieder nach vorne, gestikuliert mit beiden Armen*) Das einfachste wär wenn Sie uns einfach die Lösung sagen. (*streicht sich durch die Haare, Herbert lacht*)
81 L: Also es muss (*zeigt mit der rechten Hand erst auf die linke und dann auf die rechte Seite, dreht sie dann so, dass die Handfläche oben ist*) immer gleich sein aber vielleicht- n bisschen (*macht eine ruckhafte Bewegung mit der rechten Hand nach oben*) übersichtlicher. (*stellt sich wieder aufrecht hin, verschränkt die Arme*)
82 SBN: (*schaut hoch zur Lehrerin*) Was heißt übersichtlicher' (*Sabine und die Lehrerin schauen sich an*) (..)
83 HBT: Also- (*legt die Hand in die Mitte, nimmt den Kugelschreiber, der dort liegt und dreht ihn in der Hand*)
84 SBN: (*schaut wieder auf zur Lehrerin, macht eine drehende Bewegung mit dem rechten Arm*) So also besser erkennbarer oder-
85 L: (*schaut kurz an die Decke*) Ja vielleicht'
86 SBN: (*Herbert knipst mit dem Kugelschreiber*) Oah- ,okay Herbert. ,überleg mit. (*Herbert lacht, und knipst zweimal*) (.) (*nimmt ihre Mappe und spielt damit herum*) ,ja aber- (*stützt sich auf die Mappe auf, Herbert spielt weiterhin mit dem Stift, die Lehrerin schaut in der Klasse umher*) (..) ,wie soll man das denn (*Stimme überschlägt sich*) hinbekomm'
87 L: (*stützt sich auf die Stühle der Schüler auf und beugt sich vor, beide Schüler schauen auf den Tisch*) Wie kann man das denn vereinfachen. ,was könnte man denn machen. ,dass das übersichtlicher wird. (*nimmt den Stift aus Herberts Hand und legt ihn zur Seite*) (.)
88 SBN: Übersichtlicher- (..) (*deutet unbestimmt auf die Schachteln und die Streichhölzer auf dem Tisch*) ,alles in einer Reihe oder w- (.)
89 L: J-a (*lässt den rechten Arm schwingen*) ,das kann man erstmal machen dass man das sortiert gen-a-u-
90 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) (*legt die Mappe zur Seite, Herbert beginnt, die Streichhälzer auf der rechten Seite zu sortieren*) Das ham wir ,das ham wir aber schon gemacht.
91 L: Hattet ihr auch schon das hab ich gesehn-
92 SBN: Ja Herbert M-a-nn-
93 HBT: W-a-s-
94 L: Und wenn man das dann gemacht hat was kann man dann machen-

95 SBN: (*zeigt auf die rechte Seite*) Gucken wie viele Käst (*zeigt abwechselnd auf beide Seiten*) ,äh wie viel in ein Kästchen passen oder so- (*kratzt sich an der Nase*)
96 L: (*fasst sich mehrfach an den Hals*) Ja aber das wolln wir ja rausfinden das wissen wir ja nich. (*nestelt an ihren Haaren*)
97 SBN: (*lächelt*) Ja hm ja- (...)
98 L: Ähm- (*schaut an die Decke*)
99 SBN: (*schaut auf zur Lehrerin, Herbert bewegt weiterhin die Streichhölzer hin und her*) Ja ä-h-m- ,so leicht is das gar nicht' (*schaut Herbert an, der weiterhin die Streichhölzer bewegt*) (4sec) (*schiebt die Streichhölzer nach rechts*) ,MANN jetzt hör a-u-f-
100 HBT: (*schaut Sabine an*) Ich will ne Reihe machen- (.)
101 L: Warte mal eben. (*schiebt die beiden Tische zusammen*)
102 SBN: Wir müssn ,wir müssn überlegen ,und nicht spieln. (*spielt mit ihren Haaren, Herbert bewegt wieder die Streichhölzer*)
103 L: (*hockt sich wieder hin*) Was könnte man denn hier (*tippt mehrfach auf die rechte Seite*) machen damit das übersichtlicher wird. (*bewegt die Sreichhölzer etwas*) ,das sind ja so viele.
104 HBT: Aufteiln. (.)
105 L: Wie teiln.
106 HBT: Durch zwei.
107 SBN: (*fast gleichzeitig*) Hälfte Hälfte oder so.
108 L: Ja aber dann- (*legt die Hand kurz auf die rechte Seite, dann wieder auf die linke*) (..) ,es sind ja- neunzehn ne- (*bewegt die Hand um die Streichhölzer auf der rechten Seite herum*)
109 HBT: J-a-
110 L: Und das durch zwei
111 SBN: (*zieht drei der Schachteln auf der rechten Seite etwas zu sich*) Geteilt durch drei oder nich-
112 HBT: Ah nee geht ja gar nich ,neun kann man gar nich durch zwei teiln.
113 SBN: Aber das is-
114 L: Okay was kann man denn jetzt auf beiden Seiten (*tippt mit den Händen auf beide Seiten*) machen damit das übersichtlicher wird ihr müsst immer das gleiche machen. (*Herbert zieht etwas Schmutz vom Tisch, die Lehrerin schaut Sabine lange an, Sabine schaut auf den Tisch, hat immer noch die drei Schachteln in der Hand*) (...) (*steht auf und geht weg, dabei flüstert sie Sabine ins Ohr*) ,was wegnehmen.
115 SBN: Was wegnehmen. (*lacht*)
116 HBT: Ah ,Mann bis du schlau- Frau Kahn ist voll gemein. ,was wegnehm okay-
117 SBN: Also wenn wir neun sind fünf , ah nimm mal vier weg'
118 HBT: Eins zwei drei vier. hab ich.
119 SBN: Ich hab vier doch weggen (*lacht*)
120 HBT: Oah- (.) also fünfzehn. (*schaut Sabine an*)
121 SBN: Ja' ,und fünfzehn- (*zeigt auf die rechte Seite*) (.) (*tippt nacheinander auf die Streichholzschachteln auf der linken Seite*) ,eins zwei drei vier fünf. (*nimmt drei der Schachteln und legt sie in die Mitte*) ,durch drei' sind fünf-

> 122 HBT: Ja-
> 123 SBN: Und jetzt ham wir das hier (*schiebt die drei Streichholzschachtln zu den Streichhölzern*) und die drei (*klatscht einmal in die Hände*) WIR HAMS. (*rückt auf dem Stuhl zurück*) (.) (*rückt wieder nach vorne*) ‚guck- ‚weil jetzt habt ihr ‚wenn (*zeigt erst auf die Streichhölzer, dann auf die Schachteln*) die jetzt hier drinne wärn ‚ne' (*Herbert schaut grinsend auf den Tisch vor sich*) ‚ham wir noch (*zeigt auf die vier Streichhölzer, die immer noch auf der linken Seite liegen*) vier draußen-
> 124 HBT: Hähä'
> 125 SBN: Bin voll schlau' ‚und (*zeigt schnell auf die isolierten Streichhölzer und Schachteln*) die sind doch da drinne. (...) ‚glaubst du das geht' (*zieht die Schachteln wieder auf die linke Seite*) (.)
> 126 HBT: Also nochmal (*legt die flache Hand auf die linke Seite*) ‚da sind fünfzehn-
> 127 SBN: Ja und hier sind dann auch fünfzehn weil fünfzehn geteilt durch drei sind-
> 128 HBT: (*synchron*) drei sind fünf. (*spreizt die Finger der rechten Hand*)
> 129 SBN: Ja.
> 130 HBT: Öy wir habens- whoo-
> 131 SBN: (*beide Schüler drehen sich zur Lehrerin*) Frau Kahn-
> 132 L: (*außerhalb des Bildbereichs*) Stopp stopp stopp ich komm gleich.

Diese Episode wurde als relevant ausgewählt, weil es dabei zu Struktursehen kommt. Festzumachen ist dies daran, dass die Schülerinnen und Schüler plötzlich erkennen, dass sie in einer bestimmten Art und Weise handeln dürfen und so zu einem Ergebnis kommen, auf deren Richtigkeit sie sich verlassen können. Im Folgenden wird erst gezeigt, wie sich die Episode in der formulierenden Interpretation darstellt. Im Anschluss daran wird die reflektierende Interpretation dargestellt.

Formulierende Interpretation

Zu Beginn klären der Forscher, die Lehrerin sowie Sabine und Herbert die Ausgangssituation, die vorher von den Schülerinnen und Schülern verändert worden war (17-24). Auf dem Tisch wird wieder die Gleichung $5x + 4 = 2x + 19$ durch Streichhölzer und Schachteln dargestellt.

Als Einstieg fragt die Lehrerin nun: „So was kann man denn hier verändern zum Beispiel ‚so dass das gleich (*hält ihre Hände kurz über den beiden Tischen*) bleibt. (*tippt mit allen Fingern mehrfach auf die Tische*) ‚das muss immer gleich bleiben das ist ganz wichtig." (26) Es folgt eine Reihe von Vorschlägen, die alle von der Lehrerin, teilweise auch vom jeweils anderen Schüler, abgelehnt werden. Herbert schlägt vor, vier Streichhölzer von der einen gegen vier Streichhölzer auf der anderen Seite zu tauschen. Sabine möchte Schachteln gegen Streichhölzer tauschen. Die nächsten beiden Ideen werden nur noch als Schlagwörter in den Raum geworfen: „Schenken" (Herbert), „Rechnen" (Sabine) (41-42).

Als Sabine zum zweiten Mal mehr Hilfe von der Lehrerin fordert, äußert sich diese folgendermaßen (60-62):

> L: Was andres verändern. (*steht auf*) ‚was kann man denn noch ‚so leg das da mal hin. (*nimmt Sabine die Schachteln aus der Hand und legt sie wieder auf der*

> *linken Seite hin*) ‚so was kann man denn vielleicht sonst noch machen so dass das gleich bleibt. (*Herbert bewegt die Streichhölzer auf der linken Seite einzeln ein Stückchen nach rechts*) (..)
>
> SBN: Oah-
>
> L: (*schaut zu Sabine*) Auf beiden Seiten das gleiche machen so dass das gleich bleibt. (*stellt sich gerade hin und verzieht das Gesicht, schaut zwischen beiden Schülern hin und her, lächelt*) (...)

Der nächste Kommentar von Sabine, nur wenige Worte, wird von der Lehrerin sehr interessiert aufgenommen (64-72):

> SBN: Weiß ich nich. ‚gleich viel Kästchen.
>
> L: Was' was' (*beugt sich vor und dreht ihren Kopf mit dem linken Ohr zu Sabine*)
>
> SBN: (*macht eine unbestimmte Bewegung in Richtung der Streichholzschachteln und Streichhölzer*) Gleich viele Kästchen oder so. (*lässt die Schultern sinken*)
>
> L: (*stellt sich wieder aufrecht hin*) Wie gleich viele Kästchen. (*Sabine zuckt mit den Schultern, beide Schüler schauen auf den Tisch vor sich*) ‚was gleich viele Kästchen.
>
> HBT: (*grinst*) Geht aber auch nich.
>
> SBN: (*macht eine ruckhafte Bewegung mit dem ganzen Oberkörper*) Ja geht ja auch n-i-c-h. (streicht sich durch die Haare) ‚hä'
>
> HBT: (*schaut auf zur Lehrerin, Sabine schaut weiterhin auf den Tisch*) Gleich viele Stäbchen vielleicht'
>
> SBN: (*bewegt die Hand rythmisch über der Mitte des Tisches, während sie spricht*) Aber dann is es ja nicht mehr g-l-e-i-c-h-
>
> L: Dann ist es nicht mehr gleich. (*Herbert lässt seinen Kopf auf den Tisch sinken*)

Die Lehrerin bewertet die Aussage „gleich viele Kästchen" anders als die vorherigen Vorschläge, indem sie eine Präzisierung fordert. Sie fragt nach dem „wie" und dem „was", also danach, was mit gleich vielen Kästchen getan werden soll, wie mit ihnen umgegangen werden soll. Es ist nicht deutlich, mit welchem Argument Herbert Sabines Vorschlag ablehnt, ebensowenig, wie ihre Gründe für die Ablehnung seines Vorschlags aussehen.

Den nächsten Hinweis entwickeln die Lehrerin und der Forscher gemeinsam (74-79), der Forscher formuliert ihn folgendermaßen: „Es ‚es muss- immer noch gleich sein- ‚aber ‚einfacher." (78), in einer weiteren Äußerung verwendet er das Adjektiv „übersichtlicher" (80). Vor allem Sabine fordert jetzt direkt die Lösung (80) und konkretere Hinweise (bis 86). Als nächsten Vorschlag formuliert sie: „„alles in einer Reihe oder w- (.)" (88) Die Lehrerin wertet dies als eine korrekte und eventuell hilfreiche Handlung, fragt dann aber nach dem weiteren Vorgehen (89-94). Sabine benennt als Ziel: „(*zeigt auf die rechte Seite*) Gucken wie viele Käst (*zeigt abwechselnd auf beide Seiten*) ‚äh wie viel in ein Kästchen passen oder so-

(*kratzt sich an der Nase*)“ (95), die Lehrerin bestätigt dies (96) und es entsteht eine kurze Situation, in der alle Beteiligten ihre Ratlosigkeit ausdrücken (97-103).

Herbert bringt noch den Vorschlag ein, die Gegenstände aufzuteilen (104), etwa „Durch zwei“ (106), was schließlich mit dem Argument verworfen wird, dass es 19 Streichhölzer gibt, eine ungerade Anzahl, die sich nicht teilen lässt (108-112).

Die Lehrerin, die jetzt zwischen Sabine und Herbert hockt, greift die Frage danach, wie man die Gleichung übersichtlicher machen könnte, erneut auf, und gibt Sabine flüsternd einen Tipp (114-115):

> L: Okay was kann man denn jetzt auf beiden Seiten (*tippt mit den Händen auf beide Seiten*) machen damit das übersichtlicher wird ihr müsst immer das gleiche machen. (*Herbert zieht etwas Schmutz vom Tisch, die Lehrerin schaut Sabine lange an, Sabine schaut auf den Tisch, hat immer noch die drei Schachteln in der Hand*) (...) (*steht auf und geht weg, dabei flüstert sie Sabine ins Ohr*) ‚was wegnehmen.
>
> SBN: Was wegnehmen. (*lacht*)

Die Lehrerin geht weg und Sabine beginnt sofort, den Hinweis umzusetzen (117). Sie nimmt vier der neunzehn Streichhölzer weg (117-120). Als nächstes zählt sie die Streichholzschachteln auf der anderen Seite – fünf. Dann legt sie drei der Schachteln in die Mitte und sagt ohne weitere Erklärung, dass 15 geteilt durch 3 als Ergebnis 5 gibt, Herbert reagiert mit einem „Ja-“ (121). Sabine wird in ihren Erklärungen nicht konkreter, sondern legt lediglich die drei Schachteln und die 15 Streichhölzer dichter zueinander (123, erster Satz) und ruft aus „WIR HAMS.“ Dann rückt sie wieder nach vorne und versucht eine weitere Erklärung: „‚guck- ‚weil jetzt habt ihr ‚wenn (*zeigt erst auf die Streichhölzer, dann auf die Schachteln*) die jetzt hier drinne wärn ‚ne’ (*Herbert schaut grinsend auf den Tisch vor sich*) ‚ham wir noch (*zeigt auf die vier Streichhölzer, die immer noch auf der linken Seite liegen*) vier draußen-“ (123, zweiter Teil) Sie argumentiert also, dass in den drei Schachteln, die noch zu betrachten sind (dass die anderen beiden egal sind wird angenommen) die 15 Streichhölzer sind, die zusätzlich zu den „vier draußen“ auf der rechten Seite der Gleichung fehlen. In 125 macht sie diese Beziehung noch etwas expliziter: „‚und (zeigt schnell auf die isolierten Streichhölzer und Schachteln) die sind doch da drinne.“

Herbert kann nicht folgen (124, 126) und fordert eine Wiederholung der Erklärung. Sabines Erklärung wiederholt allerdings nicht ihr Vorgehen, sondern bedient sich eines anderen Arguments (127): „Ja und hier sind dann auch fünfzehn weil fünfzehn geteilt durch drei sind-“ Sie spielt darauf an, dass Herbert bereits weiß, dass 5 die richtige Lösung ist, und dass insofern ihre Methode einer Probe standhält. Zumindest dies, also die Plausibilität, kann Herbert bestätigen (128), und die beiden Schüler stimmen erneut einen Jubel an (129-131).

Reflektierende Interpretation

Aufgrund der Tatsache, dass die Lehrerin in dieser Episode ab dem Zeitpunkt des Struktursehens nicht mehr Teil der Interaktion ist, bietet es sich hier an, ihr Handeln und das der Schülerinnen und Schüler getrennt zu behandeln.

Schülerhandeln (bis 114):

Sabines Einstiegsfrage „Wie rechnet man das denn-“ (25) verweist auf Rahmungen in zweierlei Hinsicht:

- Sabine nimmt an, dass gerechnet werden muss (siehe auch 44). Sie lässt sich also nicht auf die intendierte Rahmung des Lösens von Gleichungen als Lösen eines Rätsels ein.
- Sabines Frage könnte sich an Herbert richten und somit auch an sich selbst. Die Lehrerin reagiert aber mit ihrer eigenen Einführung, perlokutionär fordert Sabine also eine Anleitung von der Lehrkraft.

Zusammen ergibt sich hier ein in der Folge wiederkehrendes Motiv: Die Fragen der Schülerinnen und Schüler lassen erkennen, dass sie davon ausgehen, dass die Lehrkraft und der Forscher den mathematisch korrekten Lösungsweg kennen, und dass es reichen würde, wenn sie ihn ihnen einfach sagen würden (39, auch Herberts „Das ist übelst kompliziert. ‚echt.“ (75) wirkt perlokutionär als Aufforderung). Explizit wird dies in der Aussage „Das einfachste wär wenn Sie uns einfach die Lösung sagen. (*streicht sich durch die Haare, Herbert lacht*)“ (80) – Herberts Lachen kann hier als Zustimmung gedeutet werden. Da diese Anforderung von der Lehrerin nicht bedient wird, kommt es zu Protest, Verweigerung und Spott (45-48, 61, 69, 73, 75, 97-99). Dieser Interpretation entspricht die Beobachtung, dass Sabine und Herbert ihre Ideen in Form von Schlagwörtern oder kurzen, unvollständigen Beschreibungen einbringen (27, 34, 41, 42, 59, 64, 70, 88, 95, 104-111) – illokutionär wird durch dieses „Raten“ nach einer schnellen Bestätigung oder Ablehnung gesucht.[21]

Ein Abschnitt dieser Episode ist genau wegen dieser verkürzten Sprechweise schwer zu interpretieren: In 64 rät Sabine: „„gleich viel Kästchen.“ (Wiederholung in 66) (Dass sie rät leitet sich daraus ab, dass sie unmittelbar vorher sagt „Weiß ich nich.“) Die Lehrerin fordert eine Präzisierung (67), mit „„was gleich viele Kästchen.“ wohl insbesondere ein Verb: Was soll man mit gleich vielen Kästchen tun? Herbert behauptet (ohne wissen zu können was genau eigentlich getan werden soll), dass dies nicht ginge (68) und schlägt ebenso verkürzt vor „Gleich viele Stäbchen vielleicht‘“ (70). Dies stößt auf entschiedene Ablehnung sowohl von Sabine (71) als auch von der Lehrerin, deren Präferenz für die Manipulation der Schachteln so gestört wird.

Handeln der Lehrerin:

Die Klärung der Ausgangslage wird von der Lehrerin als wichtig markiert. Indem sie und der Forscher die Anzahlen der Streichhölzer und der Schachteln bekanntgeben, wird diesen explizit Bedeutung zugewiesen – dies war in den anfangs auf den Tischen vorbereiteten Streichholzschachtelgleichungen nicht der Fall; die Schülerinnen und Schüler waren verleitet, Teile der Konfiguration als unwichtig zu betrachten.

Der erste Hinweis der Lehrerin (26) zeichnet ihr allgemeines Vorgehen vor und soll daher hier in Gänze zitiert werden:

[21] Man beachte, dass die Sprechakte von Sabine und Herbert sich hier nicht als perlokutionäre Sprechakte in dieser Hinsicht interpretieren lassen, weil eine entsprechende Wirkung auf das Handeln der Lehrerin ausbleibt.

> (*legt ihre Hand kurz auf die rechte Seite, wo Herbert gerade das Zählen beendet*) So was kann man denn hier verändern zum Beispiel ‚so dass das gleich (*hält ihre Hände kurz über den beiden Tischen*) bleibt. (*tippt mit allen Fingern mehrfach auf die Tische*) ‚das muss immer gleich bleiben das ist ganz wichtig.

Das einleitende „So“ deutet bereits an, dass die Lehrerin keine direkte Antwort auf Sabines Frage geben wird. Sie gibt auch keine Rechnung oder einen Tipp dazu an, sondern bleibt im vorgegebenen Kontext, wenn sie fragt, was verändert werden könne. Ihr erster Satz enthält mit „hier“ und „das“ zwei Wörter, die gestisch konkretisiert werden müssen. Die Lehrerin hat im Fokus ihrer Aufmerksamkeit, dass zunächst auf der rechten Seite Streichholzschachteln entfernt werden müssten (72 stützt diese Interpretation, hier widerspricht sie einer Manipulation der Streichhölzer deutlicher als zuvor einer Manipulation der Streichholzschachteln). Was gleich bleiben soll, während die Schülerinnen und Schüler gleichzeitig überlegen soll, was verändert werden könnte, wird nur durch die Hände deutlich, die die beiden Seiten der Gleichung markieren. Es kommt also nicht nur bei Schülerinnen und Schülern, sondern auch bei der Lehrkraft zu sprachlichen Ungenauigkeiten.

Die Formulierung „gleich bleiben“, die bei der Lehrerin hier als explizit als „ganz wichtig“ markiert und die auch in ihren weiteren Hinweisen eine zentrale Position einnimmt (60, 62, 72, 81), wird von Sabine und Herbert nicht aufgegriffen, eben weil für sie nicht deutlich wird, *was* eigentlich gleich bleiben soll. Dazu trägt bei, dass die Lehrerin in der Folge zurückhaltender ist mit Gesten, die helfen könnten. Erst in Zeile 81 kommen wieder konkretisierende Gesten zum Einsatz, in Zeile 87 dann wieder nicht.

Auch bezüglich der Veränderung, von der die Lehrerin zunächst spricht, wird sie nicht präziser, sondern eher weniger präzise: Sie spricht von „machen“ (33, 40, 58, 94, 103 zusammen mit „verändern“ in Zeile 60. Es wird deutlich, dass die Lehrerin nicht präziser werden mag (vgl. auch 85). Besonders gut sichtbar ist diese Selbstbeschränkung in 40: „Ja man kann ja noch- ‚geh mal vom (*macht eine wegwerfende Handbewegung, schaut Herbert an*) Tauschen weg- ‚vielleicht kann man ja noch was anderes machen.“ Die Lehrerin unterbricht sich hier selbst genau an der Stelle, wo ein konkreteres Verb auftreten müsste; das Gleiche lässt sich auch in Zeile 72 beobachten. Immer wieder lassen sich Anzeichen für ein Unbehagen in der Situation identifizieren (43, 44, 62, 74, 81, 85, 96, 98), und auch der letztlich ausschlaggebende Hinweise wird im Flüsterton gegeben (114).

Erst in Zeile 87 verwendet die Lehrerin mit „vereinfachen“ ein neues Verb. Dies geschieht nach einer Intervention des Forschers (76, 78), die von der Lehrerin als Legitimation für genauere Hinweise gesehen wird. Ein weiterer Hinweis folgt in 103. „‚das sind ja so viele.“ ist ein Hinweis, das reduziert werden muss und wird von Herbert auch so aufgegriffen, indem er „Aufteiln.“ möchte (104). Die Lehrerin ist überrascht („Wie teiln.“, 104) und hat Mühe, Argumente gegen diese Idee zu finden.

Dann in Zeile 114, unmittelbar bevor sie verrät, dass es ums „wegnehmen“ geht, führt die Lehrerin „gleich bleiben“ und „verändern“ in einer Formulierung zusammen:

> Okay was kann man denn jetzt auf beiden Seiten (*tippt mit den Händen auf beide Seiten*) machen damit das übersichtlicher wird ihr müsst immer das gleiche machen. (*Herbert zieht etwas Schmutz vom Tisch, die Lehrerin schaut Sabine*

> *lange an, Sabine schaut auf den Tisch, hat immer noch die drei Schachteln in der Hand*) (...) (*steht auf und geht weg, dabei flüstert sie Sabine ins Ohr*) ,was wegnehmen.

Die dreisekündige Pause deutet darauf hin, dass die Lehrerin tatsächlich noch darauf hofft, dass Sabine und Herbert selbst auf die richtige Handlung kommen.

„gleich bleiben" ist eine problematische Bezeichnung. Sie wird am Anfang von der Lehrerin gesetzt, von den Schülerinnen und Schülern aber bis zum Ende nicht aufgegriffen. Dies sollte in den Analysen nachfolgender Episoden beobachtet werden.

Eigenständiges Arbeiten von Sabine und Herbert (ab 115):

Am Ende der Episode lässt die Lehrerin Sabine und Herbert mit dem Hinweis „was wegnehmen" zurück (114). Herbert erkennt, dass Sabine von der Lehrerin einen Tipp erhalten hat (116), die hauptsächliche inhaltliche Aktivität in der Folge liegt aber bei Sabine. Bereits in Zeile 117 deutet sich an, dass sie eine Idee hat, nachdem sie durch die Rechnung 19 – 4 auf 15 gekommen ist. Indem Sabine den 15 Streichhölzern, die man durch Wegnehmen von 4 Streichhölzern erhält, die drei Schachteln gegenüberstellt, die man auf der anderen Seite durch wegnehmen von 2 Schachteln erhält, kommt sie auf das korrekte Ergebnis (121-123), das sie in der Folge auch gegenüber Herbert begründet. Der reagiert auf diese Erklärung ungläubig, wie auf einen Trick (124) und braucht mehr Erklärung (126). Es scheint, dass Herbert die in 127 gegebene Erklärung nur anerkennt, weil sie auf die bekannte Anzahl an Streichhölzern pro Schachtel verweist.

Rolle der Aufgabenstellung

Man könnte fragen, inwiefern Sabine und Herbert die Aufgabenstellung überhaupt klar wird. Es lässt sich zumindest rekonstruieren, dass sie ein gemeinsames Ziel verfolgen. Die Aussage der Lehrerin „das nutzt ja nix oder'" (28, ähnlich nochmals in 33) impliziert ein solches Ziel, was von Sabine und Herbert nicht in Zweifel gezogen wird, vielmehr zeigen sie in ihren Reaktionen (34-35), dass sie ihre Aufgabe ernst nehmen. In Zeile 37 macht Herbert darüber hinaus deutlich, dass ihm klar ist, dass ein Tauschen von Streichholzschachteln gegen Streichhölzer nur möglich wäre, wenn die Anzahl der Streichhölzer pro Schachtel bekannt wäre. Die weitergehenden Fragen der Lehrerin, was man außer „tauschen" denn nun „machen" könnte (40, 58) setzen wiederum ein geteiltes Ziel voraus. Genau aus dieser vagen Zielorientierung entsteht das bereits weiter oben beschriebene „Raten". Zumindest Sabine macht allerdings in der Interaktion mit der Lehrerin in 95-97 deutlich, dass sie die Aufgabenstellung versteht. Ihr Ausspruch gegenüber Herbert „Wir müssn ,wir müssn überlegen ,und nicht spieln." (102) stützt diese Interpretation: Sie versteht, dass zur Lösung der Aufgabe ein echter gedanklicher Schritt gemacht werden muss.

Intendierter Ausdruckssinn: Gestaltung von Lernprozessen

Das Interesse der Lehrerin im Abschnitt 64-72 lässt sich darauf zurückführen, dass sie als Strategie das Wegnehmen gleich vieler Streichholzschachteln auf beiden Seiten im Kopf hat.

Ausblick vom gegebenen Beispiel her

Die beispielhaft analysierte Episode ergibt bereits den Ansatz einer ausführlichen Fallbeschreibung. Gerade wenn bereits mehrere Episoden analysiert worden sind, kann sich die reflektierende Interpretation auch auf zuvor gewonnene Ergebnisse beziehen und die neuen Analysen als darauf bezogene Stützung oder Herausforderung deuten. Gleichzeitig ist erkennbar, dass jede Analyse auch Hypothesen und Fragen aufwerfen kann, die in weiteren Analysen zu klären sind.

4.4.4. Von Interpretationen einzelner Episoden zu übergreifenden Typen

In den Analysen wurde die Chronologie der Episoden berücksichtigt. So reichen die Interpretationen bereits über den ursprünglichen Kontext hinaus – ein erster Schritt zur Typenbildung, bei der es für die dokumentarische Methode darum geht, Bezüge zwischen den in den einzelnen Fällen gefundenen Orientierungen und den Erlebnishintergründen der Subjekte herzustellen (vgl. Bohnsack, 2010a, S. 141 ff.), also eine Abstraktion der gefundenen Orientierungsrahmen voranzutreiben (vgl. Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 302 f.).

Um die in den Fallbeschreibungen enthaltenen Informationen systematisch der angestrebten inhaltlich-theoretischen Beschreibung der Ausbildung algebraischen Struktursinns entgegenzuführen, wurde eine Profilmatrix in Anlehnung an Kuckartz (2014) aufgestellt (vgl. Tabelle 4.5 auf Seite 113). In dieser sind zeilenweise die untersuchten Personen aufgelistet, in diesem Fall die vier Schülerinnen und Schüler. Spaltenweise werden Themen aufgeführt, die helfen, den Forschungsgegenstand zu strukturieren.

Während Kuckartz unter Themen Gesprächsthemen versteht, über das die untersuchten Personen reden, wurden für die vorliegende Arbeit Handlungsthemen herausgearbeitet – Überschriften, unter denen (schon interpretierend) das Handeln der Personen gestellt werden konnte. In der Analysearbeit wurden die vier Themen *Interaktion*, *Emotionen und Affektivität*, *Konventionen über Sprache und Notation* sowie *Anwendbarkeit und Nachhaltigkeit* identifiziert (vgl. Tabelle 4.6 auf Seite 113). Es handelt sich dabei keineswegs um trennscharfe Kategorien. Vor allem die drei erstgenannten Themen weisen Schnittmengen auf, so dass Episoden sich häufig sowohl dem einen als auch dem anderen Thema zuordnen ließen. Zudem ist es denkbar, dass sich eine Episode erst nach eingehender Analyse als für ein bestimmtes Thema relevant herausstellt. So fließen die Analyseergebnisse bereits vorher unter einem anderen Blickwinkel betrachteter Episoden durchaus mehrfach ein. Dies ist der Grund, warum hier der von Kuckartz verwendete Begriff der Dimension vermieden werden soll. Er würde eine Unabhängigkeit der Themen implizieren, außerdem müsste sich in jeder Dimension ein klarer Verlauf der Ausprägung festlegen lassen. Dies ist bei den von mir identifizierten Themen nicht der Fall. Damit wird deutlich, dass mit ihnen keine Typologie, also eine vollständige Erfassung des Phänomens, zu erreichen sein wird.

Angesichts der vorliegenden Fragestellung ist es sinnvoll, gegebenenfalls von den Personen zu abstrahieren (vgl. Kelle und Kluge, 2010, S. 111) und zu Hypothesen zu den einzelnen Themen zu kommen. Da diese Schnittstellen zueinander aufweisen, wird darüber hinaus zu erwägen sein, ob nicht auch über die Themen hinweg Ergebnisse festzuhalten sind, die

	Thema A	Thema B	Thema C
Person 1	Textstellen von Person 1 zu Thema A	Textstellen von Person 1 zu Thema B	Textstellen von Person 1 zu Thema C
Person 2	Textstellen von Person 2 zu Thema A	Textstellen von Person 2 zu Thema B	Textstellen von Person 2 zu Thema C
Person 3	Textstellen von Person 3 zu Thema A	Textstellen von Person 3 zu Thema B	Textstellen von Person 3 zu Thema C
		Kategorienbasierte Auswertung zu	
	↓	↓	↓
	Thema A	Thema B	Thema C

Tabelle 4.5.: Prototypisches Modell einer Profilmatrix in Anlehnung an Kuckartz (2014, S. 74) (ohne die zeilenweise Auswertung, bei der Fallzusammenfassungen für die einzelnen Personen erstellt werden)

	Interaktion	Emotionen und Affektivität	Konventionen über Sprache und Notation	Anwendbarkeit und Nachhaltigkeit
Sabine				
Herbert				
Ahmed				
Katie				
		Kategorienbasierte Auswertung zu		
	↓	↓	↓	↓
	Interaktion	Emotionen und Affektivität	Konventionen über Sprache und Notation	Anwendbarkeit und Nachhaltigkeit

Tabelle 4.6.: In dieser Arbeit verwendete Profilmatrix

„allgemeineren, abstrakteren Themen“ (Kuckartz, 2014, 74) zuzuordnen sind.

Eine soziologische Einbettung, wie Kelle und Kluge (2010, S. 112) sie für jede Typenbildung fordern, ist hier nicht im Sinne des Gegenstands. Die Ebene des Habitus, auf der sich allgemeinere, in jeglichem Unterricht auftretende Verhaltensweisen (etwa die von Wagner-Willi (2013) untersuchten Übergangsrituale) ansiedeln ließen, wird nicht erreicht. Vielmehr geben in dieser Arbeit die angewendeten mathematikdidaktischen Lerntheorien den beobachteten Phänomenen einen begrifflichen Rahmen.

4.4.5. Zur Darstellung der Analysen und ihrer Ergebnisse

Die Darstellung der Analysen in dieser Arbeit verfolgt zwei Ziele: Zum einen sollen die relevanten Ergebnisse dargestellt werden, zum anderen soll für die Leserin oder den Leser der Entstehungsprozess dieser Ergebnisse nachvollziehbar gemacht werden (vgl. Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 401). In den folgenden drei Kapiteln wird eine sukzessive Verlagerung von der unmittelbaren Beschreibung des Unterrichtsgeschehens zu theoretischen Erkenntnissen angestrebt: Kapitel 5 hat zum Ziel, die Geschehnisse der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen den Leserinnen und Lesern zugänglich zu machen. Hier findet sich ein Kondensat der formulierenden Interpretationen der als relevant identifizierten Episoden. Die Darstellungen hier stützen sich neben den entsprechenden Transkripten auch auf die Aufzeichnungen der Schülerinnen und Schüler und versuchen, eine Entwicklungslinie nachzuzeichnen. So wird zunächst deutlich, welche Inhalte in welcher Form behandelt wurden und insbesondere, wie der Unterricht für die beobachteten Schülerinnen und Schüler verlief.

Dies bildet die Basis für Kapitel 6, wo die in den reflektierenden Analysen und durch ihre Verbindung gewonnenen Erkenntnisse vorgestellt werden. Diese Erkenntnisse sind in der Regel nicht den einzelnen Schülerinnen und Schülern zuzuordnen, lassen sich aber an den von ihnen tatsächlich realisierten Interaktionen illustrieren (Przyborski und Wohlrab-Sahr, 2014, S. 409). Cobb und Whitenack (1996) sehen als ein bei diesem Vorgehen auftretendes Problem, dass „the interpretations of these sample episodes frequently do not seem justified when they are considered in isolation from the rest of the data“ (S. 225). Beispielsweise könnten alternative Deutungen, die sich beim Lesen nur einer Episode ergeben, ausgeschlossen werden, indem auf die langfristig beobachteten sozialen Beziehungen in einer Gruppe verwiesen wird. Gleichzeitig müsse sich (im Einklang mit der von Roth und Radford vorgebrachten Kritik an einem falsch verstandenen Interpretationsbegriff, die in Abschnitt 3.2.2 wiedergegeben wurde) damit abgefunden werden, dass es nicht darum geht „… to reveal the objective essence of the teachers' or the students' activity“ (Cobb und Whitenack, 1996, S. 225), sondern um eine vertrauenswürdige Beantwortung der gestellten Forschungsfragen. Genau diese Zielsetzung liegt dem sechsten Kapitel zugrunde. Dies führt zu einer recht ausführlichen Darstellung, die nach Sortierung und theoretischer (Ein-)Ordnung verlangt.

In Kapitel 7 werden die gefundenen Ergebnisse daher zusammengefasst und in einen Zusammenhang mit den angewendeten Theorien, aber auch den bestehenden Erkenntnissen des Forschungsfeldes gebracht. Dies dient nicht nur der Übersichtlichkeit, sondern soll auch dabei helfen, die Geltung der gemachten Aussagen abzusichern.

4.4.6. Beispielhafte Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse auf Daten aus der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

Integriert in die Darstellung der Ergebnisse wird gezeigt, inwiefern sie über den Kontext linearer Gleichungen hinaus Geltung haben. Um dies zu leisten, wurden die Videoaufnahmen der zweiten Unterrichtseinheit, deren Thema lineare Funktionen war, unter Verwendung eines Katalogs kodiert, der sich aus den bis dahin gewonnenen Hypothesen ergab. Abschnitte, die bezüglich der gemachten Hypothesen nichts aussagten, wurden als irrelevant kodiert. Die übrigen Abschnitte stützen die bereits gewonnenen Hypothesen, oder sie erfordern Präzisierungen, Einschränkungen oder gar eine Rücknahme der gemachten Behauptungen. Beispiele finden an jeweils passender Stelle Eingang in Kapitel 6.

Dieses Vorgehen unterscheidet sich grundlegend von dem, das bezüglich der Daten der ersten Unterrichtseinheit angewendet wurde, was an der unterschiedlichen Zielsetzung liegt. Es geht nun eben nicht mehr darum, neue Hypothesen zu konstruieren, sondern darum, bestehende Hypothesen in einem weiteren Kontext auf ihre Reichweite zu überprüfen und so auch zu zeigen, inwiefern die gewonnenen Erkenntnisse nicht nur in Bezug auf den Unterricht zu linearen Gleichungen von Wert sind.

5. Die Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen bei den beobachteten Schülerinnen und Schülern

Wie beschrieben bilden die Entwicklungsprozesse der vier beobachteten Schülerinnen und Schüler in der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen den Ausgangspunkt für die Beantwortung der Forschungsfragen. Deshalb sollen diese Prozesse nun zusammenfassend in der Form beschrieben werden, wie sie sich in der formulierenden Interpretation der jeweils relevanten Episoden sowie in den vorliegenden Aufzeichnungen darstellt. Bei diesen Beschreibungen handelt es sich noch nicht um verallgemeinerbare Ergebnisse, im Gegenteil, es geht gerade darum, die Besonderheit der Lernprozesse zu erfassen, die beobachtet werden konnten. Denn sie sind in der Gesamtschau die Basis für die in der reflektierenden Interpretation gewonnenen und durch die Verbindung dieser Ergebnisse untereinander präzisierten Beschreibungen einzelner Aspekte der Ausbildung algebraischen Struktursinns, die dann den Gegenstand des nachfolgenden Kapitels bilden.

Sowohl in Kapitel 5 als auch in Kapitel 6 werden Transkripte in den Text eingebunden, um das Nachvollziehen der jeweiligen Interpretationen zu ermöglichen. Dabei kann es hilfreich sein, zuerst auf eine komplette Lektüre der Transkripte zu verzichten und sie sich vielmehr mit Hilfe der anschließend dargelegten Interpretation zu erschließen. Um dies zu unterstützen, wurden die Transkripte jeweils durch einen Rahmen abgesetzt.

5.1. Überblick über den Verlauf bei Sabine und Herbert

Einstieg

Bereits im allgemeinen Überblick in Abschnitt 4.2.1 wurde erwähnt, dass die meisten Gruppen nicht unmittelbar einen Zugang zur Lösung der Streichholzschachtelgleichungen finden. Auch Sabine und Herbert gelingt das Lösen der gegebenen Gleichung erst nach ausführlicher Hilfe durch die Lehrerin. Zunächst sitzen sie für längere Zeit ratlos herum, probieren einen fehlgeleiteten Ansatz von Ahmed (vgl. die Beschreibungen in Abschnitt 5.2) aus. Dabei wirkt Herbert desinteressiert, während Sabine einen gewissen Ehrgeiz an den Tag legt. Die Episode, die schließlich zum intendierten Lösungsverfahren führt, wurde bereits in Abschnitt 4.4.3 ausführlich besprochen. Die im Folgenden dargestellte Episode startet etwa sieben Minuten danach, wobei Sabine und Herbert in der Zwischenzeit nicht inhaltlich weitergearbeitet haben. Sabine holt die Lehrerin an ihren Tisch. Sie sucht Hilfe bei der Aufgabe, das zuvor erarbeitete Vorgehen beim Lösen der ihnen gegebenen

Streichholzschachtelgleichung (vgl. Abbildung 4.4 auf Seite 84) schriftlich zu beschreiben. In Reaktion darauf fordert die Lehrerin Sabine und Herbert auf, ihr Vorgehen zunächst mündlich wiederzugeben:

Episode 5.1: 111205_2_LG1_43: Sabine und Herbert erklären ihr Vorgehen

134 SBN: (*kommt zusammen mit der Lehrerin von weiter hinten an den Tisch, redet zur Lehrerin gewandt* (unverständlich) die Lösung (unverständlich) wissen nich wie wirs aufschreiben solln-

135 L: (*teilweise gleichzeitig*) Ja das is-s ,könnt ihr aber jetzt mal selber rausfindn (*Sabine setzt sich hin, die Lehrerin geht hinter Sabines Stuhl entlang und stellt sich zwischen die beiden Schüler*) ,wie habt ihr das denn jetzt gemacht'

136 HBT: Also.

137 SBN: (*gleichzeitig*) Also wir ham' (*legt die drei Schachteln, die zuvor zur Seite gelegt wurden, nacheinander wieder zu den beiden anderen*)

138 L: (*dreht sich nach hinten, wo andere SuS sich melden*) Ich komm gleich.

139 SBN: Hier- (*legt die Hand auf die drei Schachteln, die jetzt neben den anderen beiden liegen*)

140 HBT: Äh ,wir ham vier- (*legt seine rechte Hand auf die 15 Streichhölzer, in der Mitte seines Tisches, legt die linke Hand auf die anderen vier Streichhölzer, die in der Nähe des Gleichheitszeichens liegen, zieht sie etwas zu sich und dann wieder zurück*) zur Seite getan.

141 SBN: Ja zur Seite.

142 HBT: Dann hatten wir fünfzehn. (*zieht die rechte Hand zurück, bewegt nun die rechte Hand auf den 15 Streichhölzern vor und zurück, die Lehrerin richtet sich kurz auf, streicht sich durch das Haar*)

143 SBN: (*zieht vier der Streichholzschachteln auf der linken Seite der Gleichung zu sich, legt dann eine wieder zurück*) Und fünf ham wir geteilt durch drei genomm- (*schaut zur Lehrerin auf*)

144 L: (*gleichzeitig, richtet sich auf*) Was was was was'

145 HBT: Was (*schaut kurz zur Lehrerin auf, die Lehrerin schaut zwischen beiden Schülern hin und her*) (unverständlich) ,also ich hab ja neunzehn. (*zieht die vier Streichhölzer zu den anderen 15*)

146 SBN: (*gleichzeitig*) Also wir hattn (*legt den rechten Zeigefinger auf den Tisch, so dass er in Richtung der Streichhölzer zeigt, über die Herbert weiterhin seine Hände hält, schaut zur Lehrerin auf, ihre linke Hand liegt weiterhin auf den drei Schachteln*) hier neunzehn-

147 L: Ja.

148 SBN: Und (*schaut wieder auf den Tisch zeigt auf die vier Streichhölzer auf der linken Seite der Gleichung, die linke Hand bleibt unverändert*) vier komm zur Seite weil wir (*schaut zur Lehrerin auf, verdreht die Hand etwas und macht so die Streichhölzer besser sichtbar, Herbert schiebt gleichzeitig die vier Streichhölzer auf der rechten Seite wieder in die Nähe des Gleichheitszeichens*) hier vier drau-ßen hatten-

149 L: (*Sabine schaut wieder nach vorne*) Wie vier komm zur Seite-

150 SBN: (*zeigt auf die vier Streichhölzer auf der rechten Seite*) Ja vier Streichhölzer (*zeigt auf die vier Streichhölzer auf der linken Seite der Gleichung und bewegt die Hand hin und her*) hier- (*hält die Hand nun still, immer noch auf die Streichhölzer zeigend, schaut zur Lehrerin auf*) ,weil die ja (*schiebt die vier Streichhölzer auf der linken Seite in die Nähe des Gleichheitszeichens, beide Häufchen liegen jetzt etwa in gleichem Abstand auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens*) auch draußen sind- (unverständlich)

151 L: (*teilweise gleichzeitig*) Und die- (*beugt sich vor und schiebt die Streichhölzer auf der linken Seite etwas nach oben*) packt ihr weg oder wie-

152 SBN: Ja ,einfach zur Seite- (*beugt sich vor und schiebt die Streichhölzer auf der rechten Seite ebenfalls nach oben, die Lehrerin legt kurz ihre Hand auf Sabines, zieht sie dann zurück, steht jetzt wieder mit auf den Knien aufgestützten Armen zwischen den beiden Schülern*)

153 L: Weg ,alles klar weg (unverständlich) (*zieht sich wieder zurück*)

154 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Und dann ham wir (*zeigt auf die 15 Streichhölzer, die noch vor Herbert liegen, und die immer noch zwischen seinen Händen liegen*) da noch fünfzehn und fünfzehn (*hebt die drei Schachteln, auf denen sie immer noch ihre linke Hand liegen hatte, kurz an und schlägt sie auf den Tisch*) geteilt durch drei sind fünf.

155 L: (*teilweise gleichzeitig, richtet sich auf*) Nee nee nee stopp stopp stopp stopp. ,wir ham hier jetzt noch (*schiebt die Schachteln auf der linken Seite der Gleichung zusammen*) fümf Schachteln und (*legt die Hand auf die 15 Streichhölzer auf der rechten Seite und schiebt sie etwas in Richtung Mitte*) da noch fümzehn Streichhölzer.

156 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Ja aber (*legt die linke Hand auf die zwei oberen Schachteln auf der linken Seite der Gleichung*) die Schachteln (*beugt sich über den Tisch und legt die rechte Hand auf die zwei Schachteln auf der rechten Seite, schiebt sie etwas nach oben*) zähln wir nich mit weil (*bewegt die rechte Hand zwischen der linken und der rechten Seite der Gleichung hin und her*) wir ja wissen-

157 L: (*teilweise gleichzeitig, beugt sich vor und schiebt beide Stapel etwas nach oben, mit hoher Stimme*) Ach so ,die kann man (*schaut Sabine an*) auch wegt-u-n-

158 SBN: (*mit ähnlich hoher Stimme, legt ihre linke Hand wieder auf die verbleibenden Schachteln auf der rechten Seite*) Ja-

159 L: So- ,nochmal zwei Schachteln weg (*schaut Herbert an, der regungslos aufgestützt dasitzt, Sabine legt ihre rechte Hand neben die Streichhölzer auf der rechten Seite*) ,also auf beiden Seiten gleich viele Schachteln weg-

160 HBT: (*richtet seinen Kopf auf*) Ja.

161 SBN: (*hebt die rechte Hand kurz an und schlägt mit dem Handrücken auf den Tisch*) Ja und dann-

162 L: (*beugt sich vor und rückt die Streichhölzer auf der rechten Seite und die Schachteln auf der linken Seite etwas in Richtung des Gleichheitszeichens*) So und dann-

163 SBN: (*bewegt die linke Hand auf und ab*) Fünfzehn geteilt durch drei sind (*bewegt die linke Hand zum Gesicht*) fünf-

164 L: (*schaut Sabine an*) Ja. ,is doch gut.

165 SBN: (*bewegt beide Arme zum Körper und lässt die Hände zusammenklatschen, Herbert sitzt weiterhin aufgestützt da, schaut jetzt zu Sabine*) ‚dann sind in jeder fünf- (*schaut zur Lehrerin auf*)
166 L: So Schritt für Schritt. (*schaut Herbert an, hält ihren rechten Zeigefinger an den linken Daumen*) ‚erst'
167 HBT: (*senkt den Blick, schaut dann nach vorn*) Ä-h- ‚vier Str-
168 SBN: (*gleichzeitig, nimmt den Stift in die Hand*) Teiln wir die auf.
169 HBT: (*die Lehrerin schaut weiterhin Herbert an*) Ä-h ‚ham wir-
170 L: Ganz allgemein. (.)
171 HBT: (*verknotet seine Arme, schaut zur Lehrerin auf*) Ähm ‚neunzehn minus vier-
172 L: (*schaut auf ihren Daumen, scheint mit dem Zeigefinger etwas zu kratzen, schüttelt den Kopf*) Nee ganz allgemein. (*deutet mit der rechten Hand unbestimmt auf die rechte Seite der Gleichung, kratzt sich dann wieder am Daumen*) ‚es könn ja auch fümunzwanzich (unverständlich) bei der nächsten Gleichung.
173 SBN: (*teilweise gleichzeitig, Herbert und die Lehrerin schauen sie an*) Sie habengenausoviele Streichhölzer (*hält den Stift senkrecht, macht dann eine bogenförmige Bewegung nach links, die Lehrerin richtet sich auf, lässt die Handflächen nach vorn fallen, Sabine schaut zu ihr auf, Herbert schaut weiterhin Sabine an*) wie auffa anderen Seite weggelecht.
174 L: (*wiederholt die Geste*) So was habt ihr dann gemacht- (*hält ihren rechten Zeigefinger gegen den linken Zeigefinger, schaut Sabine an, Herbert gähnt*)
175 SBN: Danach ham wir-
176 HBT: Wir v gleichviele äh- (*leiser*) Kästchen weggepackt.
177 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Nein nein danach ham wir (*zeigt mit dem Stift erst auf die rechte Seite der Gleichung, dann kurz auf die linke, dann wieder auf die rechte*) die gleichen Kästchen weggebracht- (*schaut zur Lehrerin auf*)
178 L: (*nickt*) Gleich viele Streichholzschachteln.
179 SBN: Ja.
180 HBT: (unverständlich)
181 SBN: Und danach ham wir (*tippt mit dem Stift auf den Tisch in der Nähe der 15 Streichhölzer*) ‚die Streichhölzer' geteilt durch (*legt den Stift so auf den Tisch, dass er auf die Streichholzschachteln auf der linken Seite zeigt*) die Kästchen genomm.
182 L: (*nickt*) Ja gut. (*streicht Sabine eine Strähne aus dem Gesicht*)
183 SBN: (*klatscht in die Hände, mit hoher, sich überschlagender Stimme*) Huuuu-
184 L: Und was habt ihr ganz am Anfang gemacht'
185 SBN: (*streicht sich selbst die Strähne entlang, die die Lehrerin gerade gerichtet hat*) Scheiße.
186 L: (*gleichzeitig*) Da habt ihr das noch- hier sortiert ne- (*legt einige der Streichhölzer auf der rechten Seite in etwa parallel nebeneinander, schaut Herbert an*)
187 SBN: Ja.
188 L: So hingelegt. (*geht weg, legt dabei kurz ihre linke Hand auf Herberts Schulter*)
189 SBN: (*rückt auf ihrem Stuhl zurück, hebt ihre Tasche auf ihren Schoß*) Wir ham n Scheiß Digger. ‚yeah Herb-e-r-t-

> 190 HBT: (*gleichzeitig, reibt sich die Hände*) Whuuuu- (unverständlich) (*hebt seine Tasche an und legt sie auf seinen Schoß*)
> 191 SBN: Jetzt könn wir aufschrei-b-ö-n-
> 192 HBT: (*schaut Sabine an*) Oh n-ö- (..)
> 193 SBN: (*zieht ihren Block aus ihrer Taschen hervor und wirft ihn auf den Tisch, mit hoher Stimme*) Ah wir sind so gut-

In einem ersten Anlauf (136-143) beschreiben Sabine und Herbert lediglich das Entfernen der vier Streichhölzer und die abschließende Division, es bleibt unklar, wie sie auf den Divisor kommen, auch auf Begründungen verzichten sie komplett. Die Lehrerin unterbricht Sabine (144), woraufhin Herbert von vorne beginnt. Im zweiten Durchgang (145-165) fordert die Lehrerin immer wieder Begründungen und Präzisierungen ein und liefert teilweise passende Formulierungen. Wieder muss sie Sabine davon abhalten, vorschnell zur Division zu kommen (154-155). Insgesamt lässt sich folgende Beschreibung des Vorgehens beim Lösen von Streichholzschachtelgleichungen rekonstruieren:

1. Auf beiden Seiten werden vier Streichhölzer zur Seite gelegt, weil dies die Anzahl der Streichhölzer ist, die auf der linken Seite offen vorliegen. (148-153)

2. Zwei der fünf Schachteln auf der linken Seite werden nicht beachtet (156) bzw. (nach Intervention der Lehrerin, 157) ebenfalls zur Seite gelegt. Eine Begründung bleibt hier aus, weil Sabine von der Lehrerin unterbrochen wird (156/157).

3. Schließlich wird 15 : 3 gerechnet, um die Anzahl der Streichhölzer pro Schachtel zu berechnen (162-165).

Hieran anknüpfend leitet die Lehrerin Sabine und Herbert an, eine allgemeine Beschreibung zu liefern, die sich folgendermaßen zusammenfassen lässt:

1. Auf beiden Seiten werden gleich viele Streichhölzer zur Seite gelegt (173).

2. Auf beiden Seiten werden gleich viele Schachteln weggelegt (174-178).

3. Die (Anzahl der) Streichhölzer wird durch die (Anzahl der) Schachteln geteilt (181).

Diese Anleitung liest sich in Sabines Aufzeichnungen wie in Abbildung 5.1 auf Seite 122 dargestellt (Herberts Beschreibung weicht davon nur leicht ab).

Weitere Entwicklung

In der Folge arbeiten Sabine und Herbert weitgehend unabhängig voneinander die gestellten Aufgaben durch. Dabei ist Sabine deutlich schneller und kann daher sogar die zusätzlich gestellten Probleme bearbeiten. Die Art und Weise, wie die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsprozesse notierten, war zunächst nicht vorgegeben. Herbert und Sabine legten sich schnell auf eine Notation fest, die in den Abbildungen 5.2 und 5.3 auf Seite 123 exemplarisch dargestellt ist: Die Anzahlen der Streichhölzer und der Schachteln werden auf jeder Seite

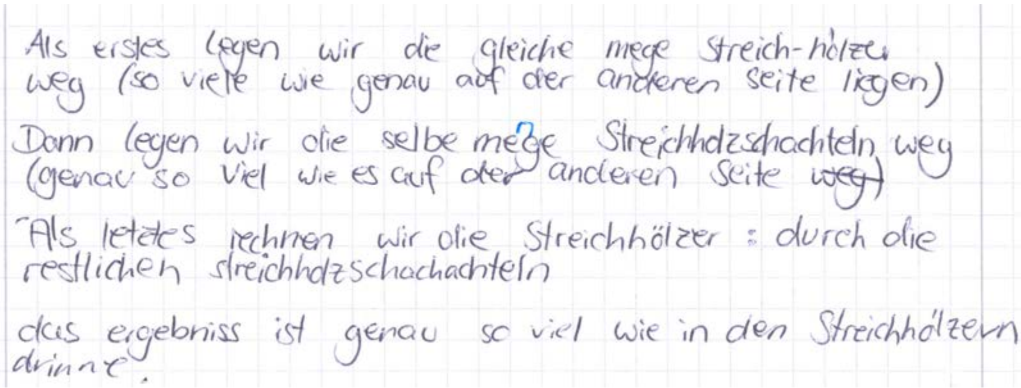

Als erstes legen wir die gleiche mege Streich-hölzer weg (so viele wie genau auf der anderen Seite liegen)
Dann legen wir die selbe mege Streichholzschachteln weg (genau so viel wie es auf der anderen Seite ~~weg~~)
Als letztes rechnen wir die Streichhölzer : durch die restlichen streichholzschachachteln
das ergebniss ist genau so viel wie in den Streichhölzern drinne.

Abbildung 5.1.: Sabines Beschreibung des Vorgehens beim Lösen von Streichholzschachtelgleichungen

des Gleichheitszeichens übereinander notiert. Das „Wegnehmen“ wird jeweils als Rechnung notiert, die sich daraus ergebende Gleichung aber nicht aufgeschrieben. Stattdessen folgt die Division der Zahl, die sich aus der Verrechnung der Streichhölzer ergeben hat, durch das Resultat bei den Schachteln. Am Ende steht jeweils ein Antwortsatz.

Die dritte Stunde der Unterrichtseinheit, in der die Klasse zum zweiten Aufgabenblatt übergeht, auf dem es um Gleichungen mit nicht-ganzzahligen Lösungen geht, verpasst Sabine krankheitsbedingt. Im Folgenden wird wiedergegeben, wie Herbert in der vierten Stunde der Unterrichtseinheit versucht, ihr das neu Erlernte zu vermitteln:

Episode 5.2: 111212_2_LG4_29: Nicht-ganzzahlige Lösungen

16 HBT: (*schaut auf seinen Block*) Achso ja ä-h-m- (*hat den Mund weit offen*) (4sec) ,ja. ,so wasn jetzt übrig. (*die Lehrerin macht eine Ansage, Sabine schaut auf zu ihr, hält dabei Herbert ihren Taschenrechner hin, dieser schaut entweder auf den Taschenrechner oder auf ihren Block*) (.) (*zeigt kurz unbestimmt auf den Taschenrechner oder auf den Block, Sabine schaut wieder auf ihren Block*) ,ja jetzt musst du ausrechnen-

17 SBN: Ja wie denn’ (*bewegt ihre Hände auseinander, schaut Herbert an*)

18 HBT: Ja wie das normal auch ausgerechnet hast. (*schaut kurz Sabine an, dann wieder auf den Block*)

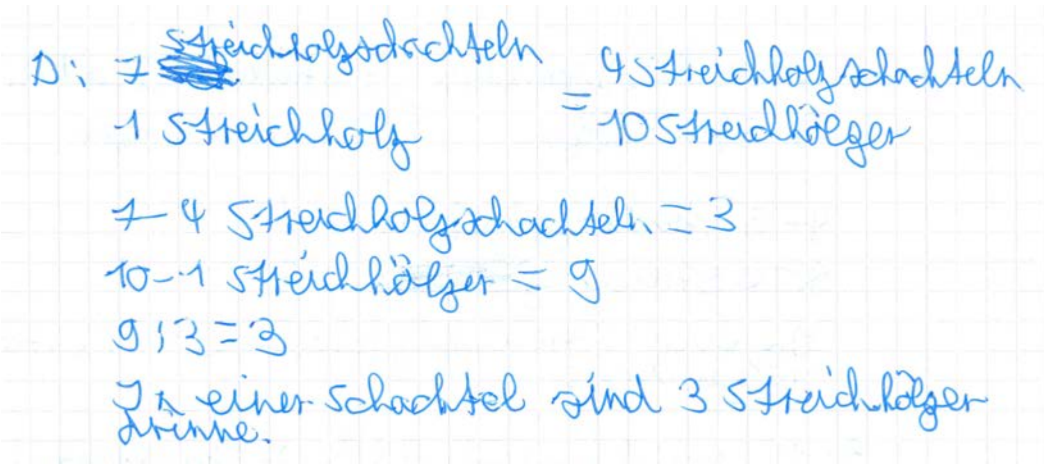
19 SBN: Ja aber das is (*zeigt auf eine Stelle links auf dem Block, hebt dann den Stift leicht an*) ich kann doch nich fünf gete-i ,geteilt durch vier nehm. (*schaut Herbert an*)

20 HBT: (*zeigt auf das Geschriebene oberhalb der Stelle, auf die Sabine zuvor gezeigt hat*) Jo was das für ne Rechnung-

21 SBN: (*zeigt und schaut kurz in Richtung der Tafel*) Ja so- (*schaut Herbert an*)

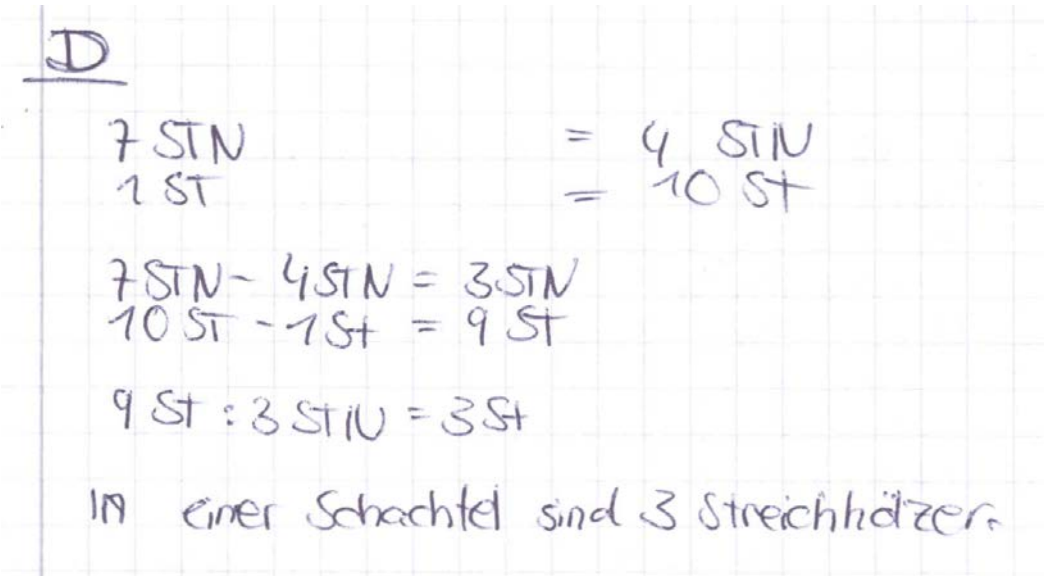
22 HBT: (*schaut auf den Block, mit gespitztem Mund*) Uchuchuchu. (*lächelt kurz, schaut dann auf seinen Block*) ,okay. ,äh ja. (*schaut wieder auf Sabines Block*) ,ja machst du einfach ja (*schiebt seine Hand unter Sabines Hände und zeigt auf eine Stelle auf dem Block*) vierzehn minus da- ,äh wieso plus.

23 SBN: (*Sabine zeigt mit dem Stift auf die Stelle, auf die Herbert vorher gezeigt hat, erst*



D: 7 Streichholzschachteln = 4 Streichholzschachteln
1 Streichholz = 10 Streichhölzer
7 - 4 Streichholzschachteln = 3
10 - 1 Streichhölzer = 9
9 : 3 = 3
In einer Schachtel sind 3 Streichhölzer drinne.

Abbildung 5.2.: Herberts Bearbeitung der Aufgabe D von Aufgabenblatt 1



D
7 STN = 4 STN
1 ST = 10 St
7 STN - 4 STN = 3 STN
10 ST - 1 St = 9 St
9 St : 3 STN = 3 St
In einer Schachtel sind 3 Streichhözer.

Abbildung 5.3.: Sabines Bearbeitung der Aufgabe D von Aufgabenblatt 1. Bis auf diese und eine weitere Ausnahme verwendet sie allerdings wie Herbert nur ein Gleichheitszeichen in der Ausgangsgleichung.

mit dem Stift und dann mit beiden Zeigefingern) Nein das sind jetzt die Streichhölzer hier. ‚weißt du' (*schiebt den Block etwas zu Herbert, der rechte Zeigefinger bleibt auf dem Block, bewegt die Finger der linken Hand tastend auf die Mappe, zeigt auf die linke Seite einer der Gleichungen auf dem zweiten Aufgabenblatt*) ‚auf dieser Seite- sind nur die Streichhölzer (unverständlich)- (*klopft einige Male auf die Stelle, auf die sie zuvor gezeigt hat, schaut auf Herberts Block*)

24 HBT: (*legt seinen Block neben seine Mappe, zeigt bei sich auf die gleiche Stelle auf dem Aufgabenblatt wie Sabine bei sich*) (..) Di- (*geht mit dem Zeigefinger auf dem Blatt entlang, Sabine bewegt ihren Stift auf Herberts Seite und versucht von oben dazwischenzukommen*) ‚also zwei vier sechs acht zehn zwölf- (*bewegt den Finger noch ein Stück weiter, hält inne*) (.)

25 SBN: (*setzt ihren Stift neben Herberts Hand*) Was laberst du-

26 HBT: (*teilweise gleichzeitig*) Vierzehn (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) ‚da sind vierzehn.

27 SBN: Ja.

28 HBT: (*bewegt den Stift nach rechts, nuschelt*) Und hier sin nu-

29 SBN: (*teilweise gleichzeitig, zeigt nochmals mit dem Stift auf die linke Seite*) Und neun Streichhölzer. (.) (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung in ihrem Block, Herbert zeigt weiterhin auf die rechte Seite auf dem Aufgabenblatt, schaut auf seinen Block*) ‚deswegen plus neun also- (*macht eine drehende Handbewegung mit dem Stift, zeigt dann ruckartig mit dem linken Arm auf die Tafel, Herbert schaut weiterhin auf seinen Block*) ‚da hat sie auch plus-Streichhölzer-

30 HBT: (*schiebt seine Mappe etwas zu Sabine*) Ja. (*nuschelt*) ‚dann heißt das ja (*zeigt erst nur mit dem rechten, dann auch mit dem linken Zeigefinger auf die rechte Seite der Gleichung auf dem Aufgabenblatt*) ‚genau. ‚das hier minus- ‚was auch hier is. (*schaut Sabine an*) ‚also (*zeigt mit beiden Fingern kurz auf die linke Seite*) virzehn minus (*zeigt wieder auf die rechte Seite*) neun.

31 SBN: (*teilweise gleichzeitig, zeigt auf ihr Geschriebenes*) Ja hab ich ja. (*bewegt den Stift auf die linke Seite der Gleichung*)

32 HBT: (*zeigt weiterhin mit beiden Fingern auf die rechte Seite, schaut auf Sabines Block*) Ja (*bewegt den linken Zeigefinger schnell nach links und zurück, löst dann die Zeigegeste auf*) ‚minus neun. ‚wieviel sind das- (schaut Sabine an)

33 SX1: (*außerhalb des Bildbereichs*) Fünf-

34 SBN: Fünf. (*bewegt den Stift noch einmal ruckartig auf das Geschriebene, auf das sie gerade zeigt und dann zur Seite*)

35 L: (*außerhalb des Bildbereichs, arbeitet wahrscheinlich unabhängig mit SX1*) Ja fünf-

36 HBT: (*nickt*) Ja. gut. (*zeigt unbestimmt auf die linke Seite der Gleichung auf seinem Aufgabenblatt*) ‚und Streichhölzer. (*zeigt mit dem linken Zeigefinger auf die linke Seite der Gleichung auf dem Aufgabenblatt, schaut auf seinen Block*) ‚auf der Seite sind das- (*schaut auf das Aufgabenblatt, hebt den Finger kurz und lässt ihn auf das Blatt schnellen*) dreizehn. (*bildet mit der linken Hand eine Faust, bewegt diese beim Reden aus dem Handgelenk auf und ab, Sabine bewegt ihren Stift entlang ihres Geschriebenen*) auf der andern sind das neun (*schaut Sabine an*) w was hattes du dann noch-

37 SBN: Streichhölzer' ‚auf der einen Seite hab ich vier.
38 HBT: (*bewegt weiterhin seine Faust aus dem Handgelenk auf und ab, während er redet*) Gut. ‚dann musst du jetz äh. (*hebt die Faust richtig an und lässt sie weiter vorne auf den Tisch fallen*) ‚fü äh- (*schaut auf seinen Block, haut dann nochmals auf den Tisch*) ‚vier durch fünf machen. (*schaut Sabine an*)
39 SBN: (*nimmt ihren Taschenrechner*) Wieso vier durch fünf. (*tippt etwas in den Taschenrechner*) ‚vier- (...) (*hebt den Taschenrechner kurz an, lässt ihn dann auf den Tisch fallen, schaut Herbert an*) ‚da kommt null komma acht raus.
40 HBT: (*schaut Sabine an*) Ja.
41 SBN: Ist das richtich'
42 HBT: (*nickt einmal*) Ja-
43 SBN: (*nickt einmal*) Sicher'
44 HBT: Weils n Bruch is.
45 SBN: (*atmet tief ein*) A-a-h- (*schreibt in einer neuen Zeile „$= 0,8$“*) ‚gl-e-ich- null komma acht. ‚jetzt bin ich auch bei D.

Zunächst orientiert sich Herbert in Sabines Aufzeichnungen (16). Aus seiner Sicht muss Sabine ganz genau wie bei allen anderen Gleichungen auch vorgehen: „Ja wie das normal auch ausgerechnet hast.“ (18) Sabines hat damit jedoch ein Problem: „ich kann doch nich fünf gete-i ‚geteilt durch vier nehm.“ (19)[1] Herbert muss nun erst einmal anhand ihrer Erläuterungen Sabines Notationssystem verstehen, das sie in dieser Phase der Unterrichtseinheit nutzt (20-30). Es besteht darin, dass sie die Anzahlen der Streichhölzer und Streichholzschachteln in einem Raster anordnet und daher auf eine anderweitige Markierung (etwa durch Abkürzungen) verzichten kann. Abbildung 5.4 illustriert dieses Notationssystem anhand des Lösungsprozesses, über den Sabine und Herbert hier reden. Herbert bemüht sich, die Aufgabe auf dem Aufgabenblatt, seine Aufzeichnungen und die von Sabine in Übereinstimmung zu bringen.

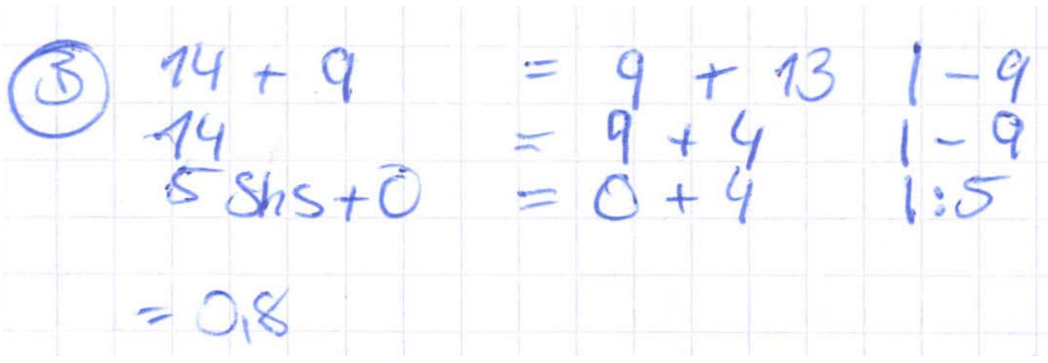


Abbildung 5.4.: Sabines Lösung zu Aufgabe D von Aufgabenblatt 2. Die erste Zahl gibt jeweils die Anzahl der Streichholzschachteln an, die zweite die Anzahl der Streichhölzer. Von diesem Notationssystem rückt Sabine bald wieder ab.

[1] Dass die Rechnung eigentlich 4 : 5 sein müsste, wird nicht thematisiert. Eventuell meint Sabine dies sogar: In späteren Episoden zeigt sich, dass sie den Divisor zuerst nennt.

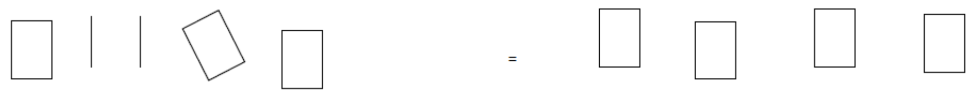
A 

Abbildung 5.5.: Aufgabe A von Aufgabenblatt 1

Dann leitet er aus seinen eigenen Aufzeichnungen das Wegnehmen her, zunächst für die Schachteln: „‚das hier minus- ‚was auch hier is. (*schaut Sabine an*) ‚also (*zeigt mit beiden Fingern kurz auf die linke Seite*) virzehn minus (*zeigt wieder auf die rechte Seite*) neun.“ (30). Nachdem er merkt, dass Sabine diese Rechnung bereits durchgeführt hat (31-36), gleicht er mit ihr noch ab, ob auch die Rechnung für die Streichhölzer mit seiner übereinstimmt (36-38). Daran anschließend sagt Herbert: „‚dann musst du jetzt äh. ‚fü äh- ‚vier durch fünf machen.“ (38) Eine Begründung gibt er nicht. Sabine fragt zwar explizit „Wieso vier durch fünf.“, führt dann aber unmittelbar die Rechnung mit dem Taschenrechner durch. Sabine versichert sich bei Herbert dreimal, dass das Ergebnis der Rechnung (und damit die Lösung der Streichholzschachtelgleichung) tatsächlich 0,8 ist (39-43). Schließlich sagt Herbert: „Weils n Bruch is.“ (44), woraufhin Sabine aufschreibt und zur nächsten Aufgabe übergeht (45). Sabine bereitet die Bearbeitung von Gleichungen mit nicht-ganzzahligen Lösungen in der Folge keine erkennbaren Probleme, nachdem einmal geklärt ist, dass diese Ergebnisse zulässig sind.

Einführung der symbolisch-algebraischen Schreibweise

Obwohl Sabine eine Stunde verpasst, ist sie in der Folge erfolgreicher bei der Bearbeitung der gegebenen Aufgaben als Herbert. Insbesondere gelingt ihr der Übergang zur symbolisch-algebraischen Notation besser. Bei beiden sind jedoch Schwierigkeiten zu beobachten, die an jeweils einer Episode illustriert werden sollen.

Herberts Probleme sind elementar. In der Episode, die dies illustriert, geht es darum, die Gleichung A von Aufgabenblatt 1 (siehe Abbildung 5.5) in symbolisch-algebraischer Schreibweise zu notieren und zu lösen. Herbert spricht Sabine an und möchte seine Bearbeitung der Aufgabe mit ihr abgleichen.

Episode 5.3: 111213_2_LG5_27: Herberts Problem mit dem x

10 HBT: Äh’
11 L: (*steht am Pult, vor dem Tisch der beiden Schüler*) Genau.
12 SBN: (*schaut Herbert an*) J-a’
13 HBT: (*schaut Sabine an*) Ja. (*Sabine setzt den Stift an und beginnt oben auf dem Block zu schreiben*) ‚plus zwei. ‚also-
14 SBN: (*schreibt*) Was l-aberst du Mann-
15 HBT: Also zwei mal-
16 SBN: (*gleichzeitig, redet fast ohne Unterbrechung durch, setzt den Stift ab, gestikuliert mit dem Stift in der Hand, schaut weiterhin auf das Blatt*) Zwei in einer Schachtel.

17 HBT: (*schaut Sabine an*) Ja. (*Sabine setzt den Stift wieder an, schreibt aber nicht*) zwei x in einer Schachtel- ‚oder'
18 SBN: (*hält den Stift weiterhin über dem Blatt, schaut Herbert an*) Zwei x gleich eins-
19 HBT: (*schaut weiterhin Sabine an*) Ja-
20 SBN: (*schaut wieder nach vorne*) Nee zwei ick- (*lacht, schaut Herbert an*) ‚ein x gleich zwei- (lacht) (.)
21 HBT: (*lächelt verlegen*) Hä-
22 SBN: (*teilweise gleichzeitig, lacht weiterhin, haut mit der Hand auf den Tisch*) Nich zwei x gleich eins-
23 HBT: (*lacht, schaut auf seinen Stift und setzt die Kappe darauf*) Watt. ‚du bringst mich jetzt voll durcheinander- (*Sabine lacht, Herbert schaut sie an*) (.) ‚du meinst zwei x gleich zwei meinst du ja-
24 SBN: (*bewegt den Stift in der rechten Hand etwas nach rechts*) Ein x gleich zwei- (*schaut Herbert an*)
25 HBT: (*quakend, gestikuliert verhalten mit dem Stift*) Wieso ein x gleich zwei'
26 SBN: (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung oben auf ihrem Blatt, schaut kurz dorthin*) Weil ich ein x noch hab- (*schaut Herbert an*) (.) ‚am Ende- (*beugt sich über das Blatt und schreibt oben auf dem Blatt weiter, Herbert bewegt seinen Stift in die gleiche Richtung*) (..)
27 HBT: (*dreht den Stift von Sabines Hand weg, Sabine schreibt weiter*) Ja ein x durch zwei-
28 L: (*teilweise gleichzeitig, von vorne, laut*) Ich krieg noch Entschuldigungn-
29 SBN: (*setzt den Stift ab, beide Schüler schauen nach vorne*) Oh verdammt.

Herbert gelingt es zunächst nicht, seine Frage verständlich zu formulieren. Stattdessen sagt Sabine vor, allerdings noch im ursprünglichen Tätigkeitskontext: „Zwei in einer Schachtel." (16) Herbert fragt nach: „zwei x in einer Schachtel- ‚oder'" (17) Nun, da Herbert die Variable ins Spiel gebracht hat, nennt Sabine die Lösung in symbolischer Schreibweise (20), allerdings erst nachdem sie sich bei einem ersten Anlauf verspricht („Zwei x gleich eins-", 18). Herbert wirkt daraufhin verwirrt (21-24) und fordert schließlich eine Begründung (25). Zu diesem Zweck wendet sich Sabine erstmals der Gleichung zu, wie sie sie in ihren Aufzeichnungen bearbeitet hat (siehe Abbildung 5.6 auf Seite 128): Sie weist darauf hin, dass sie auf der einen Seite des Gleichheitszeichens „ein x noch" (26) hat. Herbert kann dem offenbar nicht folgen, er antwortet: „Ja ein x durch zwei-" (27) Die Interaktion zwischen Sabine und Herbert bricht letztlich ab, weil die Lehrerin daran erinnert, dass sie von einigen Schülerinnen und Schülern noch Abwesenheits-Entschuldigungen bekommt und Sabine davon betroffen ist (28-29).

Es lässt sich resümieren, dass Herbert schon in der Formulierung seiner Frage an Sabine Probleme hat. Seine ersten beiden Anläufe, „„plus zwei." (13), „Also zwei mal-" (15) sind beide nur im Kontext verständlich. Nur weil Sabine weiß, dass es um Aufgabe A geht, kann sie antworten (16). Herbert gelingt hier noch nicht der Übergang vom ursprünglichen Tätigkeitskontext (Streichholzschachtelgleichungen) zu den symbolischen Gleichungen. Die Variable ist für ihn ein völlig anderes Objekt als die Streichholzschachteln, dementsprechend kann er anders als Sabine seine Fähigkeiten nicht anwenden, die er eigentlich schon erworben hatte.

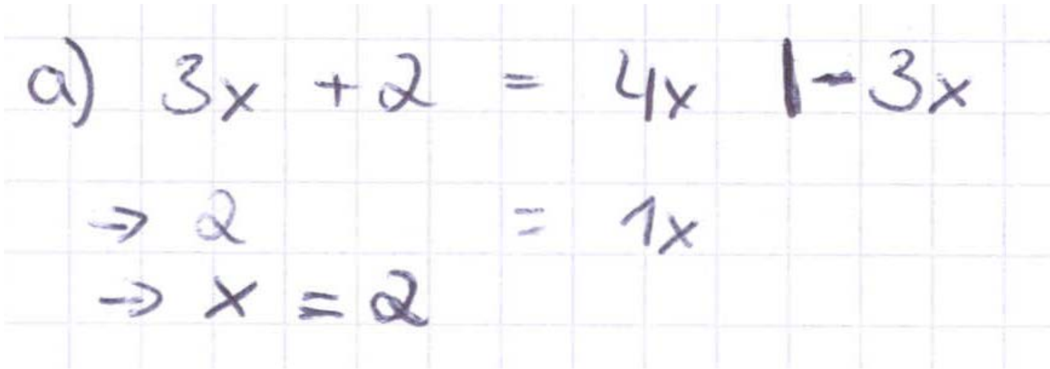


Abbildung 5.6.: Sabines Bearbeitung der symbolisch-algebraisch dargestellten Darstellung von Gleichung A von Aufgabenblatt 1

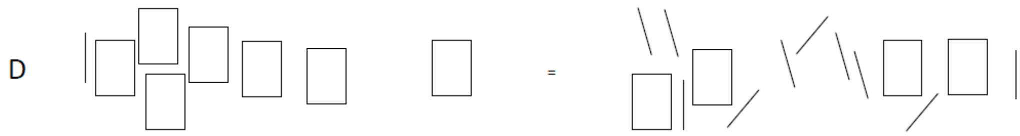


Abbildung 5.7.: Aufgabe D von Aufgabenblatt 1

Sabine kann zwar Gleichungen in Serie lösen, doch auch bei ihr treten Probleme auf, deutlich sichtbar in der folgenden Episode aus der sechsten Unterrichtsstunde. Ahmed steht hier an der Tafel, er hat die Gleichung $7x + 1 = 4x + 10$ (die symbolisch-algebraische Darstellung von Gleichung D von Aufgabenblatt 1, siehe Abbildung 5.7) so weit umgeformt, dass nun $3x = 9$ zu lösen ist.

Episode 5.4: 111216_2_LG6_4: Durch was wird geteilt?

1 L: (*sitzt auf Ahmeds Stuhl im Bildhintergrund*) Schreib ,das kann man wieder an die Seite schreiben durch was geteilt werden soll-
2 SBN: (*gleichzeitig dazwischen*) Geteilt durch x-
3 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Genau einfach geteilt durch-
4 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) drei x- (*jemand, vieleicht Ahmed, äußert sich unverständlich, Ahmed schreibt dann an der Tafel „: 3“*) (4sec)
5 L: Ja.
6 SBN: x. (.)
7 L: Nee.
8 SBN: (*gleichzeitig*) Ne- (*mit hoher Stimme*) ,doch’
9 L: (*teilweise gleichzeitig, schüttelt langsam den Kopf*) Nur durch drei.
10 SBN: Wieso durch drei’ (*schaut in Richtung der Lehrerin*)
11 L: Weil-
12 SX: (*gleichzeitig*) Weil geteilt durch drei.
13 L: (*stützt sich mit dem rechten Arm auf, richtet sich mehr in Sabines Richtung aus*)

Warum denn nur durch drei und nich durch drei x- (*Sabine scheint zum Sprechen anzusetzen, äußert aber nur ein leises Geräusch, schaut dann wieder an die Tafel*) ,was würde denn- auf der linken Seite rauskomm wenn man durch drei x teilt- ,drei x durch drei x. (*Arnold meldet sich, macht ein leises Geräusch*)
14 SBN: Eins. (*schaut zur Lehrerin, die Lehrerin nickt Arnold zu*)
15 ANL: Ich glaub ähm- ,drei kann man nich machen weil da ja keine mehr Zahln sind ,o von den-
16 SBN: (*die Lehrerin dreht sich weiter nach vorne, in Sabines Richtung*) Ein-
17 ANL: Von den äh also-
18 HBT: (*schaut nach vorne, beide Arme aufgestützt*) Hä’
19 L: Wie- ,das hab ich noch nich-
20 ANL: (*teilweise gleichzeitig*) Also es gibs (*deutet kurz unbestimmt auf die Tafel*) ja nur neun-
21 L: (*nickt einmal*) Ja.
22 ANL: (*hebt kurz die Hand an*) Und es gibs ja nur (*schaut zur Lehrerin*) drei ickse.
23 L: (*nickt einmal*) Ja.
24 ANL: Und- man (*zeigt mit der linken Hand auf die Tafel*) ka ja- (*hält die Zeigegeste*) ,und man kann ja nich die (*lässt die Hand sinken*) drei einfach wegnehm weil da ja (*hebt kurz den linken Arm*) keine ähm- mehr vorhanden ist. (*schaut zur Lehrerin*) (.) (*zeigt mit der linken Hand auf die Tafel*) ,also-
25 SBN: (*schaut in Richtung der Lehrerin*) Ich weiß dass du falsch liegst.
26 ANL: (*teilweise gleichzeitig, gestikuliert zu den ersten beiden Worten mit der linken Hand*) Nicht. von (*macht mit beiden Händen eine wegwerfende Geste*) ,ach keine Ahnung. (*viele Schüler lachen*) (..)
27 L: (*schaut in Richtung der Tafel, legt den Kopf nach hinten, lässt ihn dann wieder in die horizontale Haltung zurückgleiten während sie spricht*) Wa-rum teile ich nich durch drei x ,sondern warum teile ich nur durch drei. (..)
28 SBN: (*rückt mit ihrem Stuhl nach vorne*) Ich hab aber drei x aufgeschrieben.
29 L: (*gleichzeitig*) Ahmed.
30 AMD: Weil ja sonst am Ende x rauskommt oder’ (.)
31 HBT: (*schaut zur Lehrerin*) Es soll ja rauskomm.
32 L: (*teilweise gleichzeitig*) Das (*nickt einmal*) soll ja auch. (*Lucas lacht auf*) ,es soll ja x rauskomm links ne’
33 AMD: Ja stimmt.
34 L: Aber was würde denn rauskomm wenn ich durch drei x teiln würde- ,würde dann auch x da rauskomm’
35 AMD: (*Sabine verdreht den Mund, schaut ins Leere nach vorne*) Eben nich. ,oder’
36 L: (*teilweise gleichzeitig*) Nee sondern’
37 AMD: Einfach nur drei’
38 L: Nee drei x durch drei x ist nich drei- (.) ,und was das denn- (*wippt mit dem rechten Bein*)
39 SBN: (*gleichzeitig, dreht sich zur Lehrerin*) Das is n x. (.)
40 L: Fünf durch fünf.

41 HBT: (*gleichzeitig, dreht sich zu Sabine, streckt sich dabei*) Das is eins. (.)
42 Mehrere SX: (*leicht gestaffelt*) Eins.
43 HBT: (*streckt sich noch immer, schaut in Richtung der Kamera, also von der Lehrerin weg, mit hoher Stimme*) Eins.
44 SX: (*gleichzeitig*) Eins.
45 L: (*schnell*) Zehn durch zehn.
46 SX: Eins.
47 HBT: (*gleichzeitig*) Eins.
48 L: Drei x durch drei x-
49 Mehrere SX: (*im Chor*) Eins.
50 SBN: (*synchron*) Eins.
51 HBT: (*synchron*) Eins.
52 L: Ah. ,und nich- ,ein x sondern nur eins ne' ,wir brauchen aber ja das x da noch. ,und wenn ich neun durch drei x teiln würde dann- wär das auch nich- (*hebt den Arm, deutet eine Zeigegeste in Richtung der Tafel an*) ,dann wär da ja wieder n x das wolln wir ja nich.
53 KZY: Also machen wir nur geteilt durch drei. (*breitet ihre Arme aus, die Handflächen nach oben*)
54 L: Ja. ,genau.
55 KZY: Habs verstanden. ,okay. (*lächelt*)
56 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Mh- (*Herbert macht ein Geräusch*)
57 AMD: Du musst irgndwie-
58 L: (*gleichzeitig, lächelt, schaut kurz zu Ahmed, dann wieder zu Kizzy, Kizzy und Kelly lachen sich an*) Immer die Zahl die vor dem x steht einfach. (*schlägt das rechte Bein über das linke*)
59 AMD: Und hier drunter muss ich dannoch- ,ä-h- ,gleich drei oder wie schreibn.
60 L: x gleich drei schreibt man dann. ,genau. (*Ahmed schreibt etwas an die Tafel*)

Sabine ist der Ansicht, das nun durch $3x$ geteilt werden müsse (4), während Ahmed von sich aus an die Tafel schreibt, dass im nächsten Schritt durch 3 geteilt wird (4-5). Die Lehrerin sagt, dass Sabine falsch liegt (7-9), woraufhin Sabine ihrerseits nach einer Begründung dafür verlangt, dass Ahmed richtig liegt (10). Die Lehrerin gibt diese Frage an die Klasse und lädt dabei zu hypothetischem Denken ein bezüglich der Frage, welches Ergebnis sich bei Division durch $3x$ ergäbe: „„was würde denn- auf der linken Seite rauskomm wenn man durch drei x teilt- ,drei x durch drei x." (13)

Sabine äußert, das Ergebnis sei 1 (14), möchte eventuell aber noch weitersprechen und $1x$ als Lösung behaupten (16, wird gestützt durch spätere Aussage, 39). Sabines Äußerungen bleiben aber von der Lehrerin unbeachtet, stattdessen findet ein Austausch mit Arnold statt (15-26). Er hat allerdings Probleme, seinen Einwand gegen eine Division zu formulieren.[2] Nachdem Arnold von sich aus seine Erklärungsversuche aufgibt (26), fragt die Lehrerin neu: „Wa-rum teile ich nich durch drei x ,sondern warum teile ich nur durch drei." (27)

[2]Es lässt sich vermuten, dass er von einer Subtraktion ausgeht, wenn er sagt: „man (*zeigt mit der linken Hand auf die Tafel*) ka ja- (*hält die Geste*) ,und man kann ja nich die (*lässt die Hand sinken*) drei einfach wegnehm weil da ja (*hebt kurz den linken Arm*) keine ähm- mehr vorhanden ist." (24)

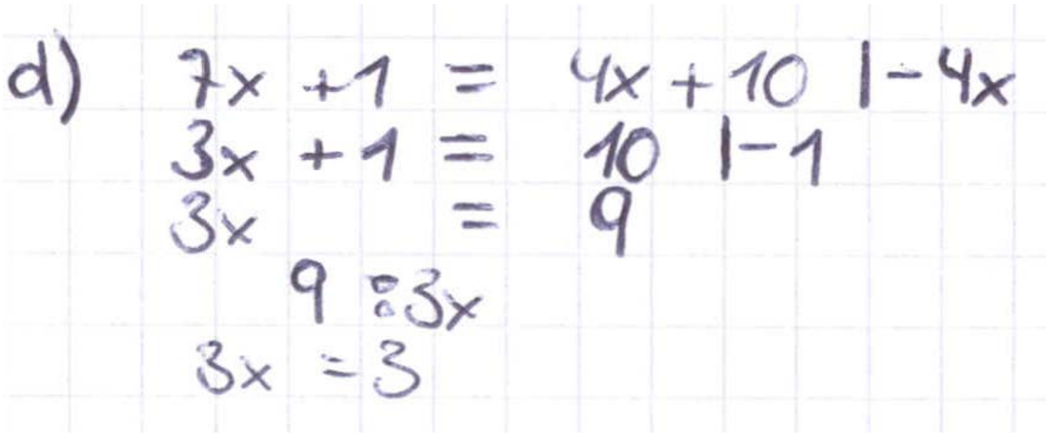


Abbildung 5.8.: Sabines Vorgehen beim Lösen von Gleichungen in symbolisch-algebraischer Schreibweise, illustriert an Aufgabe D von Aufgabenblatt 1. Vergleiche hierzu auch Abbildung 5.3.

Daraufhin verweist Ahmed (versehentlich zunächst als Negation, 30, Herbert und die Lehrerin korrigieren den Fehler, 31-32) darauf, dass man auf $1x$ kommen möchte (30-33). Die Lehrerin möchte nun zusätzlich das hypothetische Szenario problematisieren, das bei Sabines Rechnung entstünde: „Aber was würde denn rauskomm wenn ich durch drei x teiln würde- ‚würde dann auch x da rauskomm'" (34) Dabei zeigt sich, dass für die Schülerinnen und Schüler die Rechnung $3x : 3x$ schwierig ist (Äußerungen von Ahmed (37) und Sabine (39)), daraufhin leitet die Lehrerin die Lösung dieser Aufgabe per Analogieschluss über andere bekannte Rechnungen nach dem Muster „Zahl geteilt durch sich selbst" her (38-52). Die Lehrerin stellt das Ergebnis 1, das man erhielte, wenn man die linke Seite durch $3x$ teilen würde, dem eigentlichen Ziel entgegen: „wir brauchen aber ja das x da noch." (52) Die Auswirkungen auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens, wo $9 : 3x$ gerechnet werden müsste, bezeichnet sie ebenfalls als unerwünscht, bricht aber deren konkrete Berechnung ab (52).

Kizzy fragt abschließend: „Also machen wir nur geteilt durch drei." (53) Die Lehrerin bestätigt dies (54) und setzt als Fazit die Aussage „Immer die Zahl die vor dem x steht einfach." (58) Auf Nachfrage von Ahmed, der weiterhin an der Tafel steht, erklärt die Lehrerin , wie die neue Zeile zu notieren ist: „x gleich drei schreibt man dann. ‚genau.", was Ahmed dann umsetzt (60).

Ein Blick in Sabines Unterlagen zeigt, dass die Schülerin bei sämtlichen Aufgaben die abschließende Division so durchgeführt hat, wie sie es beschreibt – Abbildung 5.8 zeigt das in der dargestellten Episode besprochene Beispiel. Dies lässt sich zurückführen auf das Verfahren, das sie bei den Streichholzschachtelgleichungen angewendet hat. Hier bestand der letzte Schritt stets darin, die *Anzahl der Streichhölzer* durch die *Anzahl der Streichholzschachteln* zu teilen. Sabine hatte dies allerdings folgendermaßen aufgeschrieben: „Als letztes rechnen wir Streichhölzer : durch die restlichen Streichholzschachteln" (siehe Abbildung 5.1 auf Seite 122). Die Unterscheidung zwischen den Objekten und ihrer Anzahl fehlt. Die durchgeführte Rechnung war dabei stets numerisch korrekt, und die verbale

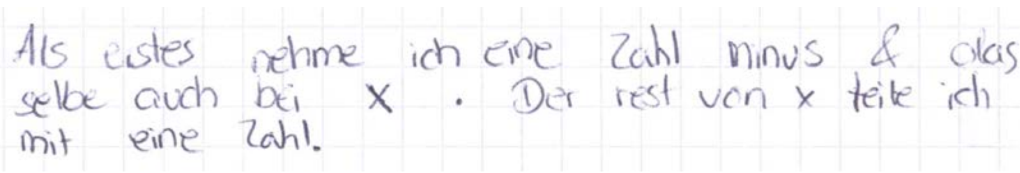


Abbildung 5.9.: Sabines Beschreibung des Vorgehens beim Lösen von Gleichungen in symbolisch-algebraischer Darstellung

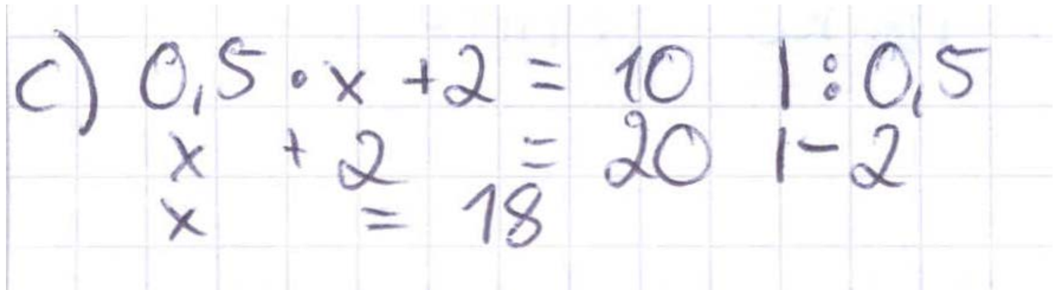


Abbildung 5.10.: Sabines Bearbeitung von Aufgabe 18 c), Seite 28 im Buch (Böer et al., 2008)

Interpretation im Kontext der Streichholzschachtelgleichungen (vgl. Abbildung 5.3 auf Seite 123) gleicht die sprachliche Ungenauigkeit aus. Wenn man das Verfahren aber nun auf die symbolisch-algebraischen Gleichungen überträgt, lautet die direkte Übersetzung: „Als letztes rechnen wir die Zahl durch den Variablenterm.“ Dies ist allerdings nur Sabines implizite Annahme, die sich aus ihren Aufgabenbearbeitungen rekonstruieren lässt; die Beschreibung, die sie aufschreibt, ist deutlich ungenauer, wie sich in Abbildung 5.9 erkennen lässt: „Der rest von x teile ich mit eine Zahl.“ Die längere Beobachtung legt nahe, dass Sabine bei der Beschreibung von Divisionsrechnungen genau anders herum formuliert, wie es üblich ist; „ich teile a mit b“ bedeutet also, dass b durch a geteilt wird. Gemeint ist hier also, dass „eine Zahl“ durch „den Rest von x“ dividiert wird. Es bleibt implizit, dass die nicht näher benannte Zahl die allein stehende Zahl auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens ist – in der in Abbildung 5.8 bearbeiteten Gleichung die Zahl 9. Diese Zahl wird durch „den Rest von x“ geteilt, und zwar mit der Variablen als Teil des Divisors (im Beispiel $3x$).

Bei der Bearbeitung einer Aufgabenserie aus dem Buch, die Sabine ohne nennenswerte Interaktion mit Mitschülerinnen und Mitschülern bearbeitet, gerät die Reihenfolge der durchzuführenden Umformungen offenbar völlig in Vergessenheit (siehe als Beispiel Abbildung 5.10). Die hier auftretenden nicht-ganzzahligen Faktoren vor der Variablen nehmen offenbar Sabines Aufmerksamkeit so sehr in Beschlag, dass sie die Division durch den Faktor vor der Variablen zuerst durchführt. Weil diese Division nicht als Äquivalenzumformung aufgebaut wurde, wird sie zwar auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt, aber nicht auf den nun noch vorhandenen Skalar auf der gleichen Seite angewendet.

Weitere Aufgaben, die nicht die Schwierigkeit von nicht-ganzzahligen Faktoren vor der Variablen aufweisen, löst Sabine jedoch sicher. Sie kann Fehler in fremden Lösungen identifizieren und löst beim Spiel „Einpacken und Auspacken“ die kompliziertesten Gleichungen, die in der Klasse aufgestellt wurden.

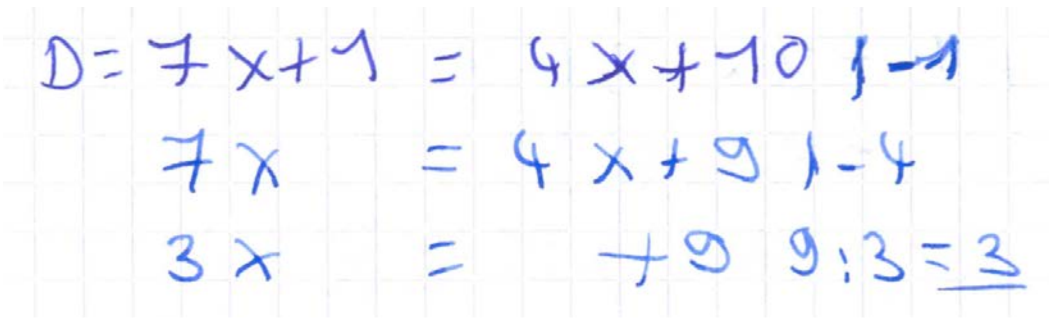


Abbildung 5.11.: Herberts Vorgehen beim Lösen von Gleichungen in symbolisch-algebraischer Schreibweise, illustriert an Aufgabe D von Aufgabenblatt 1

Zeitungsverkäuferin

Frau Bellmann verkauft an ihrem Kiosk verschiedene Zeitungen. Ihr Hauptgeschäft macht sie mit dem Aller-Boten. Sie hat festgestellt, dass sie gut über die Runden kommt, wenn am Ende etwa 250€ pro Woche übrig bleiben. Die Zeitung kostet im Verkauf 1,10€, von denen 60 Cent an den Verlag gehen. Außerdem hat Frau Bellmann wöchentliche Kosten in Höhe von 50€ für Heizung und Strom. Wie viele Zeitungen muss sie verkaufen, um genügend Gewinn zu machen?

Abbildung 5.12.: Die Aufgabenstellung, anhand derer Sabine und Herbert sich Anwendungsaufgaben annähern sollten

Herbert hingegen kommt gar nicht in Kontakt mit den Aufgaben, die das Buch bereithält. In seinen Aufzeichnungen finden sich lediglich die Aufgaben der ersten beiden Aufgabenblätter – einmal gelöst als Streichholzschachtelgleichungen und einmal gelöst in symbolisch-algebraischer Form. Dabei fehlt durchgehend die letzte Zeile, die die Aussage über den Wert von x enthalten sollte. Abbildung 5.11 illustriert dies anhand der bereits mehrfach dargestellten Aufgabe D von Aufgabenblatt 1: Herbert erhält die Lösung durch eine Verrechnung der beiden noch vorhandenen Zahlen, nicht wie eigentlich vorgesehen durch eine Äquivalenzumformung. Man kommt so nicht auf eine Aussageform – in diesem Beispiel $x = 3$ –, sondern auf eine Zahl, die nur durch Unterstreichung als Lösung gekennzeichnet werden kann.

Lineare Gleichungen in Anwendungsaufgaben

Wie oben beschrieben, wurde das Anwenden linearer Gleichungen zum Lösen von Problemen erst behandelt, nachdem es anhand eines Tätigkeitskontextes – dem der Streichholzschachtelgleichungen – eingeführt und dann ohne Einbeziehung weiterer Anwendungskontexte geübt wurde. Sabine und Herbert erhielten die Beispielaufgabe „Zeitungsverkäuferin“ (siehe Abbildung 5.12), um eine erste Anwendung zu erkunden.

Wie andere Schülerinnen und Schüler auch kommt Herbert bald durch Probieren auf die korrekte Lösung, während Sabine zunächst durchaus dem Auftrag folgt, ein verallgemeinerbares Vorgehen zu entwickeln. Dann aber vollzieht Sabine Herberts Lösung durch schrittweises Ausrechnen der sich damit ergebenden Werte nach. Damit fehlt im Folgenden die Motivation, eine Gleichung aufzustellen. Die empfundene Sinnlosigkeit des intendierten Verfahrens lässt sich besonders gut in einer Situation nachvollziehen, in der die Lehrerin zu Beginn recht ausführlich versucht, Sabine und Herbert eine Gleichung als Lösungsansatz näher zu bringen. Während Herbert ganz für sich rechnet, wirkt die Konversation zwischen der Lehrerin und Sabine uninspiriert und mechanisch:

Episode 5.5: 120109_2_LG10_14-15_1-2: Klärung der Situation, Aufstellen der einen Seite der Gleichung, Sammlung weiterer Informationen

1 SBN: (*dreht sich nach hinten, wo die Lehrerin gerade vorbeigeht, Herbert gähnt und legt sich mit dem Kopf auf seine Arme*) Frau Kahn-

2 L: (*bleibt stehen, wendet sich Sabine zu*) (unverständlich)

3 SBN: Mussich jetzt auf- (*zeigt mit dem linken Zeigefinger auf den Aufgabentext*) ähm also- (*zeigt zusätzlich mit dem rechten Zeigefinger auf den Aufgabentext*) ‚ich muss ja jetzt herausfinden- (*stützt sich mit dem linken Arm auf, zeigt mit dem rechten Zeigefinger weiterhin auf den Text*) wieviel (*lauter, macht mit dem rechten Zeigefinger eine nach vorne drehende Geste*) Zeitungn sie verkauft ne'

4 L: Verkaufn müsste.

5 SBN: (*zeigt mit dem rechten Zeigefinger wieder auf den Aufgabentext*) Damit die gut über die Runden (*schaut zur Lehrerin auf*) ‚aber von sich selber kommt ne'

6 L: Ja-

7 SBN: (*gleichzeitig, zeigt wieder auf den Aufgabentext*) Weil sie muss ja sechzich Cent noch am Verlag abgeben.

8 L: Ja also was muss sie denn verdien- (.) (*gestikuliert mit dem rechten Arm hinter Sabines Kopf*) ‚oder was brauch sie denn um über die Runden zu komm.

9 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Eigntlich- (*zeigt erst mit dem Taschenrechner in der rechten Hand, dann mit der linken Hand auf den Aufgabentext, Herbert beginnt, etwas in den Taschenrechner zu tippen und bleibt damit bis auf weiteres beschäftigt*) ‚zweihundertfünfzich- (*zeigt auf eine Stelle weiter unten, schaut zur Lehrerin auf*) aber fünfzich eingntlich noch dazu wegen diesem- (*hält sich den Taschenrechner vor den Mund, während sie spricht*) Heiz- kosten da.

10 L: Ja-

11 SBN: (*deutet mit der Abdeckung des Taschenrechners unbestimmt auf das Aufgabenblatt*) Also dreihundert Euro. (.) ‚oder' (.)

12 L: (*zeigt auf den Aufgabentext und zieht dann die Hand wieder zurück*) Also zweihundertfünfzich Euro müssen überbleiben ne'

13 SBN: Ja.

14 L: Davon- (*macht eine kurze Geste, nicht sichtbar für Sabine und Herbert, der weiterhin etwas in den Taschenrechner eingibt*) is dann schon alles abgezogen genau.

15 SBN: Ja.

16 L: Das was überbleibt.

17 SBN: (*zeigt mit der Abdeckung des Taschenrechners auf den Aufgabentext*) Das

müssen wir jetzt einfach herausbekomm- (.)

18 L: Ja was äh- (*fasst sich an den Kopf und streicht sich durch die Haare*) (.) ‚was braucht ihr- ‚was müsst ihr denn jetzt aufschreiben ihr müsst ja ne Gleichung aufschreibn ne'

19 SBN: (*leise*) Keine Ahnung-

20 L: Was könnte denn auf der ein Seite stehn'

21 SBN: (*zeigt mit der Abdeckung des Taschenrechners auf den Aufgabentext*) Ja zweihundertfünfzich.

22 L: Aha. ‚das ja schonmal gut. genau.

23 SBN: Ja-

24 L: Das wär die eine Seite.

25 SBN: Ja-

26 L: Muss man überlegen was is jetzt alles auf der andern Seite.

27 SBN: Pff- (*legt rechten Zeigefinger unter den Aufgabentext*) ‚auf der andern Seite gibt es (*zeigt auf den Aufgabentext, relativ weit links*) ein Euro zehn und (*zeigt auf eine Stelle in der Mitte des Aufgabentexts*) sechzich Cent. (*zieht die Hand zurück*)

28 L: Genau' (.) ‚und was noch'

29 SBN: Und (*zeigt kurz auf eine Stelle etwa in der Mitte des Aufgabentexts*) fünfzich Euro-

30 L: Mhm' (.) ‚genau' und was wissen wir nicht' (..)

31 SBN: Wieviel (*zeigt kurz mit der Hand unbestimmt auf den Aufgabentext*) Zeitungn sie verkauft.

32 HBT: (*teilweise gleichzeitig, schiebt den Taschenrechner etwas von sich weg, richtet sich auf*) Er muss- ‚fünfhundert muss sie verkaufen. (*schaut Sabine an*) ‚dann hat sie zweihundertfünfz- (*hält sich die Hand an den Kopf*)

33 L: (*gleichzeitig*) Nee- ‚nee nee nee.

34 HBT: Hä- (*schaut unzufrieden nach vorne, zieht den Taschenrechner wieder etwas zu sich, stützt sich auf und verharrt so bis auf Weiteres*)

35 L: (*Sabine beginnt, ihre Sachen hin und her zu schieben*) Ähm- ‚wir brauchen ne Gleichung Herbert das kann m ‚das könn wir jetzt nicht einfach so (unverständlich)

36 SBN: (*gleichzeitig, beugt sich über Herberts Arme hinweg zu dessen Mappe und nimmt sie sich*) Gib mal kurz den Stift-

37 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Wir brauchen ne Gleichung (*Sabine kramt in Herberts Mappe und nimmt sich einen Stift*) ‚so und das was Sabine gesacht hat is ja schon gar nich mal so verkehrt- (*Sabine legt die Mappe auf Herberts Tisch ab*) (.)

38 SBN: (*setzt den Stift unter dem Aufgabentext an*) Also wir haben hier zw- (*hebt nacheinander alle Schichten des Stapels an, auf dem das Aufgabenblatt liegt*) (..)

39 L: Kannst ruhig da draufschreiben-

40 SBN: (*lässt den Stapel wieder sinken, setzt den Stift wieder an, leise*) Okay. (*lauter, schreibt „250“*) ‚ham wir zweihundertfünfzich' (.) ‚und auf der anderen Seite ham wir- (*schreibt „=“ etwa in der Mitte der Zeile*) (..) ‚soll ich jetzt einfach (*bewegt den Stift über dem Aufgabentext*) alles einzelnd aufschreiben' oder kann ich (*zeigt auf zwei Stellen im Aufgabentext*) das nich zusamm hier z

> 41 L: (*teilweise gleichzeitig*) J-a- ,kannste alles einzelnd aufschreibn- (*Sabine setzt den Stift wieder an*) (..)
> 42 SBN: (*schreibt rechts vom Gleichheitszeichen weiter*) Eins z-e-h-n- (.) ,sechzich- Cent- ,und fünfzich Euro. (*zieht den Stift zurück*) (.)

Sabine gibt zunächst die Aufgabenstellung korrekt wieder (3-7). In den letzten beiden Aussagen von Sabine wird bereits deutlich, dass nicht unmittelbar klar ist, was es bedeutet, „über die Runden zu kommen" (5, 7). Genau danach fragt nun die Lehrerin (8), und Sabine antwortet, dass die Verkäuferin 250€ für sich selbst brauche und 50€ für die Heizkosten (9) und fasst diese Beträge direkt zusammen zu 300€ (11). Sabine verknüpft also verschiedene zur Verfügung stehende Daten bereits korrekt. Die Lehrerin besteht aber darauf, dass 250 das Resultat sämtlicher Rechnungen sein solle (12-17). In der Folge macht sie deutlich, dass eine Gleichung verlangt sei und dass eine Seite dieser Gleichung das genannte Resultat sein solle (18-24). Die Lehrerin bestimmt auch den nächsten Schritt: „Muss man überlegen was is jetzt alles auf der andern Seite." (26) Sabine interpretiert dies so, dass sie die weiteren Infos aus der Aufgabe auflistet, ohne sie jedoch in einen Zusammenhang zu bringen (27-29). Anschließend fragt die Lehrerin, was man nicht wisse (30), Sabine antwortet: „Wieviel (*zeigt kurz mit der Hand unbestimmt auf den Aufgabentext*) Zeitungn sie verkauft."

An dieser Stelle bringt sich Herbert ein, der bislang mit seinem Taschenrechner beschäftigt war. Er schlägt 500 Zeitungen, die verkauft werden müssen, als Lösung vor (32). Die Lehrerin lehnt die Lösung vehement ab (33) und äußert auch Herbert gegenüber als Zielsetzung: „wir brauchen ne Gleichung Herbert ,so und das was Sabine gesacht hat is ja schon gar nich mal so verkehrt-" (37, erster Teil der Aussage auch schon in 35). Herbert reagiert irritiert und wirkt unzufrieden (34). Sabine hingegen schreibt die gesammelten Informationen nebeneinander rechts des Gleichheitszeichens auf (38-42, siehe Abbildung 5.13).

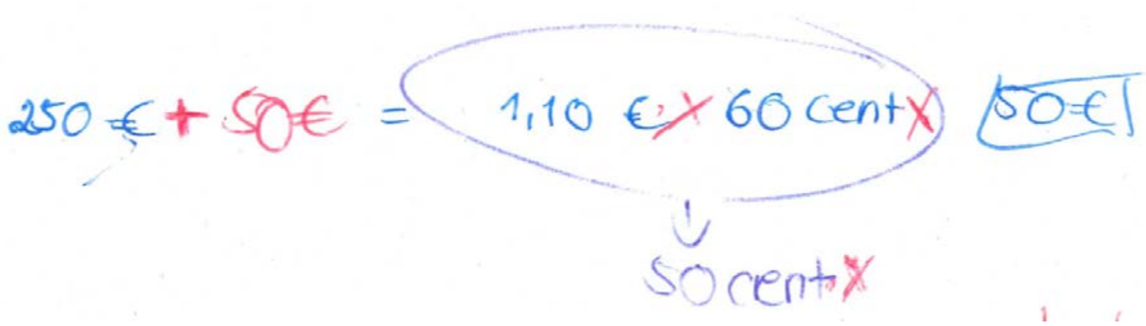


Abbildung 5.13.: Die Informationen, die Sabine unter Anleitung der Lehrerin zur Aufgabe „Zeitungsverkäuferin" zusammenstellt. Zunächst liegt nur das in blau Geschriebene vor.

Es geht folgendermaßen weiter:

Episode 5.6: 120109_2_LG10_14-15_3: Einführung der Variablen vs. direktes Rechnen

43 L: Genau aber- jetzt fehlt ja noch eine Sache ne'
44 SBN: Ja die- (*bewegt den Stift über dem Aufgabenblatt, keine Zeigegeste erkennbar*)
45 L: Nämlich dass- ,die Unbekannte
46 HBT: (*zeigt auf das Ende der Gleichung*) Fünfzich Cent doch nich Euro-
47 L: (*redet gleichzeitig ohne Unterbrechung weiter*) die wir nich wissen-
48 SBN: Was laberst du (*zeigt mit dem Stift auf die untere Zeile des Aufgabentexts*) da steht fünfzich Euro.
49 L: (*gleichzeitig*) Fünfzig Euro Strom-
50 HBT: Achso. achso (*wedelt winkend mit der Hand, senkt seinen Kopf*) ja ja (unverständlich)
51 SBN: Was mach- ,was ham Sie grad gesagt'
52 L: Jetzt fehlt ja noch die Unbekannte die wir ausrechnen wolln das x ne'
53 SBN: Ja.
54 L: Ja was is denn das x (*Sabine ergänzt oder korrigiert etwas im zuvor Geschriebenen*) in der Aufgabe-
55 SBN: (*zeigt mit dem Stift unbestimmt auf die rechte Seite der Gleichung*) Das Euro. (..) (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung, also auf „250" und die gerade gemachte Ergänzung/Korrektur*) ,das hier.
56 L: Nee was is das x ,was wissen wir nicht.
57 HBT: (*weiterhin aufgestützt*) Das Ergebnis-
58 L: Ja was is denn das Ergebnis-
59 SBN: (*zeigt auf eine Stelle links im Aufgabentext*) Diese Zeitungn.
60 L: Genau wie viele Zeitungn es sind ne'
61 SBN: (*gleichzeitig*) Ja.
62 HBT: Ich mein das sind zweihundertfünfz-
63 L: (*gleichzeitig*) So wo müsste man das denn jetzt-
64 HBT: (*redet gleichzeitig ohne Unterbrechung weiter*) Sind die fünfhundert-
65 L: N-e-i-n- (*Herbert verdreht den Kopf nach vorne, von der Lehrerin weg*) ,wo müsste man das denn jetzt hinschreiben- (..)
66 HBT: Ach s (*dreht den Kopf zur Lehrerin, lässt den rechten Arm aber aufgestützt*) ,is das nich sowas wi-e äh äh äh äh- (*schnipst mit der rechten Hand*)
67 SBN: Zum Beispiel is da-
68 HBT: (*gleichzeitig*) Dreisa nee. (*stützt sich wieder auf*) ,irgndwas (unverständlich) noch in dieser (*zeichnet mit dem Finger auf dem Tisch ein zweispaltiges Tabellenraster, siehe Abbildung 5.14 auf Seite 139*) Tabelle doch-
69 SBN: Eigntlich müsste (*zeigt mit dem Stift auf das Ende der notierten Gleichung*) hier do-
70 L: (*schüttelt den Kopf*) Ist ne Gleichung ,ganz normale Gleichung- (*richtet sich auf*)

71 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) In den fünfzich Euro (*schaut zur Lehrerin auf*) (unverständlich) (*die Lehrerin stemmt ihre linke Hand in die Hüfte, Sabine hält sich die Hand mit dem Stift an den Mund*) (.) (*Sabine dreht sich wieder nach vorne*)
72 L: Die fünfzich Euro sind ja (*gestikuliert mit der rechten Hand*) fest ne' (*Sabine schreibt etwas auf der rechten Seite der Gleichung, oder deutet es nur an*) (.) ‚aber (*zeigt auf eine Stelle links im Aufgabentext*) ein Euro zehn' (.)
73 SBN: Ja-
74 L: (*zeigt weiterhin auf die gleiche Stelle*) Kostet die im Verkauf' (*bewegt den Finger nach rechts*)
75 SBN: Und sechzich Cent (*zeigt auf die gleiche Stelle wie die Lehrerin*) müssen eigntlich noch weg-
76 L: (*gleichzeitig, zieht die Hand zurück*) muss sie an den Verlag abgeben so.
77 SBN: (*teilweise gleichzeitig, zieht die Hand ebenfalls zurück und streicht sich damit die Haare nach hinten*) Ja. ‚also fünfzich Cent (*schaut die Lehrerin an*) (unverständlich)
78 L: (*teilweise gleichzeitig*) Wenn sie jetzt fünfzig Zeitungn verkauft'
79 SBN: Hat sie fünfunzwanzich Euro- (*beide Schüler schauen die Lehrerin an*) ‚für sich. ‚weil sie ja sechzich Cent immer am Verlag geben muss- (*beide Schüler schauen die Lehrerin an, die mit Händen in den Hüften hinter ihnen steht, ihr Gesicht ist nicht zu sehen*) (...)
80 L: (unverständlich)
81 HBT: Ja'
82 SBN: Ja ‚also- (*dreht sich wieder nach vorne, Herbert schaut weiterhin nach hinten*) ‚sie muss ja immer sechzich Cent (*zeigt mit dem Stift unter den Aufgabentext*) an Verlag abgeben-
83 L: (*hebt die linke Hand, zur Faust geballt, Daumen nach oben, siehe Abbildung 5.15*) Pro Zeitung.
84 SBN: Ja. ‚und dann wenn sie fümun ‚fünfzich Zeitungen verkäuft- (*schaut zur Lehrerin auf, spielt mit der linken Hand in ihrem Haar*) hat sie fümunzwanzich Euro (*gestikuliert leicht mit der rechten Hand, die immer noch auf dem Tisch aufliegt*) für sich selbst- (..) ‚weil ich ja das mit dem Verlag schon jetzt abgerechnet-
85 L: Achso ja- ‚genau. (*stemmt sich die linke Hand in die Hüfte*)
86 SBN: (*schaut wieder nach vorne*) Ja.
87 L: Aber das musst du irgendwie aufschreibn. ‚das is richtich gerechnet (*fasst sich an den Kopf*) aber das musst du jetzt irgendwie aufschreiben.
88 SBN: (*zeigt auf den Aufgabentext*) Aber wir müssen ja zweihundertfünfzich Euro rauskriegn ne' (*schaut Herbert an*)
89 L: (*stemmt sich die Hand wieder in die Hüfte*) Genau das is die eine Seite-

Anliegen der Lehrerin ist es, x als die unbekannte Anzahl der Zeitungen einzuführen, die verkauft werden (43-47, 52-61). Dies gelingt ihr gegenüber Sabine auch, die ihr selbst die erwartete Antwort gibt, das x repräsentiere die (Anzahl der) Zeitungen (59). Herberts Versuche, sich zu beteiligen, werden jedoch abgewiesen: Zunächst weist er auf einen vermeintlichen Fehler in Sabines Aufzeichnungen (siehe Abbildung 5.13 auf Seite 136) hin, wo er 50 Cent als Nettogewinn pro Zeitung erwartet statt der 50€ Fixkosten, die Sabine

Abbildung 5.14.: Herbert deutet durch gestisches Zeichnen auf dem Tisch eine Tabelle an (68).

Abbildung 5.15.: Die Lehrerin hebt den Daumen, während sie klar macht, dass 60 Cent *pro Zeitung* an den Verlag gezahlt werden müssen (83).

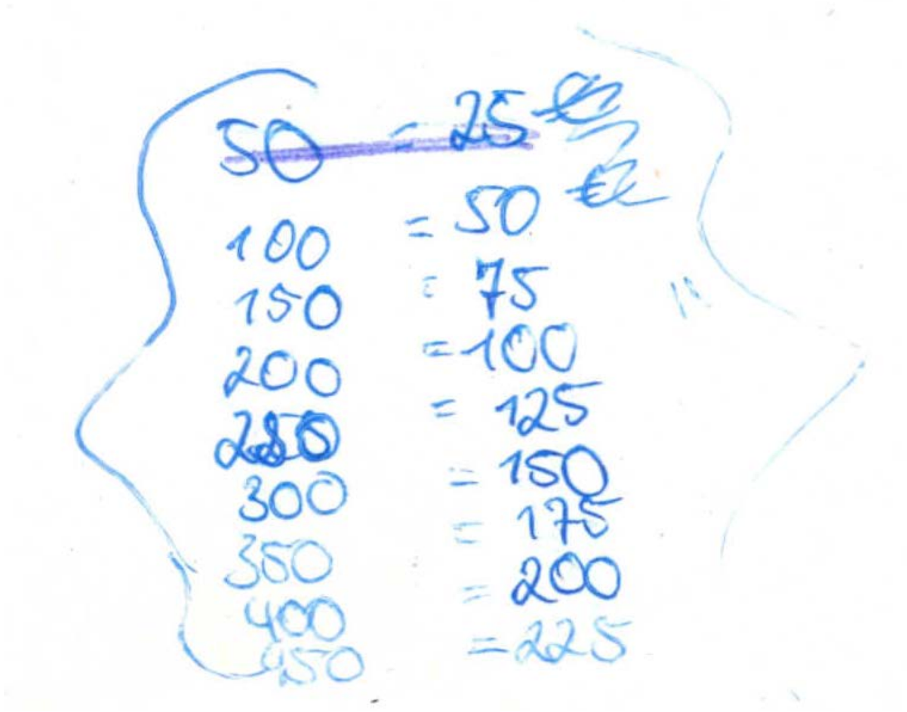


Abbildung 5.16.: Die Wertetabelle, die Sabine anlegt, um die Anzahl der Zeitungen zu bestimmen, die verkauft werden müssen

notiert hat (46-50). Als dann Sabine der Lehrerin zustimmt, dass der gesuchte Wert die Anzahl der Zeitungen ist, bringt er erneut sein Ergebnis in die Diskussion ein (62-64). Die Lehrerin reagiert wieder deutlich ablehnend und geht dann weiter der Frage nach, wo „man das denn jetzt hinschreiben“ müsste (65).

Die Diskussion findet weitgehend ohne Herbert statt, nachdem er erfolglos die Erstellung einer Wertetabelle vorschlägt (68, siehe Abbildung 5.14). Sabine versucht, den Hinweisen der Lehrerin zu folgen, geht dabei aber eher ratend und die Situation rekapitulierend vor (67-77). Dabei kommt sie auch darauf, den Preis pro Zeitung mit dem Betrag zu verrechnen, der an den Verlag abgeführt werden muss (72-77).

Die Lehrerin gibt nun als Beispiel 50 Zeitungen vor (78). Sabine berechnet hierfür die Nettoeinnahmen korrekt (79-86). Während sie in mehreren Äußerungen versucht deutlich zu machen, *warum* sie mit 50 Cent pro Zeitung rechnen kann (79-84), scheint es der Lehrerin darum zu gehen zu betonen, dass die Beträge jeweils *pro Zeitung* gelten (83, betont durch begleitende Geste, siehe Abbildung 5.15). Schließlich geht die Lehrerin wieder dazu über, in Richtung einer formalen Schreibweise zu arbeiten: „Aber das musst du irgendwie aufschreibn. ‚das is richtich gerechnet (fasst sich an den Kopf) aber das musst du jetzt irgendwie aufschreiben.“ (87)

In der Folge entwickelt Sabine eine Wertetabelle (siehe Abbildung 5.16), in der sie der Anzahl der verkauften Zeitungen die Nettoeinnahmen gegenüberstellt, und bestätigt letztlich Herberts Lösung, nach der 500 Zeitungen verkauft werden müssen. (Die Lösung ist falsch, weil die Fixkosten unberücksichtigt bleiben.) Herbert zieht große Befriedigung aus der Tatsache, dass er von Anfang an die vermeintlich richtige Lösung vermutet hatte.

Nachdem sie bemerkt haben, dass sie Fixkosten bisher nicht berücksichtigt hatten, korrigieren Sabine und Herbert ihre Lösung dementsprechend und bitten dann wiederum die Lehrerin an ihren Tisch. Sabine beginnt die erarbeitete Lösung vorzustellen:

Episode 5.7: 120109_2_LG10_27: Sabine präsentiert die eigene Lösung

144 SBN: Also- (*setzt sich auf ihren Platz, die Lehrerin folgt ihr und stellt sich zwischen Sabine und Herbert*) ‚gucken Sie. ‚wir ham das so gerechnet. (*zieht das Aufgabenblatt etwas in Richtung der Lehrerin*) ‚wir ham (*tippt mit dem Stift auf eine Stelle auf dem Aufgabenblatt*) zweihundertfünfzich plus (*tippt mit dem Stift auf eine Stelle weiter rechts*) fünfzich' (*schaut zur Lehrerin auf, Herbert schaut zu Sabine herüber, den Kopf aufgestützt*) (.) ‚damit wir (*bewegt den Stift unten auf dem Blatt von links nach rechts*) dreihundert Euro haben.

145 L: (*gleichzeitig*) Aha' (.)

146 SBN: (*dreht sich wieder nach vorne, schaut auf das Aufgabenblatt*) Dann haben wir- (*Herbert wendet sich wieder seinen eigenen Unterlagen zu, schreibt etwas*) (.) (*Sabine tippt mit dem Zeigefinger auf eine Stelle weiter oben auf dem Aufgabenblatt, mit hoher Stimme*) ‚fünfzich Cent' (*schaut zur Lehrerin auf*) genomm' ‚da ham wir einfach.

147 L: (*Sabine schaut wieder auf das Aufgabenblatt*) Wieso denn fünfzich Cent-

148 SBN: (*zeigt unbestimmt auf den Aufgabentext, spricht mit hoher Stimme, Herbert schaut wieder herüber*) Weil sechzich Cent (*macht mit dem Stift eine Geste nach rechts*) immer zum Verlag gehn' (*schaut zur Lehrerin auf*) ‚warum solln wir das denn mitrechnen' (..) (*nickt*) ‚j-a-a.

149 HBT: (*gleichzeitig, schaut zur Lehrerin auf*) Da hat sie Recht.

150 SBN: Wir müssen ja zum ‚für sie (*bewegt den Stift unbestimmt über der Aufgabenstellung*) nur zum Überleben.

151 L: (*teilweise gleichzeitig*) Ach s-o. ‚das ist R-e-st- von der Zeitung. (*Herbert wendet sich wieder seinen eigenen Unterlagen zu*)

152 SBN: Ja.

153 L: Ich versteh ja ja ja.

154 SBN: (*schaut wieder auf ihr Aufgabenblatt*) Ja' (..) (*mit hoher Stimme*) ‚dann ham wir das geteilt' (*schaut zur Lehrerin auf*) oder' (.) ‚oder mal- (*schaut zu Herbert, Herbert schaut nur kurz auf und schreibt dann auf seinem Block weiter*) ‚ham wir mal genomm oder geteilt.

155 HBT: (*setzt die Kappe auf seinen Füller*) Bei was. ‚mal.

156 SBN: Mal ne (*schaut wieder zur Lehrerin auf, Herbert schaut Sabine an*) ‚mal geno (*fasst den Stift mit beiden Händen an*) also zweihundert ‚dreihundert' (*die Lehrerin zeigt mit dem linken Zeigefinger auf eine Stelle in der Aufgabenstellung oder in den Notizen darunter, zieht die Hand aber sofort wieder zurück, Sabine spricht mit hoher Stimme*) ‚m-a-l null komma fünfzich dann kam da sechshunnert raus. (*Sabine schaut zur Lehrerin auf, die Lehrerin schaut wahrscheinlich auf das Aufgabenblatt, Herbert schaut zu Sabine*) (...)

157 L: J-a. ,richtich. (*schiebt das Aufgabenblatt etwas weiter in die Mitte, lässt ihre linke Hand darauf liegen*)
158 HBT: U- ,und sie muss dann sechshundert Zeitschrif-t-n- verkaufn oder was.

Sabine erklärt, dass sie und Herbert die 250€ (den notwendigen Gewinn) und die 50€ Heizkosten zu einer Summe zusammengefasst hätten (144). Sie fährt fort mit der Nennung von 50 Cent, ohne dass zunächst deutlich wird, was es mit dieser Zahl auf sich hat (146). Die Lehrerin fragt gezielt nach einer Begründung (147) und Sabine erklärt, dass sich der Betrag ergibt, wenn man bereits berücksichtigt, dass 60 Cent an den Verlag gehen, „,warum solln wir das denn mitrechnen'" (148) Nachdem die Lehrerin ihr Verständnis signalisiert (151-153), fährt Sabine fort, als nächstes hätten sie und Herbert dividiert, ist sich dann jedoch nicht mehr sicher, ob sie nicht doch multipliziert hätten (154). Herbert behauptet, sie hätten multipliziert (155). Sabine präsentiert daraufhin als die durchgeführte Rechnung $300 \cdot 0{,}5 = 600$ (156), was die Lehrerin als richtig bezeichnet (157). Herbert äußert schließlich fragend, dass die Zeitungsverkäuferin also 600 „Zeitschriften" verkaufen müsse (158). Die Lehrerin ist aber noch nicht zufrieden:

Episode 5.8: 120109_2_LG10_28: „wo is denn das x hin."

159 L: Aber- (*bewegt die Hand etwas zu sich, schaut Sabine an*) formal is das ja noch nich richtich
160 SBN: Nö-
161 L: (*gleichzeitig, redet ohne Unterbrechnung weiter, zeigt mit der rechten Hand unbestimmt über die Notizen der Schüler*) Hier fehlt ja noch das x ne (*schaut zu Herbert, beide Schüler schauen auf das Aufgabenblatt*) ,wo is denn das x hin. (*zieht ihr Kinn auf die Brust, schaut weiterhin zu Herbert*) (.)
162 SBN: (*die Lehrerin schaut zu Sabine*) Muss das x nich- (*dreht den Stift einmal in der Hand und hält ihn unbestimmt über der unteren Hälfte des Blattes*) ,pf-s-c-h ,hm-
163 L: (*teilweise gleichzeitig*) Wie oft ,wie oft (*zeigt tippend mit dem Zeigefinger auf eine Stelle relativ weit oben in den Notizen*) verkaufn wir denn die Zeitungn-
164 SBN: Fünfhundert mal.
165 L: (*dreht die Hand mit der Handfläche nach oben, bewegt sie auf und ab*) Nee das wissen wir ja noch nich. (*lässt die Hand in einer flüssigen Bewegung auf die andere sinken, ihr Blick wandert zu Sabine*)
166 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Sechshundert. ,doch.
167 L: Also (*wiederholt die Geste mit der Handfläche nach oben*) ,wir wissen das (*schaut zu Herbert, Herbert schaut Sabine an*) noch nich also wie oft verkaufen wir die-
168 SBN: x mal.
169 L: (*bewegt die rechte Hand kurz nach vorne und wieder zurück, schaut wieder auf das Aufgabenblatt*) x mal. ,genau und wo muss dann das x hin'
170 SBN: (*zeigt auf die Stelle, auf die die Lehrerin zuvor gezeigt hatte*) Hier.
171 L: Ja. (*bewegt den Kopf leicht nach oben*)
172 SBN: (*schreibt etwas an der Stelle*) (.) (*mit hoher Stimme*) Ein x- (.)

173 HBT: Hä aber- ,wie das kann man doch ausrechnen wie viele man verkaufen muss- (*schaut zur Lehrerin auf*)
174 L: (*gleichzeitig, nimmt Sabine den Stift aus der Hand, schreibt nahe der gleiche Stelle wie zuvor etwas*) Und da auch ,ne'
175 HBT: (*redet ohne Unterbrechung weiter, schaut wieder auf das Aufgabenblatt*) Das versteh ich ja nich-
176 L: Ja das is ja (*zeigt mit dem Stift auf die Stelle, an der sie gerade geschrieben hat, schaut Herbert an*) das was wir ausrechnen wolln ,genau. (*schaut Herbert an, Herbert dreht sich nach einem Augenblick ruckhaft weg, schaut auf den Tisch, schmollt, setzt seinen Stift an*) (.) ,deswegen müssn wir das ja aufschreibn. (*wendet sich wieder Sabines Aufgabenblatt zu, schreibt wieder an der gleichen Stelle wie zuvor*) ,so ne' ,steht immer dahinter hier hast du (*zeigt mit dem Stift nacheinander auf zwei Stellen im selben Bereich*) m-al m-al (*Herbert beendet seinen Schreibprozess, beugt sich vor und schaut auf die Schreibhand der Lehrerin*) und dann (*zeigt mit dem Stift auf eine Stelle etwas weiter unten*) fasst ihr das zusamm (*legt den Stift weiter links ab, zeigt mit dem Zeigefinger nochmal auf den Bereich, in dem sie geschrieben hatte*) und dann is das so ne'
177 SBN: Ah-kay- (*nickt einmal, Herbert wendet sich seinem Blatt zu und schreibt weiter*)
178 L: Und dann is (*nimmt den Stift in die Hand, legt ihn unmittelbar wieder hin*) das ja hier- ,schreib mal- (*Sabine nimmt den Stift, die Lehrerin zeigt auf eine Stelle weiter links als zuvor, Herbert setzt die Kappe auf seinen Füller und schaut wieder zu*) die-Gleichung auf'
179 SBN: (*beugt sich mit dem Stift kurz nach vorne*) Welche jetzt.
180 L: (*richtet sich auf, zeigt dabei kurz unbestimmt auf das Aufgabenblatt*) Die du jetzt berechnet hast' (*Sabine bewegt den Stift über dem Aufgabenblatt*) (.) ,hier-
181 SBN: (*leise*) Hö-
182 L: (*gleichzeitig, redet ohne Unterbrechung weiter, zeigt auf die gleiche Stelle wie zuvor*) ,das hast du jetzt zusammgefasst'
183 HBT: (*dreht sich nach vorne, hält den Stift über sein Blatt*) Achs-o- ,äh (*hält die Hand unverändert, schaut zur Lehrerin auf, Sabine streicht sich durch die Haare und setzt ihren Stift in einer neuen Zeile an*) dreihundert-
184 L: (*stemmt ihre linke Hand in die Hüfte*) Ja schreib mal' (*Sabine und Herbert beginnen zu schreiben*) (..)
185 SBN: (*richtet sich auf*) Dreihundert ge m-al fünfzich' (*Herbert schaut auf Sabines Blatt, die Lehrerin schaut Sabine über die Schulter*) ,null komma fünfzich ne'
186 HBT: Ja. (*schreibt auf seinem Blatt weiter*)
187 L: Dreihundert is gleich' (.)
188 HBT: (*wendet sich langsam Sabine oder der Lehrerin zu*) Hä'
189 SBN: (*gleichzeitig*) Gleich j-a- (*bewegt den Stift über dem Papier nach rechts*)
190 L: Is ne Gleichung Herbert (*Herbert wendet sich wieder nach vorne, setzt den Stift wieder an*) ,ihr müsst immer das Gleiche (unverständlich)
191 HBT: (*hält den Stift weiterhin über dem Papier, schaut wieder über die Schulter zur Lehrerin*) A-h gleich null komma fünfzich ne- (*die Lehrerin beugt sich nach links und schaut über Sabines Schulter, Sabine schreibt weiterhin*) (.) ,oder' (*schaut zu Sabine*)

192 L: x.
193 SBN: (*schreibt*) x. ,ja.
194 L: So und jetzt'
195 SBN: (*streicht sich durch die Haare, Herbert wendet sich ab und schreibt weiter*) Was denn. ,muss ich doch (*zeigt auf eine Stelle im Bereich des gerade Geschriebenen*) eigntlich eins herausfinden oder nich.
196 L: Ein x genau. (*zeigt auf eine Stelle im Geschriebenen*) ,durch was teilst du jetzt'
197 SBN: (*schaut auf ihr Blatt, Herbert schreibt ebenfalls nicht und schaut auf sein Blatt*) (..) Hm.
198 L: Du teilst ja (*senkt den Kopf und schaut auf den Boden, Herbert schaut auf Sabines Block*) immer durch das was vor dem x steht ne' (*streicht sich mehrfach über den Rock, Herbert schaut wieder auf seinen Block*) ,ham wir immer gemacht.
199 SBN: Also (*zeigt mit dem Stift kurz auf eine Stelle im Geschriebenen*) gteilt durch fünfzich- (*Herbert schaut auf Sabines Block*)
200 L: Ja das habt ihr ja grade (*nickt*) gesacht auch. ,is ja richtich.
201 SBN: Ja.
202 L: Nur- man muss das jetzt formal aufschreiben. genau.
203 HBT: Also sechzich. (.) (*dreht sich zur Lehrerin und schaut sie an*)
204 L: (unverständlich) (*Herbert dreht sich wieder nach vorne*) dreihundert durch null komma fünf sind' (.)
205 HBT: Achso-
206 SBN: Hundertfünfzich. (*schaut zur Lehrerin auf*)
207 HBT: Sechzich- (*die Lehrerin richtet sich auf*)
208 SBN: Ah ,verdammt. (*schaut Herbert an*) (.) ,du bist hässlich. (*greift nach dem Taschenrechner*)
209 L: (*teilweise gleichzeitig*) Geb das doch mal (*zeigt auf den Taschenrechner*) ein d-a-
210 SBN: Jetzt kommts-
211 HBT: Ja immer nimmt sie mein Mann. (*setzt die Kappe auf seinen Füller*)
212 SBN: (*teilweise gleichzeitig, tippt etwas in den Taschenrechner*) Dreihundert- (*bewegt den Kopf nach vorne*) ,geteilt wo steht hier geteilt' (*bewegt den Kopf nach vorne und schaut auf das Aufagbenblatt*) ,durch was' (*gibt etwas in den Taschenrechner ein*) (..) ,gleich- ,sechshundert. (*beide Schüler schauen zur Lehrerin auf*)
213 L: O-h-
214 SBN: (*dreht sich nach vorne*) Boah- ,ah ich weiß warum. (*legt den Taschenrechner wieder auf Herberts Tisch*)
215 L: Also x ist gle-ich sechshundert ne' (*Sabine, dann auch Herbert, beginnen zu schreiben*) (.)
216 SBN: x gleich sechs hundert.
217 L: Genau. gut. (*geht weg, Sabine legt ihren Stift auf den Tisch und geht weg, Herbert schreibt weiterhin*) (6sec)
218 HBT: (*setzt die Kappe auf seinen Füller*) Fertig.

Die Lehrerin behauptet, das gewählte Verfahren sei formal noch nicht richtig (159), und fordert eine Variable in der Rechnung: „wo is denn das x hin." (161); dann stellt sie die

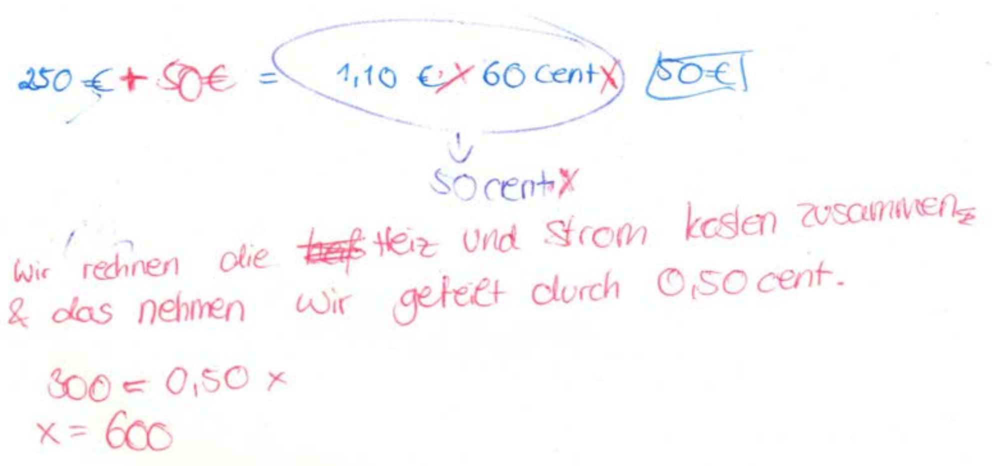


Abbildung 5.17.: Sabines Aufzeichnungen zur Herleitung der Gleichung aus den in der Aufgabe „Zeitungsverkäuferin“ gegebenen Informationen

Frage vom Kontext her: „Wie oft ‚wie oft (*zeigt tippend mit dem Zeigefinger auf eine Stelle relativ weit oben in den Notizen*) verkaufn wir denn die Zeitungn-“ (163) Sabine nennt 500 als ihr Ergebnis (164) und korrigiert sich dann auf den zuvor genannten (156, 158) Wert 600 (166). Die Lehrerin behauptet nun, genau dies sei noch nicht bekannt (165, 167). Daraufhin antwortet Sabine „x mal“ (168) auf die erneut gestellte Frage, wie viele Zeitungen verkauft würden (167). Wo diese Variable eingesetzt wird, wird von der Lehrerin als nächstes erfragt, aber auch durch ihre gleichzeitige Zeigegesten angedeutet (169). Sabine zeigt auf die gleiche Stelle wie die Lehrerin (170) und notiert ein „x“ auf dem Aufgabenblatt (172), die Lehrerin nimmt ihr daraufhin den Stift aus der Hand und notiert das zweite „x“ (174, siehe die roten Ergänzungen in Abbildung 5.13 auf Seite 136).

Herbert äußert nun Unverständnis: „Hä aber- ‚wie das kann man doch ausrechnen wie viele man verkaufen muss- (*schaut zur Lehrerin auf*)“ (173, siehe auch 175). Der Einwand wird von der Lehrerin nicht beachtet beziehungsweise mit dem Verweis auf das gerade Geschriebene abgetan: Dies müsse erst einmal geschaffen werden, um damit dann rechnen zu können (176): „und dann (*zeigt mit dem Stift auf eine Stelle etwas weiter unten*) fasst ihr das zusamm (*legt den Stift weiter links ab, zeigt mit dem Zeigefinger nochmal auf den Bereich, in dem sie geschrieben hatte*) und dann is das so ne’“ (176) Sabine kann nicht unmittelbar folgen (181), in der Folge gelingt es der Lehrerin aber, anknüpfend an Sabines und Herberts Beschreibungen, aus der von ihr vorgegebenen Gleichung die Form $300 = 0{,}50 \cdot x$ zu entwickeln, Sabine notiert die neue Gleichung auf ihrem Aufgabenblatt (182-193, siehe Abbildung 5.17).

Sabine erkennt, dass sie auf „eins“ (195) kommen muss, was die Lehrerin zu „ein x“ korrigiert (196). Nachdem Sabine scheinbar nicht weiter weiß, gibt die Lehrerin vor: „Du teilst ja (senkt den Kopf und schaut auf den Boden, Herbert schaut auf Sabines Block) immer durch das was vor dem x steht ne’ (*streicht sich mehrfach über den Rock, Herbert schaut wieder auf seinen Block*) ‚ham wir immer gemacht.“ (198), woraufhin Sabine (fälschlicherweise) eine Division durch 50 angibt (199). Die Lehrerin scheint dies zunächst zu bestätigen (200-202) und Herbert berechnet als Ergebnis 60. Auf den Widerspruch der Lehrerin (204) sagt Herbert zunächst „Achso-“ (205), bleibt dann aber bei seiner Lösung (207). Sabine kommt auf 150 (206) und nimmt dann den Taschenrechner zur Hilfe (208-212). Das Ergebnis 600 wird von der Lehrerin mit „O-h-“ – einem Ausdruck des Erstaunens – kommentiert (213), Sabine behauptet, sie wisse warum, erläutert dies aber nicht (214). Dann schreiben beide Schüler als Ergebnis „x = 600“ auf (215-218).

Sabines nachträglich eingefügte Erklärung des Vorgehens (in Abbildung 5.17 zwischen der aus den gesammelten Informationen entstandenen Gleichung und deren Zusammenfassung) geht nicht darauf ein, dass hier eine Gleichung aufgestellt und gelöst wurde. Weiterhin scheint das durchgeführte Verfahren nur eine Variante zu sein, die keinen echten Mehrwert gegenüber dem probierenden Verfahren bietet, das Herbert von Anfang an verfolgt hatte.

Als schließlich die Musterlösung (siehe Anhang A.1) ausgeteilt wird, erkennt Sabine jedoch schnell, dass sie strukturell dem Ansatz gleicht, den sie verfolgt haben: „Unsere Lösung ist eigentlich genauso-“ Während Herbert sich diesbezüglich desinteressiert zeigt, deutet Sabine ein Verständnis dafür an, inwiefern die Musterlösung das vorher besprochene Vorgehen bestätigt:

Episode 5.9: Auszug aus 120109_2_LG10_36: Wiedererkennen des eigenen Vorgehens

239 SBN: (*beginnt etwas in den Taschenrechner einzugeben, Herbert ist weiterhin mit Murat abgelenkt, deren Unterhaltung wird im Folgenden ausgelassen*) Sechshundert-m-al (*singend*) eins komma zehn gleich- (*nimmt den Taschenrechner in die Hand, tickt damit Herbert an*) ‚kumma kumma kumma-

240 HBT: (*dreht seinen Kopf zu Sabine, mit dem Oberkörper bleibt er halb abgewendet*) Hä’ (*schaut auf den Taschenrechner*)

241 SBN: Ich weiß was (*zeigt auf eine Stelle in der Musterlösung unten*) das is-

242 HBT: Was.

243 SBN: Das is diese (*bewegt die beiden Hände rhytmisch gegeneinander auf und ab, einer Waage ähnlich*) Gleichungen- ‚auf (*zeigt kurz auf die Gleichung*) beide Seiten is gleiche (*legt ihre Hände auf beiden Seiten des Texts auf das Blatt*) viel drauf.

244 HBT: (*leise, monoton*) Ah ach so ja- (*dreht sich weg*)

245 SBN: (*zeigt auf eine Stelle etwas weiter oben, aber unterhalb der Mitte, eher in der rechten Hälfte, nuschelt*) Guck da kommt sechshunnertsechz und (*zeigt etwas weiter links*) da kommt sechshundatsechs. (*lässt den Taschenrechner auf den Tisch gleiten, steht auf und geht zu Murat*)

Sie benennt strukturelle Merkmale von Gleichungen sowie den Begriff an sich: „Das is diese Gleichungen- ‚auf beide Seiten das Gleiche hier drauf.“ (243)

Sabine gelingt in den nachfolgenden Unterrichtsstunden die Lösung mehrerer Anwendungsaufgaben, wobei sie gerade beim Aufstellen der Gleichungen immer wieder die Lehrerin zur Hilfe ruft. Herbert ist noch stärker auf Hilfe angewiesen. So kann er eine Aufgabe mit deutlicher Anleitung lösen, freilich mit den bereits vorher berichteten Ungenauigkeiten

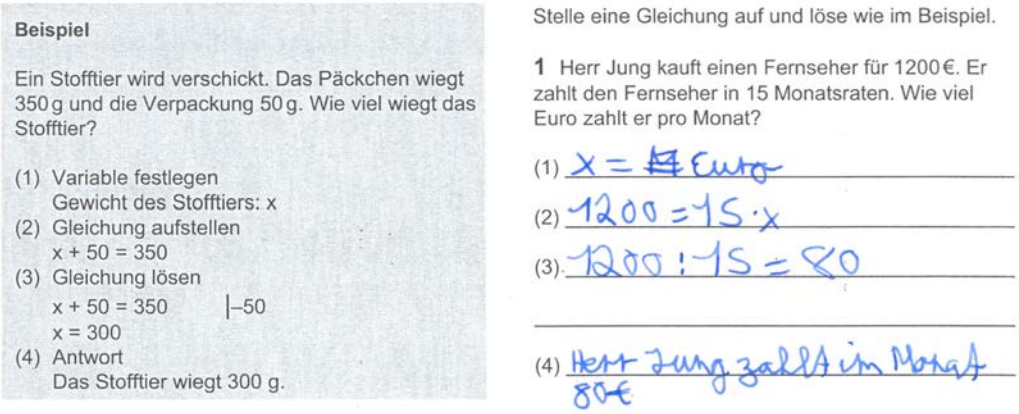


Abbildung 5.18.: Herberts Lösung einer Anwendungsaufgabe mit deutlicher Anleitung

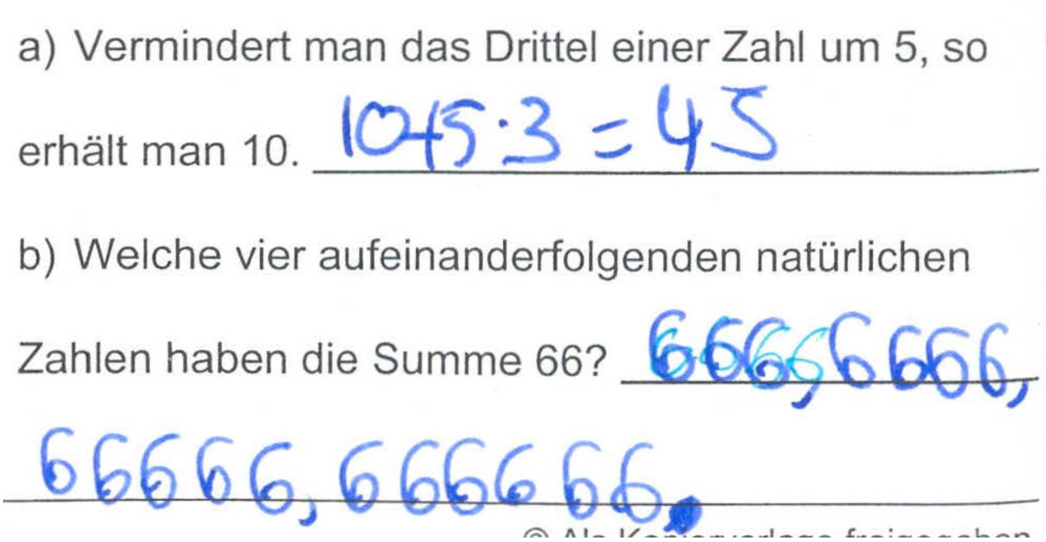


Abbildung 5.19.: Anwendungsaufgaben, die Herbert nicht mit Hilfe von Gleichungen löst

bei der Division (siehe Abbildung 5.18). Andere Aufgaben stellen ihn vor substanzielle Probleme. In Abbildung 5.19 ist die erste Aufgabe ohne Rückgriff auf Gleichungen gelöst, die andere Lösung lässt sich auf Probleme im Verständnis der Fragestellung zurückführen.

5.2. Überblick über den Verlauf bei Ahmed und Katie

Einstieg

Wie bereits erwähnt, brauchen Katie und Ahmed noch etwas länger als Sabine und Herbert, um beim Lösen der auf ihrem Tisch vorliegenden Streichholzschachtelgleichung (siehe Abbildung 5.20) ein funktionierendes Lösungsverfahren anwenden zu können. Dabei kommt es zu Beginn zu einer Situation, in der Ahmed zeigt, dass er die Situation durchaus recht gut erfasst:

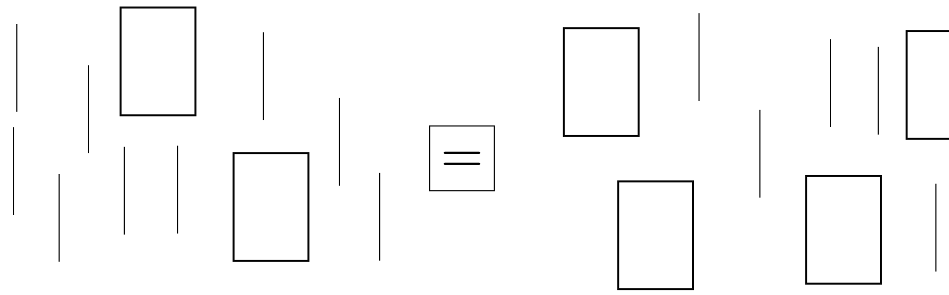


Abbildung 5.20.: Schematische Darstellung der Streichholzschachtelgleichung, die Katie und Ahmed lösen sollten. Auf der linken Seite der Gleichung befinden sich 2 Schachteln und 9 Streichhölzer, auf der rechten Seite 4 Schachteln und 5 Streichhölzer.

Episode 5.10: 111205_3_LG1_7: „erstmal muss man die zusammzähln'"

1 AMD: (*kommt von hinten zum Tisch*) Katie-
2 KTI: Hm' (*schaut zu Ahmed auf*)
3 AMD: (*setzt sich hin*) Wir ham jetzt ja (*macht mit der linken Handkante eine schneidende Bewegung*) irgenwie erstmal muss man die zusammzähln' auf der Seite wo mehr sind.
4 KTI: (*zeigt auf die rechte Seite*) Hier. (*lacht*)
5 AMD: N-e-i-n- ,erstmal (*bewegt die Handfläche über die Streichhölzer auf der linken Seite*) mehr von den Streichhölzern.
6 KTI: Achso. (*zeigt kurz auf die linke Seite*) ,sind aber deine ne'
7 AMD: (*kramt während er redet ein Heft aus seiner Tasche hervor*) Ja. ,und dann muss man die auf der andern Seite zähln- (*zeigt mit dem Heft auf die rechte Seite*) ,und dann muss man sich halt errechnen (*legt das Heft links auf den Tisch und gestikuliert mit der rechten Hand über den Schachteln auf der rechten Seite*) wieviel in den (*bewegt beide Hände rythmisch vor sich*) Schachteln sein muss' (*legt die rechte Hand auf den Tisch, macht mit der linken Hand eine drehende Handbewegung*) damit es insgesamt (*schaut Katie an*) gleich viele sind.
8 KTI: (*auf den rechten Arm aufgestützt*) Oh Gott. (*lässt den rechten Arm auf den Tisch fallen*)
9 AMD: (*zuckt mit den Schultern, macht eine leichte Bewegung mit der linken Hand vor dem Körper*) Ja is doch so. (..) ,aber wie soll man das jetzt aufschreiben- (*nimmt sein Heft in die Hand*)

Ahmed kommt an den Tisch zurück und behauptet, dass man in einer bestimmten Weise vorgehen müsse: Man müsse erst die Streichhölzer zählen, und zwar zuerst auf der Seite, auf der mehr liegen (3). Er verwendet mehrfach die Wörter „erstmal" (3, 5) und „muss" (5, 7) und impliziert so eine zwingende Reihenfolge, die er allerdings nicht begründet. Es wird aber auch deutlich, dass eine Wissenslücke vorliegt: „,und dann muss man sich halt errechnen (*legt das Heft links auf den Tisch und gestikuliert mit der rechten Hand über den Schachteln auf der rechten Seite*) wieviel in den (*bewegt beide Hände rythmisch vor sich*) Schachteln sein muss'" (7).

Katie hört Ahmed zunächst zu. Dabei ist erkennbar, dass sie davon ausgeht, dass jede der beiden Seiten jeweils den dort sitzenden Schüler_innen als „Eigentum" zuzuordnen sind (6). Nachdem deutlich wird, dass mit dem Zählen der Streichhölzer die Arbeit noch nicht getan ist, äußert sie „Oh Gott." (8) Ahmed lässt keine Zweifel an der Richtigkeit seiner Annahmen erkennen. Er fragt sich (und Katie) jedoch, wie das von ihm beschriebene Vorgehen nun aufzuschreiben ist (9). Zu einer gemeinsamen Behandlung dieser Frage kommt es an dieser Stelle aber nicht.

Im Anschluss verfolgt das Schülerpaar zunächst einen Irrweg, der sich als eine Fortsetzung von Ahmeds stark strukturbezogenen, aber kaum begründeten Erwägungen interpretieren lässt:[3]

Episode 5.11: 111205_3_LG1_20: Ein erstes (falsches) Lösungsmuster

11 AMD: Ah okay- (*nimmt eine der Schachteln von der rechten Seite, schüttelt sie*)
12 KTI: Jetzt weißt du nichma was (*zeigt auf die Schachtel in Ahmeds Hand*) da aber drin is.
13 AMD: (*hält inne, lässt die Schachtel sinken, atmet tief ein, beginnt dann mit beiden Händen die Schachteln auf der linken Seite zusammenzutragen*) Dann is das doch voll logisch- (*die vier Schachteln auf der rechten Seite liegen jetzt in zwei Zweierstapeln, Ahmed nimmt die zwei Schachteln auf der linken Seite und legt sie auf die rechte Seite, ebenfalls als Stapel*) ,dann- machen wir alles hier rüber- ,und dann kann man das- (*schaut Katie an*) ,ist das doch voll einfach. (*zeigt nacheinander auf die Streichhölzer auf der linken Seite*) ,eins zwei drei vier fünf- (*schiebt die Streichhölzer von der rechten Seite auf die linke Seite*) (...)
14 KTI: Elf' (*zeigt auf die Streichhölzer, die Ahmed gerade verschiebt*) ,das sind doch elf oder wie- (*lässt ihre Hand auf die Schachteln fallen, die vor ihr liegen*)

Ahmed unterstellt sein Handeln nun einer neuen Regel, die besagt, dass man alle Schachteln auf die eine Seite, alle Streichhölzer auf die andere Seite des Gleichheitszeichen legt: „,dann- machen wir alles hier rüber-" (13). Im Anschluss zählt er die Streichhölzer. Er nennt keinerlei Begründung für das Vorgehen oder warum man das machen darf. Katie reagiert lediglich, indem sie Ahmed die Anzahl der Streichhölzer sagt, die er zählt. Ahmed geht nicht auf sie ein, sondern ruft nach der Lehrerin.

Es ist im Sinne der Darstellung des Lernprozesses von Ahmed und Katie hilfreich, der Entwicklung weiter zu folgen. Die folgende Episode schließt unmittelbar an die vorherige an.

[3] Weil es sich um einen Irrweg handelt, wird in den folgenden beiden Episoden darauf verzichtet, die durchgeführten Handlungen durch Abbildungen genauer zu illustrieren; die verbalen Beschreibungen sollen hier ausreichen.

Episode 5.12: 111205_3_LG1_21-23: Weitere Überlegungen von Ahmed

15 AMD: (*hat die Streichhölzer gerade auf die linke Seite verschoben, dreht sich zur Lehrerin, die sich irgendwo im vorderen Bereich der Klasse aufhält*) Ah Frau Kahn' (*streckt seinen Arm in Richtung der Lehrerin aus*) ‚Frau Kahn' (*hält die eine Hand waagerecht über den Schachteln auf der rechten Seite, die andere waagerecht über der Mappe auf der linken Seite*) ‚könnte so der Lösungsweg sein- (*schaut mehrfach zwischen dem Tisch und der Lehrerin hin und her, die sich von links nähert*) (..)

16 L: (*steht jetzt hinter Ahmed, der sich zu ihr umdreht, auch Katie schaut die Lehrerin an, die Lehrerin hebt die Schultern, bläst di Backen auf, atmet hörbar aus*) (unverständlich) nich- (*grinst und entfernt sich nach hinten*)

17 AMD: (*nimmt eine Schachtel, schüttelt sie, legt sie ab, dreht sich wieder nach vorne, bewegt die Streichhölzer auf dem Tisch, lächelt*) (.) Okay-

18 KTI: (*mit sich überschlagener Stimme, hebt kurz den Arm und lässt ihn wieder auf den Tisch fallen*) Die lacht jetzt schon- (*sitzt wie zuvor an die Wand gelehnt, Ahmed bewegt weiterhin die Streichhölzer auf dem Tisch, so dass sie in etwa parallel zueinander liegen*) (..)

19 AMD: (*zeigt nacheinander von links nach rechts auf jedes einzelne Streichholz*) ‚eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn elf zwölf dreizehn vitzehn. (*setzt die Bewegung nach rechts fort, nimmt zwei der Streichholzschachteln und legt sie etwas weiter nach rechts*) (.) (*zeigt nacheinander von rechts nach links auf jede der Schachteln*) ‚eins zwei drei vier fünf sechs. (*schaut kurz rüber auf die Streichhölzer, dann wieder auf die Schachteln, greift eine der Schachteln, bewegt sie aber zunächst nicht*) ‚was sechs' ‚nein nich sechs- (*schaut zwischen Streichhölzern und Schachteln hin und her*) (..) (*hebt die Schachtel an und lässt sie schnell wieder auf den Tisch sinken*) ‚eins zwei. (*schaut kurz auf die Streichhölzer, dann wieder auf die Schachtel in seiner Hand, wiederholt dann die gleiche Handlung, spricht dabei schneller*) ‚eins zwei drei. (*nimmt eine andere Schachtel und legt sie auf die Schachtel, die er zuvor in der Hand hatte*) ‚vier fünf sechs' (*nimmt eine weitere Schachtel und legt sie ebenfalls auf den Stapel*) ‚sieben- acht neun- (*fasst eine weitere Schachtel an, bewegt sie aber zunächst nicht*) (.) (*hebt die Schachtel an und legt sie auf den Stapel, der daraufhin zusammenfällt*) ‚zehn elf zwölf- (*hält die Hand über dem kollabierten Stapel*)

20 KTI: (*tippt zweimal auf eine der beiden verbliebenen Schachteln*) Dreizehn vierzehn (*tippt zweimal auf die andere Schachtel*) fünfzehn sechzehn. (*legt ihre Hand neben den Schachteln auf den Tisch*) (..)

21 AMD: (*leise, greift nach einer der Schachteln aus dem Stapel*) Warte- (..) (*hebt die Schachtel an*) ‚oder' (*lässt die Schachtel etwas weiter links auf den Tisch fallen*) ‚weil eins zwei drei (*legt eine der Schachteln aus dem vorherigen Stapel auf die erste Schachtel*) ‚vier fünf sechs-

22 KTI: (*teilweise gleichzeitig, fasst sich mit der Hand an den Kopf*) Oah vitzehn ne.

23 AMD: (*legt eine dritte Schachtel aus dem alten Stapel auf den neuen Stapel*) sieben acht neun- (*legt die vierte Schachtel aus dem alten Stapel auf den neuen Stapel*) ‚zehn elf zwölf-

24 KTI: (*fast synchron, aber zunächst leiser*) Zehn elf zwölf- (*Ahmed greift nach einer der beiden übrigen Schachteln, Katie tippt auf die gleiche Schachtel*) ‚dreizehn (*tippt auf die andere Schachtel, währenddessen hebt Ahmed die erste Schachtel an*) vitzehn. (*Ahmed hält mit der Schachtel in der Hand inne, Katie zeigt auf die Schachtel*) ‚weil warum ha-

25 AMD: (*bewegt die Schachtel in seiner Hand auf und ab*) Entweder dreizehn vitzehn-

26 KTI: (*zeigt auf die Schachtel, die Ahmed in seiner Hand hält, folgt ihr mit dem Zeigefinger, als Ahmed sie fast bis auf den Tisch senkt*) Bei dir warn noch zwei nur (*zieht den Zeigefinger ein, zeigt nun mit dem kleinen Finger auf die Schachtel, die noch auf dem Tisch liegt, Ahmed hebt die Schachtel wieder an, schüttelt sie*) ‚zwei Kätschen nur einer oder woas- (*hebt den Arm an, löst die Zeigegeste auf, greift dann nach der Schachtel und hebt sie an, Ahmed legt währenddessen die andere Schachtel auf den Stapel*) ‚in jeder Schachtel war bei dir doch nur ein- (*legt auch die letzte Schachtel auf den Stapel*) Streichholz oder so drinne.

27 AMD: (*schaut auf den Stapel*) Is doch eg-a-l- ‚darum gehts gar nich- (*wandert mit den Augen und schaut schließlich Katie an, beißt die Lippen zusammen, die beiden Schüler schauen sich an, schauen dann beide jeweils vor sich nach unten, Ahmed greift nach seinem Stift, Katie nach der Tischkante, Ahmeds Blick wandert in den Klassenraum*) (6sec) (*rückt auf seinem Stuhl nach hinten, Katie schaut ihn kurz an*) ‚so müsste das doch richtich sein- ‚ich meine das (*schiebt den Stapel langsam von sich weg*) die- einzige Möglichkeit- (*Katie schlägt mit ihrer Hand gegen die obere Schachtel, Ahmed kippt den Rest des Stapels um und legt die Hand darauf*)

28 KTI: (*leise, stützt sich auf*) Oah- (..) (unverständlich) (*hält sich die Hand vor den Mund, Ahmed holt eine Trinkflasche hervor und öffnet sie, schaut dabei kurz zu Katie, dann in den Klassenraum*) (5sec)

29 SX: Ho-e-y-

30 AMD: (*schaut kurz auf den Tisch, dann zu dem Schüler außerhalb des Bildbereichs*) Wir hams glaub ich- (*lächelt*)

Die hinzugerufene Lehrerin äußert sich hauptsächlich nonverbal, beantwortet Ahmeds Frage „könnte so der Lösungsweg sein-“ (15) nur implizit und entfernt sich daraufhin (16). Katie interpretiert die Reaktion der Lehrerin als ein Auslachen und bleibt passiv (18).

Ahmed hingegen setzt seine Überlegungen im Anschluss fort. Zunächst zählt er die Streichhölzer und die Schachteln. Dabei erscheint es so, dass die Anzahl der Schachteln – 6, bei 14 Streichhölzern – nicht Ahmeds Erwartungen entspricht. Aus seiner Äußerung „was sechs’ ‚nein nich sechs-“ (19) spricht Ungläubigkeit. Dennoch versucht Ahmed in der Folge, die Streichhölzer den Schachteln zuzuordnen. Dabei zählt er für die ersten vier Schachteln je drei weiter, also bis zwölf (bis Ende 19). Hier mischt sich Katie ein und zählt für die zwei übrigen Schachteln jeweils um zwei weiter (20). So kommt sie auf eine Gesamtzahl von 16 Streichhölzern, erst später (22) fällt ihr auf, dass nur 14 Streichhölzer zu verteilen sind. Ahmed startet stattdessen neu und setzt zu einer alternativen (angezeigt durch „oder’“, 21) Aufteilung an: Wieder werden vier Schachteln jeweils drei Streichhölzer zugeordnet (21, 23). Daraufhin unterbricht ihn Katie und setzt seine Verteilung fort, mit je einem Streichholz in den beiden verbleibenden Schachteln (24). Für Ahmed scheint es eine weitere Möglichkeit zu geben (25), sein Festhalten an der insgesamt fünften Schachtel (24) deutet darauf hin, dass er es auch für möglich hält, dass diese zwei Streichhölzer enthält und die letzte Schachtel leer bleibt. Katie fordert daraufhin eine Präzisierung ein, fragt, ob Ahmed die Verteilung wie sie machen würde: „in jeder Schachtel war bei dir doch nur ein- (*legt auch die letzte Schachtel auf den Stapel*) Streichholz oder so drinne." (26) Ahmed antwortet darauf: „Is doch eg-a-l- ,darum gehts gar nich-" (27), es bleibt aber offen, worum es für ihn geht. Beide gehen in eine Phase der Untätigkeit über. Nach einer längeren Pause sagt Ahmed: „so müsste das doch richtich sein- ,ich meine das (*schiebt den Stapel langsam von sich weg*) die-einzige Möglichkeit-" (27) und liefert so den einzigen Ansatz einer Begründung für das durchgeführte Vorgehen und setzt gleichzeitig einen Schlusspunkt; Katie geht darauf nicht mehr ein. Gegenüber einem Schüler am Nachbartisch behauptet Ahmed schließlich, die Aufgabe gelöst zu haben (30).

Im Gegensatz zu Sabine und Herbert, die aufgrund der Annahme, die vorliegende Streichholzschachtelgleichung dürfe in keiner Weise verändert werden, lange Zeit keinen Ansatz finden, ignoriert Ahmed hier sämtliche Regeln, die für das Lösen der Streichholzschachteln gegeben waren: Er nimmt keine Rücksicht auf die Gleichheit der beiden Seiten zueinander, indem er die gegebene Ordnung auflöst, und bei der Zuweisung der Streichhölzer zu den Schachteln scheint die Regel, dass in jeder Schachtel gleich viele Streichhölzer sein sollen, keine Rolle zu spielen. In einem weiteren Ansatz, der hier nicht ausführlich dargestellt werden soll (das Transkript findet sich jedoch im Anhang auf Seite 385), vertritt Ahmed dann die Ansicht, man müsse sämtliche Objekte gleichmäßig auf die beiden Seiten des Gleichheitszeichens aufteilen, sodass auf jeder Seite drei Schachteln und sieben Streichhölzer liegen (44-48). In der neu geschaffenen Situation zählt er die Streichhölzer auf der linken Seite (48), dann die dort liegenden Schachteln und nennt ohne explizite Rechnung die Summe (50), danach wiederholt er das Vorgehen auf der rechten Seite (50). Letztlich bricht er ohne weitere Ausführungen ab.

Wie schon zuvor bei Sabine und Herbert soll nun aber auch hier ausführlich dargelegt werden, wie Ahmed und Katie schließlich zum richtigen Verfahren kommen. Die Ausgangssituation bildet eine Episode, in der Sabine zu ihren Klassenkameraden kommt und ihnen ihr Vorgehen erklärt.

Episode 5.13: 111205_3_LG1_44-59_2: Sabine erklärt Katie und Ahmed ihr Vorgehen

71 SBN: Also- (*Ahmed beugt sich über den Tisch und klopft zwei mal auf den Tisch, Katie schaut Sabine an*) (5sec) ,wisst ihr wie viel in ein (unverständlich)'
72 AMD: N-ein- (*Sabine bewegt einige Streichhölzer auf der linken Seite, Katie öffnet vorsichtig eine der Schachteln auf der rechten Seite*) (..)
73 SBN: A-lso-
74 KTI: (*hebt die Schachtel an und hält sie zu Ahmed und Sabine hin*) Hier is ne zwei drin ,hier sind zwei drinne- (*schaut die beiden anderen Schüler mit offenem Mund an, Ahmed schaut kurz die Schachtel an, Katie legt die Schachtel wieder auf den Tisch*)
75 SBN: Ja jetzt hab ich das Ergebnis doch schon.

76 KTI: (*dreht die Schachtel ein kleines bisschen, zieht dann die Hand wieder zurück*) Zwei.
77 AMD: (*schaut zwischen Katie und Sabine hin und her*) Hä-
78 SBN: Guck. (*nimmt zwei Streichhölzer auf der linken Seite und legt sie neben eine der Schachteln, währenddessen geht Katie auf der rechten Seite die Streichhölzer mit dem Zeigefinger entlang*) ‚das is jetzt ein Kasten. (*steht auf, verdeckt so wieder einen Teil des Tisches*) ‚höi' ‚warum is da was runtergefallen' (*schaut auf den Boden vor sich*)
79 AMD: (*mit übertrieben hoher Stimme*) Ja weil dus runtergeworfen hast- (*Sabine bückt sich, hebt ein oder zwei Streichhölzer auf und legt sie wieder auf den Tisch*) (.)
80 KTI: (*zeigt mit der Hand auf die Streichhölzer auf der rechten Seite*) Alter warum hab ich fünf (*zeigt auf die linke Seite*) ‚hast du sechs' ‚ö-h-
81 AMD: (*zeigt nacheinander auf die Streichhölzer auf der linken Seite*) Eins zwei drei-
82 KTI: (*zeigt zweimal auf die Schachtel, die sie zuvor geöffnet hatte, Ahmed zählt leise weiter*) Sechs sieben- (*öffnet eine weitere Schachtel, Sabine kommt wieder und stellt sich wieder vor Ahmeds Tisch*)
83 AMD: (*schaut kurz auf zu Sabine*) Ja es sind neun Stück. (..)
84 SBN: (*Katie murmelt etwas unverständliches, öffnet eine weitere Schachtel*) Ja. ‚und- ‚ja. (*verschiebt einige Streichhölzer auf der linken Seite*) ‚wie ham wir das gerechnet. (*Ahmed schaut kurz zu Katie herüber, diese öffnet jetzt die vierte Schachtel*) ‚wir ham das so gemacht ‚wir ham- (*deutet mit der Hand kurz auf die Streichhölzer auf der rechten Seite, Katie unterbricht ihre Untersuchung der vierten Schachtel, schaut verschmitzt auf*) ‚zwei vier fünf- ‚fünf ham wir (*schiebt fünf Streichhölzer auf der linken Seite an den linken Rand, für einen Eindruck der Veränderungen siehe Abbildungen 5.21 und 5.22 auf Seite 155*) zur Seite gelegt' ‚ne' (*Ahmed nickt, Katie lässt die Schachtel los und lehnt sich zurück, Sabine legt ihre Hand auf die fünf Streichhölzer auf der rechten Seite*) ‚weil fünf sind ja außen. (*legt die Hände auf die verbleibenden vier Streichhölzer auf der linken Seite*) ‚und dann müssen ja zwei drinne sein weil das jetzt (*deutet kurz auf die vier Streichholzschachteln auf der rechten Seite*) vier Kästchen sind.
85 KTI: (*zeigt nacheinander auf die vier Schachteln auf der rechten Seite*) Hier sind bei zwei drei drin.
86 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Und jetzt ist das das (*macht eine ruckartige Geste, nicht genau zu erkennen*) Ergebnis.
87 AMD: Dann sind (*zeigt mit dem Kugelschreiber auf die Streichholzschachteln auf der linken Seite und eventuell auch auf die rechte Seite*) hier also überall zwei Stück drinne.
88 SBN: Ja- ‚weil guck (*zeigt erst auf die vier Streichhölzer auf der linken Seite, dann auf zwei der Schachteln auf der rechten Seite*) das sind zwei- ‚hier sind fünf (*legt ihre linke Hand auf die fünf Streichhölzer auf der rechten Seite, die rechte auf die fünf Streichhölzer auf der linken Seite, die sie zuvor zur Seite gelegt hatte*) das sind die äußeren ‚und dann sind (*legt ihre beiden Hände auf die vier Streichhölzer auf der linken Seite, zieht sie zu Paaren auseinander, zieht dann die beiden Schachteln auf der linken Seite etwas auseinander, für einen Eindruck der neuen Situation siehe Abbildung 5.23 auf Seite 155*) das ja die zwei Kästchen.
89 AMD: Und das die richtige Lösung. (*schaut zu Sabine auf*)

> 90 SBN: Ja-
> 91 KTI: (*tätschelt mit der Hand die vier Schachteln*) Bei mir sind überall zwei-
> 92 SBN: (*Katie stapelt die Streichholzschachteln auf der rechten Seite*) Ich hab bei mir vorhin reingeguckt und dann warn da wirklich fünf drin (unverständlich) (..) (*Sabine geht weg und zu dem Tisch hinter Katie und Ahmed*)
> 93 AMD: Okay- (.) (*zu Sabine gewendet, die jetzt hinter ihm steht*) ‚ich will trotzdem mal Frau Kahn fragen und so-

Sabine führt zunächst lediglich den Nachweis, dass die Lösung, die Katie durch Öffnen einer Schachtel in Erfahrung bringt (74), richtig ist, die Gleichung also aufgeht. Dazu setzt sie gedanklich zwei Schachteln auf der rechten Seite mit jeweils zwei Streichhölzern gleich (78).

Ahmed kann offenbar nicht folgen (77). Auch Sabine ist irritiert, was daran zu erkennen ist, dass sie zu ihrem Tisch zurückkehrt und nachschaut (79-82). Nach ihrer Wiederkehr beginnt sie, das zuvor erarbeitete Lösungsverfahren zu erklären. Dabei zählt sie auf der rechten Seite, nimmt dann die entsprechende Anzahl an Streichhölzern auf der linken Seite weg. Die Begründung ist uneindeutig: Mit ihrer Aussage „‚weil fünf sind ja außen.“ (84) meint Sabine wohl, dass auf der linken Seite so viele Streichhölzer ignoriert werden können, wie rechts offen („außen“, nicht in den Schachteln) auf dem Tisch liegen. Nur noch die verbleibenden Streichhölzer und Schachteln werden betrachtet. Sabine kann nun die Lösung offenbar unmittelbar sehen, indem sie die Streichhölzer, die auf der linken Seite gegenüber der rechten überzählig sind, mit den auf der rechten Seite überzähligen Schachteln gleichsetzt (84, 88). Es bleibt vorerst unklar, inwiefern auch Ahmed versteht, wie Sabine darauf kommt. Er fragt lediglich nach, ob dies wirklich die richtige Lösung ist (89), bleibt aber auch nach Sabines entsprechender Versicherung skeptisch (93).

Katie ist während der kompletten Episode damit beschäftigt, die einzelnen Streichholzschachteln zu öffnen und den Inhalt zu überprüfen, letztlich bestätigt sie auf diesem Weg, dass alle Streichholzschachteln jeweils zwei Streichhölzer enthalten (91).

Nachdem sich Sabine entfernt hat – die entsprechende Episode findet sich im Anhang auf Seite 386 – möchte auch Ahmed in die Schachteln schauen und tut dies. Er untersucht mehrere Schachteln; offenbar hat er also doch Zweifel, dass jede Schachtel den gleichen Inhalt hat. Katie macht klar, dass sie vorher genau das schon getan hat (95-110). Insgesamt wirken Ahmed und Katie ratlos, was sie jetzt noch machen sollen. Sie kennen zwar die Lösung, merken aber dennoch, dass es eine Lücke gibt, die sich ohne Verletzung der Regeln – die Schachteln dürfen ja eigentlich nicht geöffnet werden – nicht schließen lässt: Sie wissen nicht genau, wie Sabine aus der von ihr strukturierten Situation auf den Inhalt der Schachteln geschlossen hat. Sabines Lösung erscheint Ahmed nur als eine von vielen Möglichkeiten: „dann gibts doch jetzt noch voll viele andere Möglichkeiten-“ (109), später ergänzt er: „‚es gibt ja tausende Möglichkeiten-“ (...) „‚und ich hab jetzt schon zwei verschiedene Möglichkeiten aufgeschriebn-“ (129-131).

Von einem Nachbartisch her nimmt Ahmed auf, dass man auch die Schachteln „einfach wegtun“ kann (131). Wie und warum das möglich und erlaubt ist, bleibt aber vorerst unklar, und weder Ahmed noch Katie unternehmen einen konkreten Versuch dieser Möglichkeit nachzugehen.

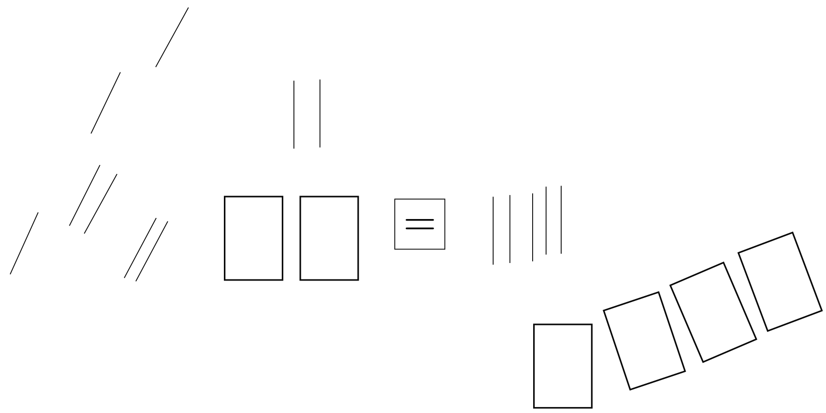


Abbildung 5.21.: Schematische Darstellung der Situation auf dem Tisch vor Sabines Eingreifen

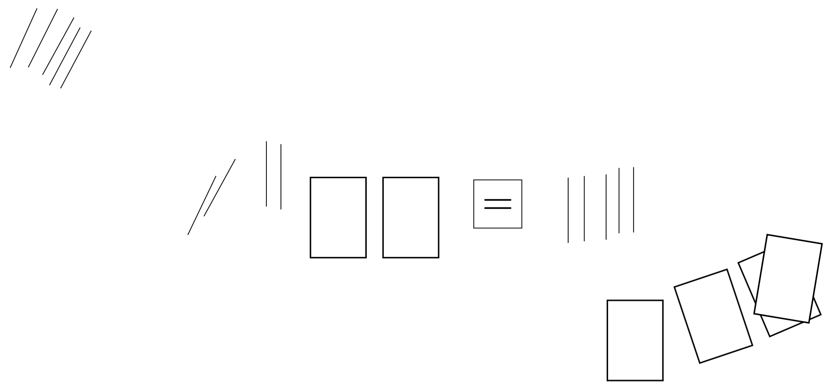


Abbildung 5.22.: Schematische Darstellung der Situation auf dem Tisch nach Sabines ersten Erklärungen (84)

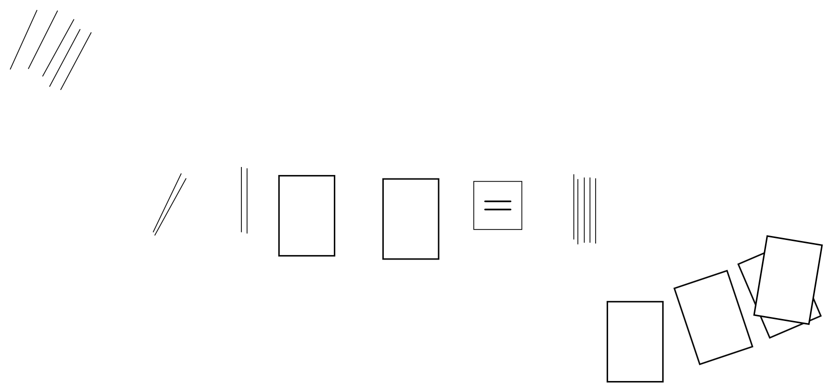


Abbildung 5.23.: Schematische Darstellung der Situation auf dem Tisch nach Sabines weiteren Erläuterungen (88)

Nach einer neuerlichen Phase der Ablenkung sehen sich Katie und Ahmed durch die Lehrerin aufgefordert, ihr bisheriges Verständnis noch einmal zu erklären. Dabei werden durchaus Lücken sichtbar:

Episode 5.14: 111205_3_LG1_44-59_4: Katie und Ahmed erklären das von Sabine vorgeschlagene Vorgehen der Lehrerin

134 L: (*tritt von hinten an die Schüler heran, die noch in Privatgespräche mit dem Nachbartisch vertieft sind, schiebt Ahmed an den Tisch*) Habt ihrs'
135 AMD: (*Katie redet weiterhin nach hinten mit den Nachbarinnen*) Njein- so ja- so nachs nach ,nach Sabines Meinung (*klopft mehrfach auf den Tisch*) ham wirs schon so- ,weil
136 L: Was habt ihr denn gemacht' ,erzähl mal kurz-
137 AMD: (*legt seine linke Hand auf die fünf Streichhözer, die auf der linken Seite zur Seite gelegt wurden*) Wir ham hier die fünf- (*legt seine rechte Hand auf die fünf Streichhölzer auf der rechten Seite, die Lehrerin legt ihre Hand kurz auf Katies Arm, die daraufhin verstummt und sich Ahmed zuwendet*) also schonmal die hier-
138 KTI: So.
139 L: So war das am Anfang' (*nimmt den Stapel auf der rechten Seite auseinander*)
140 KTI: Nein.
141 AMD: Ja.
142 L: (*gleichzeitig*) Wie lag das am Anfang.
143 KTI: Oder' ,doch ja doch-
144 AMD: (*gleichzeitig*) Nee-
145 KTI: Doch doch.
146 AMD: Doch so lag das doch am Anfang.
147 KTI: (*teilweise gleichzeitig, zeigt auf die rechte Seite*) So lags am Anfang.
148 L: Okay'
149 KTI: Ja.
150 L: (*gleichzeitig*) Ja.
151 AMD: Okay jetzt ham wir (*hebt seine rechte Hand an und lässt sie wieder auf die fünf isolierten Streichhölzer auf der linken Seite sinken*) hier fünf das sind- (*zeigt auf die fünf Streichhölzer auf der rechten Seite*) die hier schonmal'
152 L: Was macht ihr mit denen-
153 AMD: Diet (*schiebt die beiden Fünferstapel Streichhölzer parallel in Richtung der oberen Tischkante, siehe Abbildung 5.24*) ,könn wir erstmal wegtun weil das ja gleichviel sind.
154 L: (*teilweise gleichzeitig*) Achso die macht ihr auf beiden Seiten weg.
155 AMD: Ja.
156 L: J-a.
157 AMD: Und jetzt ähm- (*legt seine rechte Hand auf eines der beiden Streichholzpaare auf der linken Seite*) ,gehn wir davon aus (*bewegt seine Hand erst über den beiden*

Schachteln auf der linken Seite, dann in Richtung der anderen Schachteln) dass überall zwei Stück drin sind-

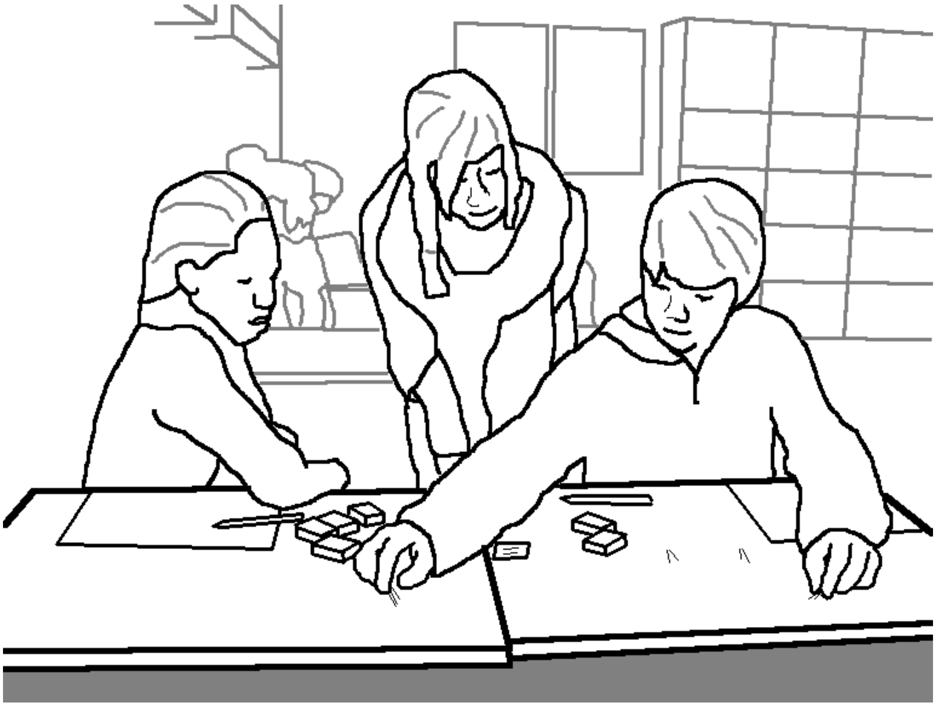


Abbildung 5.24.: Ahmed schiebt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens fünf Streichhölzer an die obere Tischkante (153).

Ahmed beginnt bereits während der Klärungsphase, von den fünf Streichhölzern zu reden, die zuerst zur Seite gelegt werden (137), nun wiederholt er diesen Ansatz (151), zeigt auf die entsprechenden Streichhölzer auf beiden Seiten, äußert sich jedoch zunächst nicht darüber, was mit ihnen getan werden soll. Dies geschieht erst, nachdem die Lehrerin ihn danach fragt (152). Ahmed sagt, dass sie die fünf Streichhözer „erstmal wegtun" müssen, „weil das ja gleichviel sind" (153). Die Lehrerin bestätigt dies und betont, dass diese Handlung auf beiden Seiten durchgeführt werden muss (154), was Ahmed ohne Zögern annimmt (155).

Im weiteren Vorgehen möchte Ahmed als bekannt annehmen, dass in jeder Schachtel zwei Streichhölzer enthalten sind (157) – dies weist die Lehrerin deutlich zurück und leitet so einen weiteren Anlauf ein:

Episode 5.15: 111205_3_LG1_44-59_5: Die Lehrerin provoziert die Überlegung, dass man auch die Schachteln wegnehmen kann

158 L: Nee das wissen wir (*schaut Ahmed an*) ja noch gar nich. (..) ‚so ihr habt jetzt hier die Streichhölzer weggenomm. (*nimmt mit beiden Händen die Streichhölzer, die am Tischrand liegen, und schiebt sie etwas in Richtung der Mitte*)
159 AMD: Ja.

160 L: Auf beiden Seiten gleich viele Streichhölzer. (*stützt sich auf ihre Knie auf, schaut Ahmed an*) ,so wa kann was kann ich jetzt noch machen. ,so Streichhölzer (*geht mit der rechten Hand an die Stelle, wo die Streichhölzer auf der rechten Seite lagen und bewegt sie dort hin und her*) kann ich ja nich mehr wegnehm hab ich hier ja nich- (*schaut Ahmed an, Katie atmet hörbar aus*) ,aber'
161 AMD: Aber die Kisten-
162 L: Wie viele- kann ich wegnehm'
163 AMD: Hier zwei- und hier zwei. (*nimmt zwei der vier Schachteln auf der rechten Seite in seine rechte Hand und die beiden Schachteln auf der linken Seite in seine linke Hand, dann schiebt er beide Hände mit den Schachteln zur oberen Tischkante, wo bereits jeweils fünf Streichhölzer liegen, siehe Abbildung 5.25*)
164 L: (*teilweise gleichzeitig*) Und da zwei. ,also immer gleich viele ne' (*schaut kurz Katie an*)
165 KTI: Ja-
166 AMD: Ja.
167 L: Weil das muss ja gleich bleiben so was ham wir dann hier noch liegen- (*schiebt die zwei Schachteln auf der rechten Seite und die vier Streichhölzer auf der linken Seite zur Mitte*)
168 KTI: (*zeigt auf die linke Seite*) Vier-
169 AMD: Vier Streichhölzer und zwei-
170 KTI: (*gleichzeitig*) Dann müssten ja auch (*legt ihre Hand auf die zwei Streichholzschachteln auf der rechten Seite, siehe Abbildung 5.26*) hier vier.
171 L: Aha und das- kann ich jetzt rechnen' (*schaut Ahmed an*)
172 AMD: (*zeigt auf die linke Seite mit den Streichhölzern*) Dass hier ,dass hier (*zeigt auf die rechte Seite mit den Schachteln*) da auch vier drin sind-
173 L: Wie rechne ich das denn'
174 AMD: (*zeigt weiterhin auf die rechte Seite*) Weil da ja überall gleich viele drin sind-
175 L: Genau es muss (*zeigt abwechselnd auf die linke und auf die rechte Seite*) ist jetzt gleich-
176 AMD: A-h-

Die Lehrerin fordert heraus, weiter über Handlungen zu sprechen, die durchgeführt werden können. Sie klärt, dass bis hierhin auf beiden Seiten die gleiche Anzahl Streichhölzer weggenommen wurde, und fragt dann, was man noch machen könne, wenn man keine Streichhölzer mehr wegnehmen könne (158-160). Ahmed ergänzt, dass zwei Schachteln („Kisten“ (161), „Hier zwei- und hier zwei.“ (163)) entfernt werden können, die Lehrerin betont wiederum, dass „,also immer gleich viele“ (164) weggenommen werden müssen, „Weil das muss ja gleich bleiben“ (167). Unmittelbar anschließend leitet sie wieder eine Rekapitulation der Lage ein, die direkt zu Erklärungen über den Inhalt der Schachteln führt (167-174).

Die Schüler haben entscheidende Schritte in Bezug auf die Regeln gemacht, die bei den Streichholzschachtelgleichungen gelten sollen: Es wird deutlich, dass die Wegnehm-Handlungen auf beiden Seiten gleichermaßen durchgeführt werden müssen (164), und dass dies dazu führt, dass die Gleichheit der Anzahlen der Streichhölzer auf beiden Seiten der

Abbildung 5.25.: Ahmed schiebt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zwei Schachteln an die obere Tischkante (163).

Abbildung 5.26.: Katie deutet auf die zwei Streichholzschachteln auf der linken Seite: „Dann müssten ja auch hier vier." (170)

Gleichung erhalten bleibt (167, 170). Außerdem ist Ahmed nun klar, dass jede Schachtel die gleiche Anzahl an Streichhölzern enthält (174). Damit ist die Grundlage geschaffen für die rechnerische Gewinnung der Lösung der Gleichung, die allerdings nicht problemlos vonstatten geht:

Episode 5.16: 111205_3_LG1_44-59_6: Gewinnung der Lösung aus der vereinfachten Gleichung

177 L: Und wir wissen (*zeigt kurz auf die rechte Seite*) das sind jetzt vier' (*schaut Ahmed an, Katie schaut ihn ebenfalls an, Ahmed nickt*) (.) (*nickend*) ,wie rechne ich das aus' ,um drauf zu komm (*nimmt eine der Schachteln und schüttelt sie, schaut dabei lächelnd Katie an*) wie viel hier drin sind'
178 AMD: Aso-
179 KTI: Oh Mann.
180 AMD: Ähm- ,ähm- (...)
181 L: (*richtet sich auf und redet in Richtung einer anderen Schülerin*) Marie wenn ihr das aufgeschrieben habt (*bewegt sich in Richtung der Schülerin*) könnt ihr hier die erste Aufgabe ne'
182 AMD: (*redet in Richtung der Lehrerin, die sich jetzt außerhalb des Bildbereichs aufhält*) Vier Streichhölzer ist gleich zwei Schachteln- (*schaut Katie an, Katie lacht, die Lehrerin kommt wieder*) (..) ,ja vier ,vier Streichhölzer ist gleich zwei Schachteln-
183 L: Ja aber wie rechne ich denn jetzt aus wie viele in einer drin sind' (*schaut Ahmed an*) ,die Rechnung will ich einmal hörn-
184 AMD: Öhm- (...) eins durch zwei- (*schaut zur Lehrerin auf*) ,hier eins- (*zeigt auf eine der beiden Schachteln auf der rechten Seite der Gleichung*)
185 L: Eins durch zwei wo kommt denn die eins her ,eins durch zwei sind null komma fünf-
186 AMD: Nee (*zeigt mit dem Stift auf die beiden Schachteln auf der linken Seite*) zwei durch zwei. ,die beiden-
187 L: Zwei durch zwei ist eins. (*schaut Ahmed an*)
188 AMD: Ja. ,hä keine Ahnung. (*bewegt den Stift auf die linke Seite mit den Streichhölzern*) (...) (*die Lehrerin schaut Katie an, Katie lacht laut los, Ahmed schaut weiterhin auf den Tisch vor sich*)
189 L: (*legt die Hand auf Ahmeds Arm*) Is ja richtich es sind ja zwei Stück da drin (*berührt kurz die beiden Streichholzschachteln und die Streichhölzer auf der linken Seite*)
190 AMD: Ja-
191 L: Aber da ich (*bewegt die beiden Streichholzschachteln ein kleines Stück*) ,es gibt ,wie rechne ich das denn aus du hast hier zwei Schachteln (*bewegt die Streichhölzer ein bisschen*) da vier Streichhölzer. (.) ,und das soll da soll ja zwei rauskomm- (*legt die vier Streichhölzer in zwei Paaren auf den Tisch, siehe Abbildung 5.27*) (.) ,also' (*schaut Ahmed an*) (.)
192 AMD: (*schaut Katie an, streckt seine Hand in ihre Richtung aus*) Katie sag-
193 KTI: (*hebt die Hände*) Ja ich weiß auch nich- (*lacht*) (.)

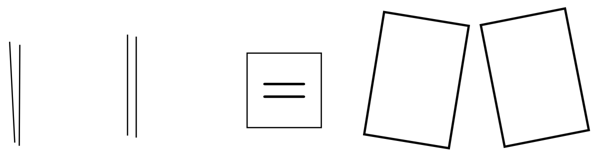


Abbildung 5.27.: Schematische Darstellung der Situation, die die Lehrerin auf dem Tisch herstellt (191)

194 L: (*lässt die Hand in einem Bogen auf die linke Seite mit den Streichhölzern fallen*) Vier' (*schaut Ahmed an*)
195 AMD: Ja'
196 L: (*bewegt die Hand in einem Bogen auf die rechte Seite mit den Schachteln, schaut weiterhin Ahmed an*) geteilt durch'
197 AMD: Zwei.
198 L: (*nickt*) Zwei ,gleich zwei (*nimmt zwei der vier Streichhölzer in die Hand*) ne'
199 AMD: A-h-
200 KTI: A-h-
201 L: Also die (*legt die Hand auf die linke Seite mit den Streichhölzern*) Streichhölzer geteilt durch (*zeigt auf die Schachteln auf der rechten Seite*) die Schachteln. (*schaut Katie an*)
202 KTI: Achso'
203 AMD: Achso ja irgendwie logisch.

Durch weiteres Nachfragen versucht die Lehrerin die letzte Handlung, das Berechnen der Lösung durch Division, herauszufordern. Während Katie kaum interagiert und darauf besteht, dass sie die Lösung nicht weiß (193), entwickelt sich ein Dialog zwischen der Lehrerin und Ahmed. Dabei fragt die Lehrerin immer wieder, was man rechnet (171, 173, 177, 183), um auf das Ergebnis zu kommen. Ahmed schildert lediglich die Situation, der er sich gegenübergestellt sieht: „Vier Streichhölzer ist gleich zwei Schachteln- (*schaut Katie an, Katie lacht, die Lehrerin kommt wieder*) (..) ,ja vier ,vier Streichhölzer ist gleich zwei Schachteln-" (182). Schließlich beginnt er jedoch, verschiedene Rechnungen vorzuschlagen: $1 : 2$ (184), $2 : 2$ (186). Beide Vorschläge lehnt die Lehrerin ab, indem sie die daraus resultierenden Ergebnisse sagt, was Ahmed resignieren lässt (188).

Die Lehrerin bezieht daraufhin die bekannte Information, dass in jeder Schachtel zwei Streichhölzer sind, in ihre Hilfestellung ein und versucht, die Division als eine Rechnung zu motivieren, die zu den vorliegenden Zahlen 4 und 2 das Ergebnis 2 ausgibt: „Aber da ich (*bewegt die beiden Streichholzschachteln ein kleines Stück*) ,es gibt ,wie rechne ich das denn aus du hast hier zwei Schachteln (*bewegt die Streichhölzer ein bisschen*) da vier Streichhölzer. (.) ,und das soll da soll ja zwei rauskomm- (*legt die vier Streichhölzer in zwei Paaren auf den Tisch*) (.) ,also' (*schaut Ahmed an*) (.)" (191)

Als Ahmed und Katie wiederum nicht weiterwissen (192-193), beginnt die Lehrerin, die Rechnung vorzusagen (194-198). Ahmed und Katie signalisieren, dass sie verstehen (199-203), was die Lehrerin nicht überprüft. Es folgt noch eine Verallgemeinerung (201) und die Aufforderung, nun den gesamten Prozess aufzuschreiben (204), dann entfernt sich die

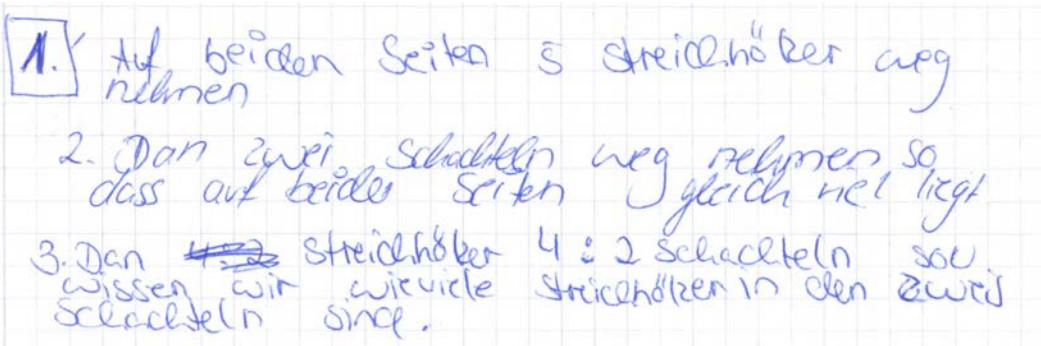

1. Auf beiden Seiten 5 Streichhöker weg nehmen
2. Dan zwei Schachteln weg nehmen so dass auf beides Seiten gleich viel liegt
3. Dan ~~4:2~~ Streichhöker 4 : 2 Schachteln sou wissen wir wieviele Streichhölzen in den zwei Schachteln sind.

Abbildung 5.28.: Katies Beschreibung des Vorgehens beim Lösen von Streichholzschachtelgleichungen

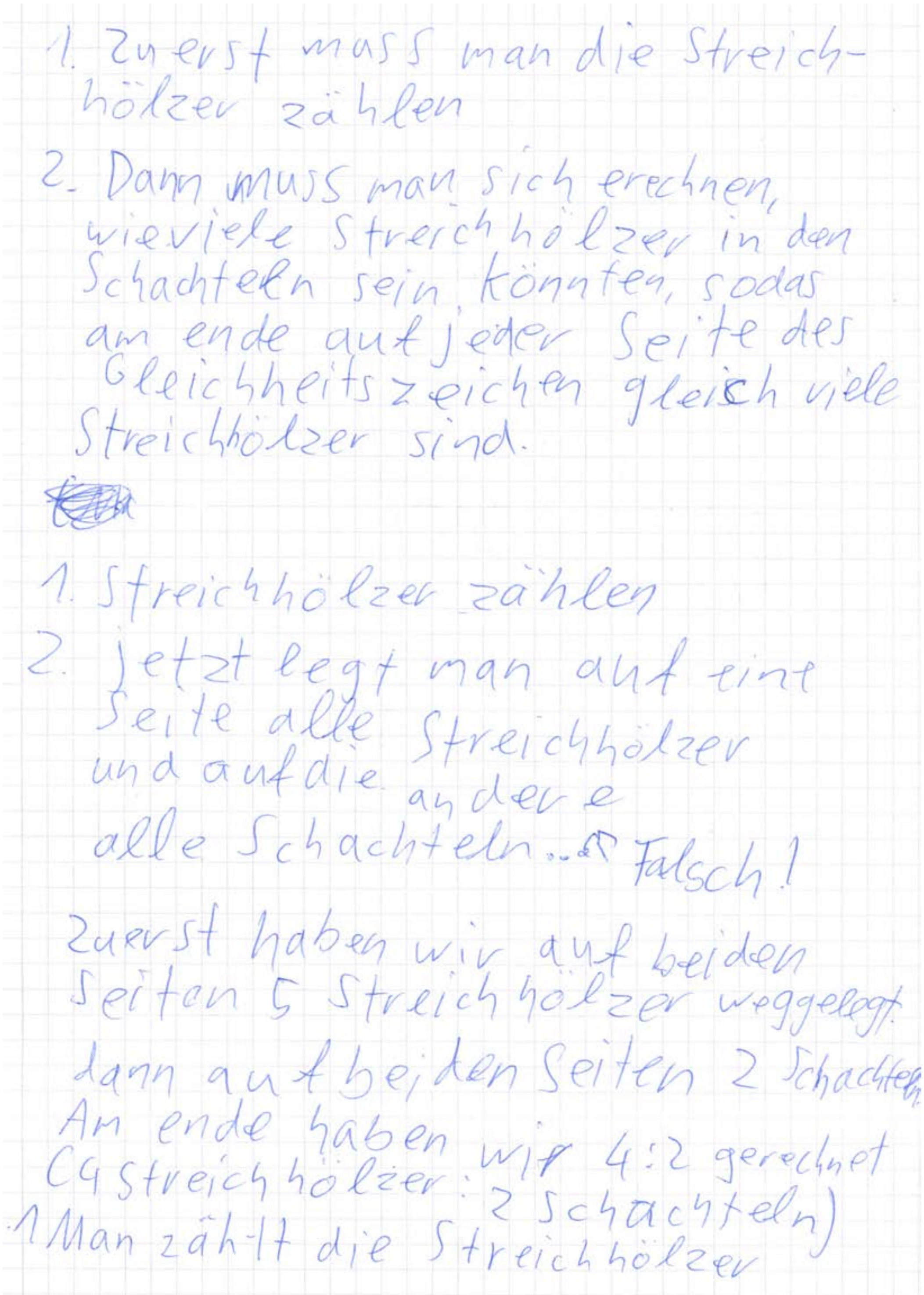
Lehrerin.

Eine wirklich allgemeine Erklärung ist in den Unterlagen von Katie und Ahmed jedoch nicht zu finden. In Katies Beschreibung (siehe Abbildung 5.28) fehlt die Begründung für die jeweiligen Handlungen im ersten Schritt ganz. Die zum zweiten Schritt angegebene Begründung ist nicht schlüssig. Hier hat die Schülerin vielmehr die Überlegung wiedergegeben, die hinter der abschließenden Division steht, nämlich dass auf beiden Seiten die gleiche Anzahl an Streichhölzern liegt – ihr scheint nicht klar zu sein, dass dies auch schon in der Ausgangsgleichung der Fall war. Ahmed schreibt seine Beschreibung unter die beiden Ansätze, die er zuvor propagiert hatte (siehe Abbildung 5.29) und markiert die Idee, nach der Streichhölzer und Streichholzschachteln auf die beiden Seiten des Gleichheitszeichens gebracht werden sollten, als „Falsch!“. Genau wie Katie bezieht sich auch Ahmed nur auf die konkret vorliegende Situation, Begründungen fehlen: „Zuerst haben wir auf beiden Seiten 5 Streichhölzer weggelegt. dann auf beiden Seiten 2 Schachteln. Am Ende haben wir 4 : 2 gerechnet (4 Streichhölzer : 2 Schachteln)“

Weitere Entwicklung

Bei der Durchführung des erlernten Verfahrens ist Ahmeds Art, dieses aufzuschreiben, besonders erwähnenswert. Bei den ersten beiden Aufgaben von Aufgabenblatt 1 geht er vor, wie es in Abbildung 5.30 auf Seite 164 sichtbar ist: Zunächst zeichnet er die Streichholzschachtelgleichung vom Aufgabenblatt ab, wobei er bereits nach Streichhölzern und Schachteln sortiert. Darunter schreibt er nochmals die Gleichung – allerdings gruppiert er nun alle Elemente, die auf beiden Seiten in gleicher Anzahl vorliegen, in einer Wolke um das Gleichheitszeichen herum. Außerhalb dieser Wolke bleiben auf der einen Seite nur Schachteln, auf der anderen nur Streichhölzer übrig. Aus den entsprechenden Anzahlen bestimmt Ahmed (ähnlich wie Herbert) durch Verrechnung die Lösung. Für alle weiteren Gleichungen des ersten Aufgabenblattes nutzt Ahmed eine leicht vereinfachte Darstellung (siehe Abbildung 5.31 auf Seite 164), in der er nicht mehr sämtliche Objekte einzeln zeichnet. Stattdessen zählt er die Objekte und kann in einer Kurzschreibweise ihre jeweilige Anzahl ausdrücken.

Dieser Ansatz ist in der Klasse einmalig. Er stößt jedoch mit seiner engen Orientierung



1. Zuerst muss man die Streich-
hölzer zählen
2. Dann muss man sich erechnen,
wieviele Strerchhölzer in den
Schachteln sein könnten, sodas
am ende auf jeder Seite des
Gleichheitszeichen gleich viele
Streichhölzer sind.

1. Streichhölzer zählen
2. Jetzt legt man auf eine
Seite alle Streichhölzer
und auf die andere
alle Schachteln... Falsch!

Zuerst haben wir auf beiden
Seiten 5 Streichhölzer weggelegt.
dann auf beiden Seiten 2 Schachteln
Am ende haben wir 4:2 gerechnet
(4 Streichhölzer : 2 Schachteln)
1 Man zählt die Streichhölzer

Abbildung 5.29.: Ahmeds Ansätze zu einer Beschreibung des Vorgehens beim Lösen von Streichholzschachtelgleichungen. Beginnend mit „Zuerst“ im unteren Drittel schließlich die Beschreibung des Vorgehens, das mit der Lehrerin erarbeitet wurde. Die letzte Zeile ist der Ansatz zu einer kompletten Beschreibung, die nicht mehr vollendet wurde.

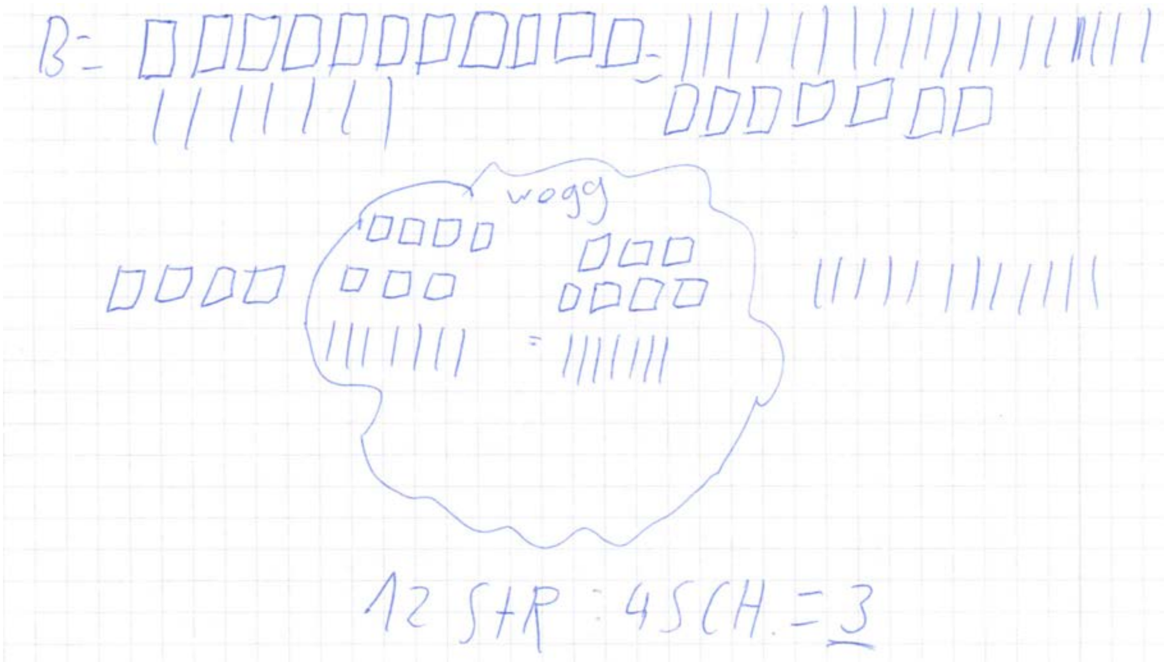


Abbildung 5.30.: Ahmeds Bearbeitung der Aufgabe B von Aufgabenblatt 1

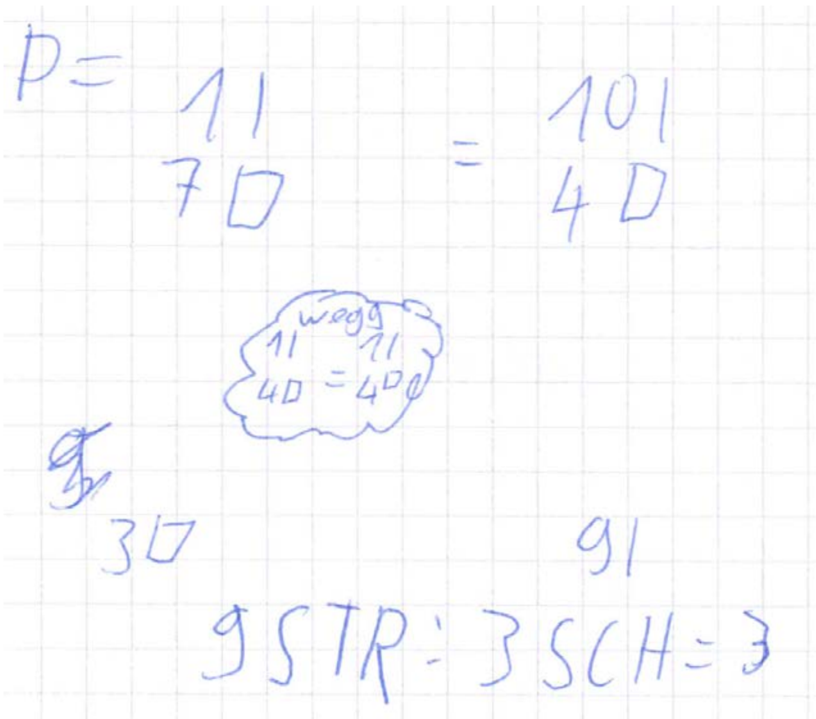


Abbildung 5.31.: Ahmeds Bearbeitung der Aufgabe D von Aufgabenblatt 1

an den physisch vorliegenden Objekten bei Gleichung C von Aufgabenblatt 2 an eine Grenze. Ihre Lösung erfordert in Fortsetzung des bisherigen Vorgehens ein „Wegnehmen ins Negative“ (oder aber eine Überlegung darüber, wie eine Summe 0 ergeben kann – sie trat in der beobachteten Klasse jedoch nicht auf). Ahmed kommt mit seinem Verfahren zu einer Gleichung, bei der auf der linken Seite der Gleichung 0 Streichhölzer und 0 Schachteln vorliegen (siehe Abbildung 5.32 auf Seite 166, oben). Die Lehrerin entscheidet hier, nicht mit dieser Situation weiterzuarbeiten, sondern führt in Ahmeds Aufzeichnungen die Schreibweise ein, die zu diesem Zeitpunkt von den meisten Schülerinnen und Schülern verwendet wird: Statt der Zeichnungen soll Ahmed Abkürzungen verwenden. Wichtiger in der Situation ist aber, dass die Umformungen nun auf der rechten Seite notiert werden. In Ahmeds Wolken konnte nur so viel „verschwinden“, wie auf der jeweiligen Seite tatsächlich vorlag. Mit der neuen Schreibweise ist es möglich, am Ende auf einer Seite der Gleichung eine Anzahl an Schachteln, auf der anderen Seite eine negative Anzahl an Streichhölzern zu erhalten. Diese Möglichkeit wird von der Lehrerin durch kleine Zettel plausibilisiert, die die Streichhölzer nun ersetzen.

Es geht nun also nicht mehr um Streichhölzer, sondern um Zahlenwerte, die auf dem Tisch und in den Schachteln vorliegen. Diese Erkenntnis setzt Ahmed gleich bei der Lösung der nächsten Aufgabe D (siehe Abbildung 5.32 auf Seite 166, untere Hälfte) um, indem er die Abkürzung „St.“ (für Streichhölzer) nicht mehr verwendet. Im Vergleich mit der von der Lehrerin angeleiteten Aufgabe C ist zu erkennen, dass er noch einmal die Division als Verrechnung der beiden Zahlenwerte durchführt. Bei E dann ist Ahmed bei einer Notation angekommen, die der symbolisch-algebraischen schon sehr nahekommt – nur die Plus-Zeichen zwischen den Schachteln/Variablen und den Zahlenwerten/Skalaren fehlen.

Katie löst die erste Aufgabe noch komplett verbal (siehe Abbildung 5.33 auf Seite 167). Bei allen weiteren Gleichungen auf dem ersten Aufgabenblatt und den ersten beiden Gleichungen auf dem zweiten Aufgabenblatt verwendet sie eine Schreibweise, die zwar Ahmeds ähnelt, aber insgesamt einfacher ist (als Beispiel siehe Abbildung 5.34 auf Seite 167). Katie bleibt die ganze Zeit bei einer rein bildlichen Darstellung, fasst also nicht zusammen. Die Objekte, die auf beiden Seiten zu vernachlässigen sind, streicht sie durch; anders als durch Ahmeds Wolken wird hier nicht deutlich gemacht, dass auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens jeweils das Gleiche gemacht werden muss.

Katie muss wie Ahmed ihr Notationssystem anpassen, als negative Lösungen ins Spiel kommen. Ihre Aufzeichnungen ähneln nun stark denen von Ahmed, Katie geht aber offenbar weiterhin von Schachteln und Streichhölzern aus: Sie verwendet nach wie vor für beides Abkürzungen; erst im letzten Schritt lässt sie diese fallen. Hier steht dann die Zeichnung einer Schachtel einem Zahlenwert gegenüber (siehe Abbildung 5.35). Einige Aufgaben werden von Katie aus Zeitgründen nicht bearbeitet.

Einführung der symbolisch-algebraischen Schreibweise

Die Einführung der symbolisch-algebraischen Schreibweise besteht bei Ahmed nur noch in einem Austauschen der Abkürzung „Sch.“ gegen die Variable x. Er löst sämtliche Gleichungen, die auf den Aufgabenblättern gegeben waren, in der vorgesehenen Weise. Anders als

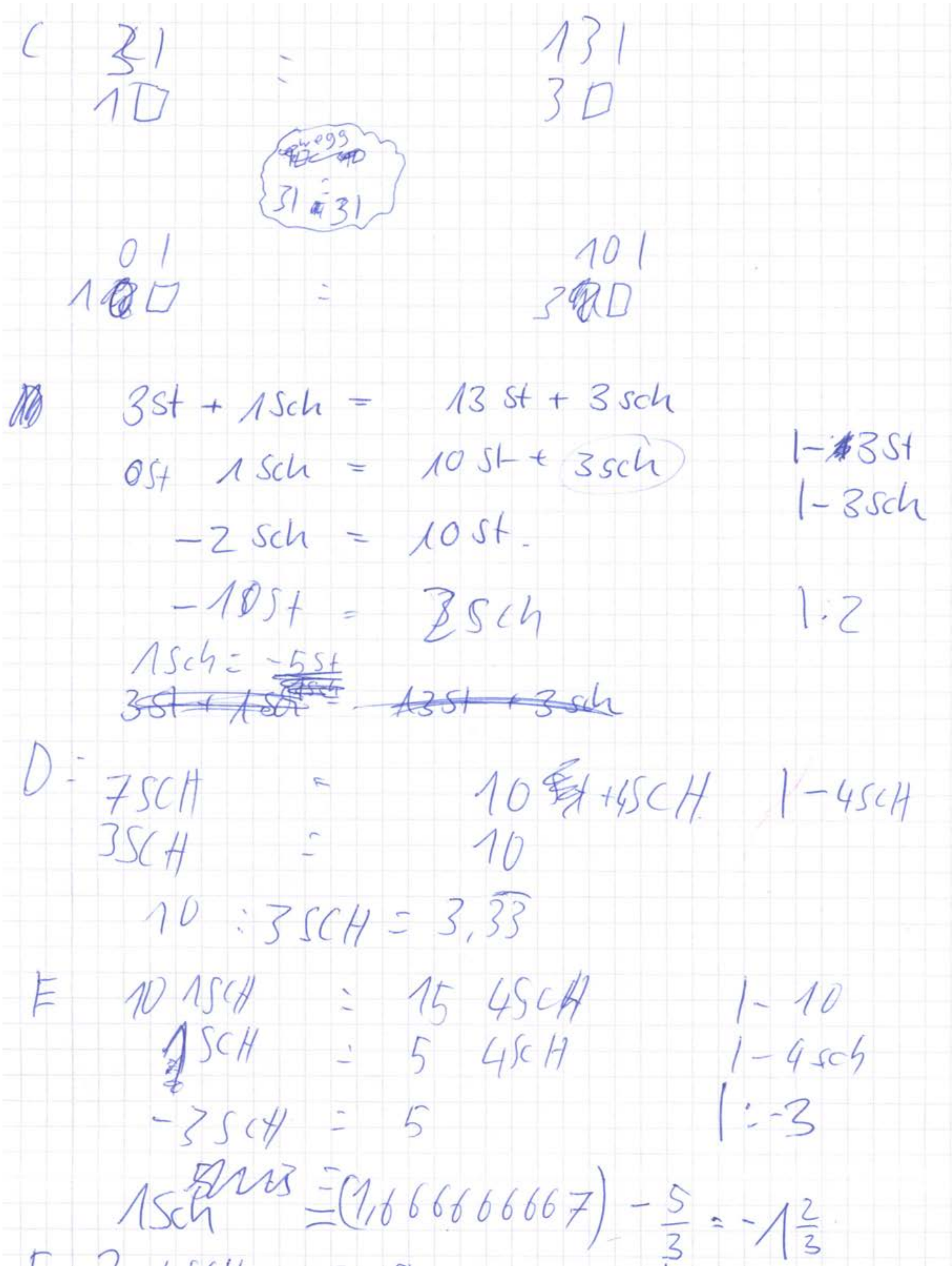


Abbildung 5.32.: Die Veränderung in Ahmeds Notation bei der Bearbeitung der Aufgaben C bis E von Aufgabenblatt 2

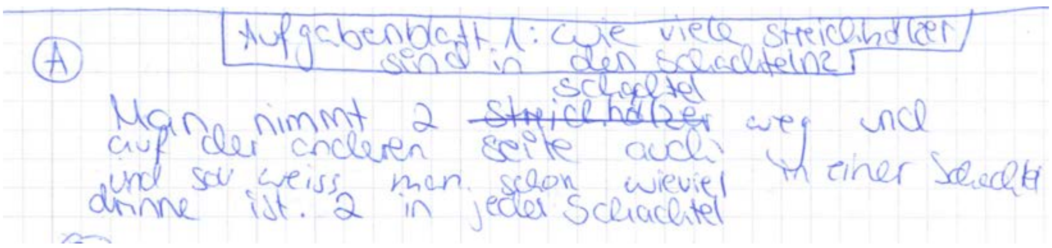


Abbildung 5.33.: Katies Bearbeitung der Aufgabe A von Aufgabenblatt 1: „Man nimmt 2 ~~Streichhölzer~~ Schachtel weg und auf der anderen Seite auch und sou weiss man schon wieviel in einer Schachtel drinne ist. 2 in jeder Schachtel"

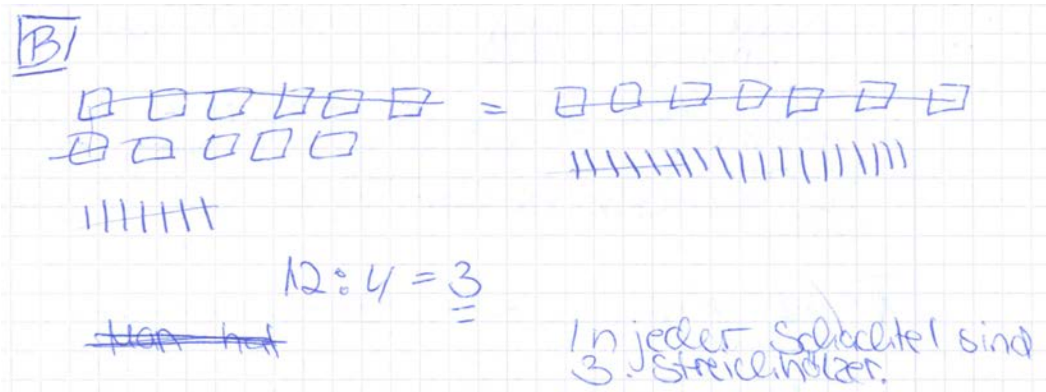


Abbildung 5.34.: Katies Bearbeitung der Aufgabe B von Aufgabenblatt 1

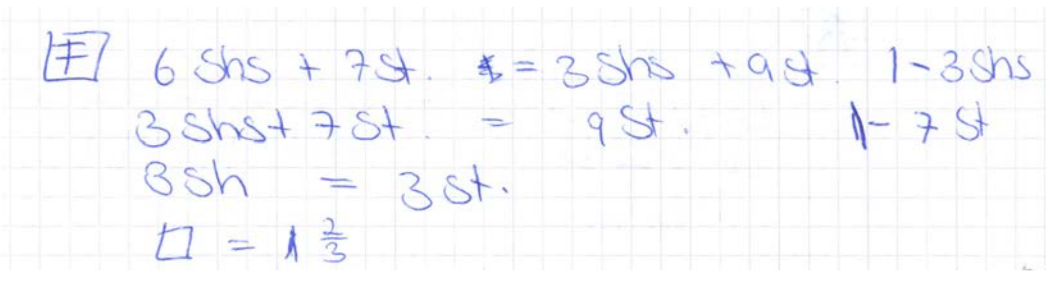


Abbildung 5.35.: Katies Bearbeitung der Aufgabe F von Aufgabenblatt 2

Vergesslich im Elektromarkt

Ugur war im Elektromarkt. Dort gab es ein Angebot: Wenn man zwei CDs kauft, gibt es eine dritte zum halben Preis – also hat er sich drei CDs gekauft. Außerdem brauchte er noch neue Kopfhörer.
Als Ugur wieder zu Hause ist, gefällt ihm eine CD besonders gut, und er überlegt, sich eine weitere CD der gleichen Sängerin zu kaufen. Den Bon hat er schon weggeworfen, nur bei den Kopfhörern weiß er aufgrund des Preisschilds, dass sie 14,90€ gekostet haben. Und er kann sich erinnern, dass er mit einem 50-Euro-Schein bezahlt hat und 35 Cent zurückbekommen hat. Wie kann er damit ausrechnen, was eine CD kostet?

Abbildung 5.36.: Die Aufgabenstellung, anhand derer Katie und Ahmed sich Anwendungsaufgaben annähern sollten

Sabine kommt er aber nicht dazu, weitere Aufgaben aus dem Buch zu bearbeiten, daher sind keine Aussagen darüber möglich, wie er mit nicht-ganzzahligen Faktoren vor der Variablen zurecht gekommen wäre.

Katie kommt ebenfalls scheinbar problemlos mit den symbolisch-algebraischen Gleichungen zurecht. Sie löst sogar einige Aufgaben aus dem Buch, darunter allerdings nur eine mit der besonderen Schwierigkeit, dass die Variable einen nicht-ganzzahligen Faktor aufweist: $\frac{x}{2} = 10$. Nachdem sie für diese die Rechnung $\frac{20}{2} = 10$ notiert, also lediglich den Nachweis führt, dass 20 die Gleichung löst, nicht aber das eigentlich bekannte Lösungsverfahren anwendet, sieht sie vom Lösen der folgenden Gleichung ($2 = x : 10$) ab und bearbeitet in der Folge nur noch Gleichungen, die nicht schwieriger sind als die bisher bearbeiteten.

Sowohl Ahmed als auch Katie stellen beim „Einpacken und Auspacken“ recht komplizierte Gleichungen auf und zeigen andererseits, dass sie in der Lage sind, solche zu lösen.

Anwendungsaufgaben

Ahmed und Katie bearbeiten die Aufgabe „Vergesslich im Elektromarkt“ (siehe Abbildung 5.36). Ahmed hat schnell erkannt, dass nur für die CDs 34,75€ bezahlt werden. Ihm ist auch klar, dass für zwei CDs der volle Preis, für die dritte nur der halbe Preis bezahlt wurde. Das Problem liegt nun darin, den ursprünglichen Preis einer CD zu ermitteln.

Episode 5.17: Auszug aus 120109_3_LG10_23: Suche nach einer Lösung

110 AMD: Tsa. ‚was solln wir je ‚a und wie gehts jetzt weiter’ (*dreht sich etwas nach links, schaut auf die Lerntreppe zu linearen Gleichungen, ein Blatt, das den Schülerinnen und Schülern als Überblick über die Unterrichtseinheit ausgegeben wurde (siehe Anhang A.1)*) (..)

111 KTI: Nachdenken nachdenken. (*Ahmed schaut wieder auf das Aufgabenblatt, Katie schaut auf ihres*) (...) ‚ähm- (*Katie schaut weiterhin auf ihr Aufgabenblatt, Ahmed schaut nach vorne, wo Sabine hörbar ist*) (7sec) (*klopft mehrfach auf den Taschenrechner, schaut*

auf zu Ahmed, der weiterhin in der Klasse umherschaut) ,so jetzt sind schonmal die Kopfhörer und ähm- (*schaut wieder auf das Aufgabenblatt*) (.) ,ähm- (.) (*schaut an die Decke*) ,oh-

112 Ahmed: (*schaut gerade nach vorne*) Also das dritte is ja weg- (*beide Schüler schauen gerade nach vorne*) (7sec) (*Katie schaut auf die Uhr, die neben ihr hängt*) ,muss man das (*Katie dreht sich ruckartig zu Ahmed, schlägt dabei mit ihrem Zopf gegen die Uhr*) irgenwie aufteiln' (...)

113 KTI: (*fasst sich an ihren Zopf*) U-h- (..) (*hält sich die Hand vor den Mund und spricht hinein, unverständlich, beide Schüler schauen gerade nach vorne*) (6sec)

114 AMD: (*leise, hält sich den Stift ans Kinn*) Minus die dritte Zahl aba die dritte Zahl is- halb so klein- wie andern beiden.

115 KTI: (*lehnt sich nach vorne über das Aufgabenblatt und stützt sich auf*) (unverständlich) (6sec)

116 AMD: Und wir suchen suchen und suchen und irgendwann wird man finden aber es geht natürlich auch schneller- (*Katie schaut kurz auf zu Ahmed, dann wieder auf ihr Aufgabenblatt*) (.) (*schaut Katie an, Katie schaut Ahmed an*) ,nur darauf komm ich nich soll ich ,versuch du mal das irgnwie so- rauszuf ,wie soll ichs denn mit den (*deutet mit der linken Hand auf die Lerntreppe zu linearen Gleichungen in seiner offenen Mappe*) ,mit den Gleichungn- ,okay- (*Katie nimmt ihre Mappe und legt sie mit der Lerntreppe aufgeschlagen vor sich hin*) ,ich weiß nich wie- (*lehnt sich mit seinem Stuhl zurück*) ,oah ich sch versuch einfach mal anders-

117 KTI: (*teilweise gleichzeitig*) Ich versuch. (.)

118 AMD: (*streicht sich mit der Hand über den Mund, hält sie dann weiter davor*) Auf jeden Fall- (*Ahmed hält sich weiterhin die Hand vor den Mund, Katie schaut auf die Lerntreppe*) (5sec) (*stützt sich auf beide Arme auf und hält sich die Hände an die Ohren*) ,also wenn ich- ersmal- (...) (*leiser*) acht nehme. (.) (*flüstert*) ,acht- plus acht- plus (*wieder lauter*) ,ach nee. (4sec) (*Katie blättert ihre Mappe um*) ,mal dreizn. (*leiser, Katie schaut sich nun eine andere Seite in ihrer Mappe an*) ,dreizehn plus dreizehn- (.) ,s-i-n-d-sechsunzwanzich plus (..) sechs komma fünf- (10sec) (*bewegt den Mund, nichts hörbar, schnippst dann einmal, dreht sich zu Katie, wedelt mit dem linken Zeigefinger*) ,eine CD- (*tippt Katie mit der rechten Hand auf den Arm, sie schaut ihn an*) (..) (*reckt den linken Zeigefinger nach oben*) ,eine CD kostet auf jeden Fall (*geht zu einer Auf- und Ab-Bewegung des linken Arms über*) zwischen dreizehn und vitzehn Euro. (*die beiden Schüler schauen sich an*) (...) (*Ahmed dreht sich ruckartig nach hinten um, wo der Forscher mit Mia und Anna redet*)

119 KTI: (*verdreht die Augen, blättert ihre Mappe um und liest darin*) Oah- (16sec) (*auch Katie dreht sich nach hinten*) (4sec) (*Ahmed dreht sich wieder nach vorne, klopft von unten gegen den Tisch*) (4sec) (*Katie dreht sich wieder nach vorne, schaut an die Decke, danach schauen beiden Schüler jeweils auf ihre Unterlagen*) (26sec)

120 AMD: (*wendet sich wieder dem Aufgabenblatt zu, nachdem er zuvor auf die Lerntreppe zu Gleichungen geschaut hatte*) A-c-h- (..) ,aber wie kann ers denn herausfinden ,verdammt- (4sec) (*Katie setzt den Stift kurz an, nicht genau zu erkennen, ob sie auch etwas schreibt*) ,also- ,wenn- (*schaut gerade nach vorne, Katie bewegt die Gegenstände*

vor sich hin und her) (7sec) ‚HÄ- (*Katie kritzelt über ihr Geschriebenes auf dem Aufgabenblatt, Ahmed schaut auf sein Aufgabenblatt*) (8sec) ‚also drei CDs ja. (*Katie schreibt etwas am rechten Rand ihres Aufgabenblattes*) ‚ja die Kopfhörer un so die kann man ja außen vor lassen eigntlich. (.) ‚oder' (*Katie schreibt in der Mitte des Aufgabenblattes weiter*) ‚oder- (*Katie hört auf zu schreiben, schaut in der Klasse umher, Ahmed schaut vornübergebeugt auf das Aufgabenblatt*) (14sec)

121 KTI: (*dreht sich wieder nach vorne*) Öh (unverständlich) uns. (*wirft den Stift auf den Tisch, Ahmed schaut weiterhin auf das Aufgabenblatt*) (..) ‚ich check das nich mehr-

122 AMD: (*richtet sich wieder auf*) Oder sind achtnzwanzich plus acht- (.)

123 KTI: (*mit hoher Stimme*) Was für achtnzwanzich' (..)

124 AMD: (*winkt mit der linken Hand ab*) Nee okay ‚nee is egal- ‚ä-h-m- (*bewegt den Kopf schnell hin und her, nimmt den Stift in die Hand, hebt den linken Zeigefinger*) (5sec)

125 KTI: Mal drei oder was (*Ahmed schnippst und wedelt mit dem linken Zeigefinger*) oder geteilt durch drei- (*hält sich den Stift an den Kopf*)

126 AMD: (*wirft den Stift auf den Tisch, wedelt weiter mit dem Zeigefinger*) Ich hab ne I-dee- (*beide Schüler nehmen ihren Taschenrechner, Katie tippt etwas darauf, Ahmed drückt nur eine Taste und schaut dann wieder auf das Aufgabenblatt*) (...) (*leiser, Katie arbeitet weiterhin mit dem Taschenrechner*) ‚wie kam ich nochmal auf dreizehn' (..) (*murmelt unverständlich vor sich hin*) ‚voll unnötich ‚aber- ‚dreizehn komma null drei ja das kann ich mal versuchen. (*beginnt, etwas in den Taschenrechner einzugeben, Katie tippt weiterhin etwas in den Taschenrechner, hört dann auf, hält sich die Hand an den Kopf*) (11sec)

127 KTI: (*lässt die Hand auf den Tisch fallen, macht wahrscheinlich den Taschenrechner aus*) Ach- ‚keine Ahnung- (*schaut an die Decke, wischt sich durch das Gesicht*) (6sec) (*Ahmed legt den Taschenrechner auf den Tisch, schreibt etwas auf seinem Block, schaut dabei ab und zu auf den Taschenrechner*) (5sec)

128 AMD: E-ins- (*schreibt weiterhin*) (11sec) (*nimmt den Taschenrechner wieder in die Hand und beginnt etwas einzugeben, Katie sitzt untätig herum*) ‚so. (12sec) ‚mal zwei' (..) plus' (.) sechs' komma- (*immer leiser*) fünf- eins- fünf- sechs- drei fünf- (.) (*lehnt sich zurück, wieder lauter*) ‚schade. (..) (*gestikuliert mit der linken Hand*) ‚also was ich sagen kann- ‚es sind auf jeden Fall mehr als- (*fasst sich an den Hinterkopf*) ‚das kann doch gar nich sein Mann wie dum-m (*haut sich gegen die Stirn*) bin ich eigntlich. (*fasst sich an die Brust*) (..) (*bewegt die linke Hand auf die Tischfläche*) ma ehj okay. (*gibt wieder etwas in den Taschenrechner ein, Katie schaut ihm zu*) (..) ‚komma fünf- (*schaut auf Katies Tisch*) (..) ‚weißte was probier auch mal aus okay'

129 KTI: Was is- (*verschiebt ihren Taschenrechner ein bisschen, Ahmed nimmt den Taschenrechner weg, daraufhin verdeckt Katie das Geschriebene, das zuvor vom Taschenrechner verdeckt wurde*) (4sec)

130 AMD: (*drückt mit dem Taschenrechner gegen Katies Hand*) Jetzt nimm mal kurz die Hand weg ich will mal wissen was du da (unverständlich)

131 KTI: (*teilweise gleichzeitig*) DAS SELBE-

132 AMD: (*legt den Taschenrechner wieder auf das Blatt*) Ah is mir auch egal eigntlich

> 133 KTI: (*zieht den Taschenrechner zur Seite*) Ich hab geschrieben-
> 134 AMD: (*teilweise gleichzeitig*) JA is okay- (*fasst sich an den Kopf*) ,is mir-
> 135 KTI: Vitzehn neunzich plus fümundreißich Cent minus (*gestikuliert mit der linken Hand, während sie spricht*) fünfzehn oder so Scheiße hab ich mir das- Ergebnis aufgeschrieben.

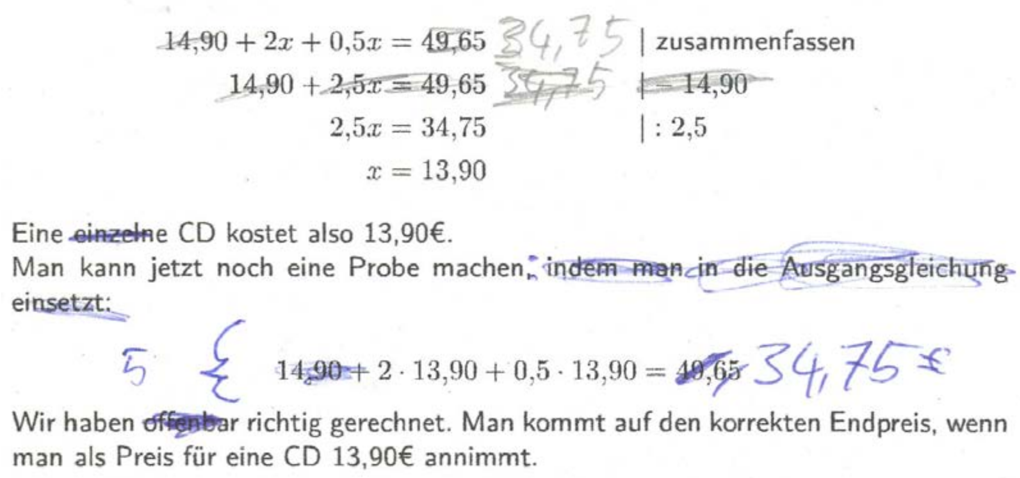
Als Vorgehen nennt Katie zunächst lediglich „nachdenken nachdenken“ (111). Was genau sie selbst und Ahmed tatsächlich tun, bleibt aber zunächst unklar. Beide schauen in der Klasse umher, Katie formt lediglich einen Halbsatz, der das Wort „Kopfhörer“ enthält (111). Dieses Verhalten setzt sich fort, wobei bei Ahmed durchaus mehr inhaltliche Elemente zu erkennen sind (112-117). Seine Aussagen „‚muss man das irgenwie aufteiln’“ (112) und „Minus die dritte Zahl aba die dritte Zahl is- halb so klein- wie andern beiden.“ (114) lässt folgende Interpretation zu: Ahmed ist sich im Klaren darüber, dass er den Gesamtbetrag, der für die CDs bezahlt wird, „aufteilen“ muss. Es fehlt ihm aber die Möglichkeit, durch eine nichtganze Zahl zu teilen, weil er die Division implizit als zeitlich-sukzessives Verteilen (Padberg und Benz, 2011, S. 154 ff.), explizit aber als eine mehrfach ausgeführte Subtraktion (Padberg und Benz, 2011, 156 f.) interpretiert, wie aus seiner zweiten Aussage deutlich wird (114). Als Schrittweite dabei hat Ahmed aber eben nicht den Divisor 2,5 im Sinn, sondern das unbekannte Resultat des Verteilens.

Nachdem Ahmed Gleichungen erwähnt und beginnt, in den entsprechenden Unterlagen zu blättern (116), beginnt er, verschiedene Werte (erst 8, dann 13) als Preis einer CD anzunehmen und kommt schnell zu der Aussage, dass eine CD „auf jeden Fall (*geht zu einer Auf- und Ab-Bewegung des linken Arms über*) zwischen dreizehn und vitzehn Euro“ kostet (118). Katie geht darauf nicht inhaltlich ein und es folgt eine Phase der Untätigkeit (119-120). Katie bleibt auch in der Folge weitgehend inaktiv. Ahmed kehrt nochmals zum Aufgabentext zurück (120), überprüft dann, ob nicht doch ein Preis von 14€ pro CD die korrekte Lösung ist (122-124) und kündigt dann an, er habe eine Idee, nämlich von 13,03 auszugehen (126). Die Rechnungen, die er macht, sind nicht ganz nachzuvollziehen, in jedem Fall sagt er letztlich, dass auch dieser Wert zu gering sei (128).

Nach einer kurzen Ablenkung (129-135) rekapituliert Ahmed erneut die Situation (136) und erklärt dann die Herausforderung folgendermaßen: „‚wir müssen ja- ausrechnen wieviel- eine CD kostet ne’ (*schaut Katie an, Katie nickt*) (.) ‚dann müssten wir ja- also- eine Zahl herausfinden- die man- (*hebt die linke Hand und lässt sie dann schnell sinken*) mal zwei rechnet- und dann- (.) ‚m-a-l die (*bewegt die rechte Hand nach vorne, streckt alle Finger aus, schaut Katie an*) Hälfte- (.) (*bewegt die Hand rhythmisch auf und ab*) ‚also plus die Hälfte mein ich.“ (138) Nach diesem vielversprechenden Ansatz kehrt er zurück zum Probieren (138-140).

Leider bricht das Video aufgrund technischer Probleme kurze Zeit später ab. Es lässt sich aber aus den Aufzeichnungen von Katie und Ahmed rekonstruieren, dass sie erst anhand der Musterlösung verstehen, wie sich das gestellte Problem lösen lässt. Ahmed passt auf seinem Exemplar die Rechnung so an, dass sie seinem Vorgehen entspricht, bei dem zuerst der Preis für die CDs berechnet wird (siehe Abbildung 5.37 auf Seite 173).

Katie und Ahmed gelingt in der Folge die Bearbeitung einiger Anwendungsaufgaben, wobei Katie vor allem beim Aufstellen der Gleichungen wenig eigenständig arbeitet. So ist es wohl Ahmed zuzuschreiben, dass die Variable meistens korrekt bezeichnet wird, etwa als „länge des kürzeren Stück“ (bei Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt „Sachaufgaben mit Gleichungen lösen“) oder als „Monatsrate“ (bei Aufgabe 2 auf dem gleichen Übungsblatt) – im Gegensatz zu Herbert, der bei der erstgenannten Aufgabe ungenauer „x = Länge der Teile“, im zweiten Fall gar „x = Euro“ geschrieben hatte (siehe Abbildung 5.38).



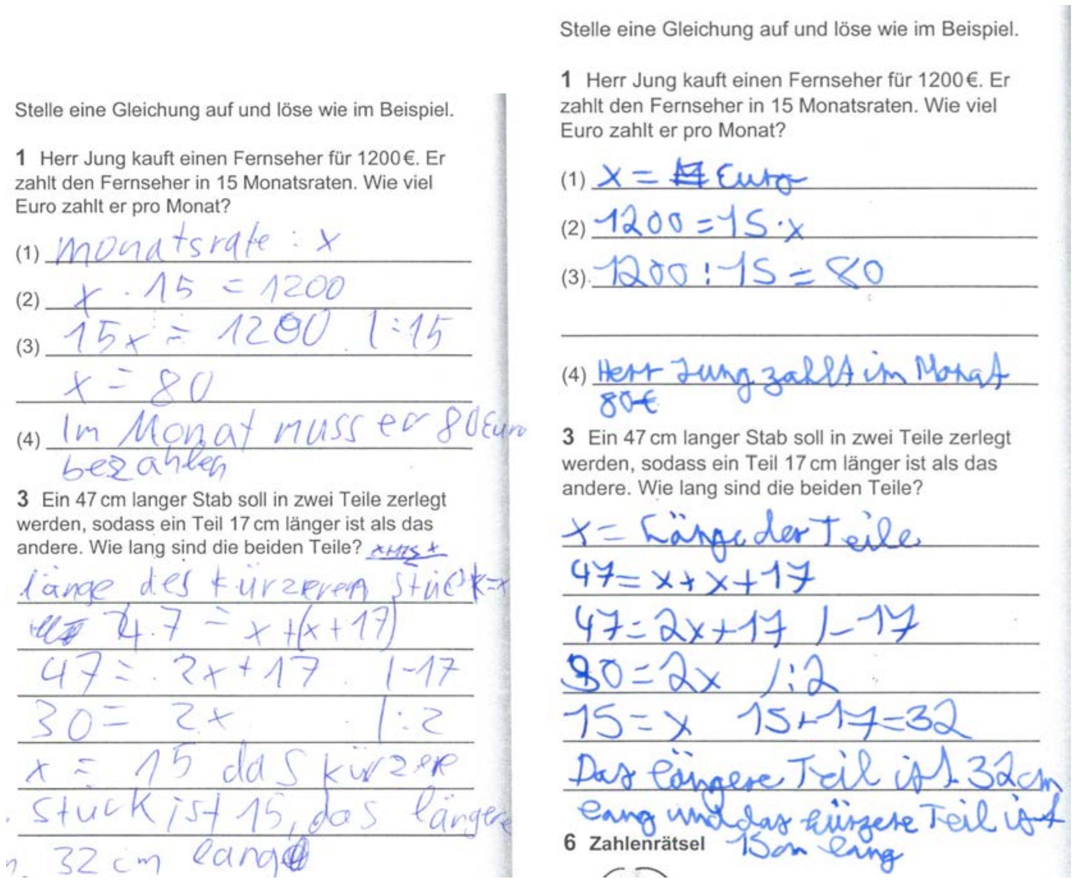
$$14{,}90 + 2x + 0{,}5x = \cancel{49{,}65}\ 34{,}75 \quad | \text{ zusammenfassen}$$
$$\cancel{14{,}90 + 2{,}5x = 49{,}65}\ 34{,}75 \quad \cancel{| -14{,}90}$$
$$2{,}5x = 34{,}75 \quad | : 2{,}5$$
$$x = 13{,}90$$

Eine ~~einzelne~~ CD kostet also 13,90€.
Man kann jetzt noch eine Probe machen~~, indem man in die Ausgangsgleichung einsetzt:~~

5 $\{$ $\cancel{14{,}90 +}\ 2 \cdot 13{,}90 + 0{,}5 \cdot 13{,}90 = \cancel{49{,}65}\ 34{,}75$ €

Wir haben ~~offenbar~~ richtig gerechnet. Man kommt auf den korrekten Endpreis, wenn man als Preis für eine CD 13,90€ annimmt.

Abbildung 5.37.: Ahmeds Variation der Musterlösung zur Aufgabe „Vergesslich im Elektromarkt“



Stelle eine Gleichung auf und löse wie im Beispiel.

1 Herr Jung kauft einen Fernseher für 1200 €. Er zahlt den Fernseher in 15 Monatsraten. Wie viel Euro zahlt er pro Monat?

(1) Monatsrate : x
(2) x · 15 = 1200
(3) 15x = 1200 |:15
x = 80
(4) Im Monat muss er 80 Euro bezahlen

3 Ein 47 cm langer Stab soll in zwei Teile zerlegt werden, sodass ein Teil 17 cm länger ist als das andere. Wie lang sind die beiden Teile?

Länge des kürzeren Stück = x
47 = x + (x + 17)
47 = 2x + 17 |−17
30 = 2x |:2
x = 15 das kürzere Stuck ist 15, das längere 32 cm lang

Stelle eine Gleichung auf und löse wie im Beispiel.

1 Herr Jung kauft einen Fernseher für 1200 €. Er zahlt den Fernseher in 15 Monatsraten. Wie viel Euro zahlt er pro Monat?

(1) x = ~~14~~ Euro
(2) 1200 = 15 · x
(3) 1200 : 15 = 80
(4) Herr Jung zahlt im Monat 80€

3 Ein 47 cm langer Stab soll in zwei Teile zerlegt werden, sodass ein Teil 17 cm länger ist als das andere. Wie lang sind die beiden Teile?

x = Länge der Teile
47 = x + x + 17
47 = 2x + 17 |−17
30 = 2x |:2
15 = x 15 + 17 = 32
Das längere Teil ist 32 cm lang und das kürzere Teil ist 15 cm lang

6 Zahlenrätsel

Abbildung 5.38.: Ahmeds (links) und Herberts (rechts) Bearbeitung der Aufgaben 1 und 3 auf dem Übungsblatt „Sachaufgaben mit Gleichungen lösen“

6. Aspekte der Ausbildung algebraischen Struktursinns

Aus der reflektierenden Interpretation der als relevant identifizierten Episoden lassen sich in der Gesamtschau Beschreibungen von Aspekten der Ausbildung algebraischen Struktursinns erarbeiten, die in ihrem Geltungsanspruch über die individuellen Entwicklungen hinausgehen, die im vorherigen Kapitel besprochen wurden. Diese Beschreibungen werden im Folgenden illustriert an den Daten, aus denen sie entwickelt wurden, also denen der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen. Daneben treten aber jeweils auch Beispielepisoden aus der zweiten Unterrichtseinheit, anhand derer gezeigt wird, inwiefern die gemachten Aussagen auch in Bezug auf die Ausbildung algebraischen Struktursinns zu linearen Funktionen gelten. So kann die Relevanz der gemachten Beschreibungen über den Entstehungskontext hinaus nachgewiesen werden; ähnlich könnten in Zukunft auch andere (Forscherinnen und Forscher, Lehrerinnen und Lehrer) die beschriebenen Aspekte der Ausbildung algebraischen Struktursinns in erhobenen Daten sowie in der erlebten Unterrichtswirklichkeit wiederfinden und verstehen.

6.1. Ausbildung algebraischen Struktursinns als Hineinwachsen in eine Tätigkeit

Als eine Grundannahme der Theory of Objectification wurde in Abschnitt 2.2.1 dargestellt, dass Lernen darin besteht, in gesellschaftlich-historisch entwickelte Tätigkeiten hineinzuwachsen, von einer anfänglichen Fremdheit zu Vertrautheit zu gelangen. In Bezug auf algebraische Strukturen geht es darum, sie in einer bestimmten Weise sehen zu lernen, und zu lernen, wie man mit ihnen handeln kann. Was dies konkret bedeutet, soll im Folgenden deutlicher werden.

6.1.1. Die Struktur der Tätigkeit erkunden

Prolog: Worüber reden wir eigentlich?

In der Planung der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen wurde angenommen, dass das kulturelle Wissen um die Tätigkeit des Umgangs mit Gleichungen den Schülerinnen und Schülern in der Beschäftigung mit den Streichholzschachtelgleichungen gegenübertreten soll, gemeinsam mit den gegenständlichen Streichholzschachtelgleichungen selbst. In der Analyse der Daten wurde jedoch deutlich, dass dabei nicht bedacht worden war, wie stark Gegenstand und Motiv *bidirektional* zusammenhängen: Solange nicht klar ist, auf was für eine Tätigkeit wir hinauswollen, sehen wir den Gegenstand nicht in der Weise wie eine Person, die mit dieser Tätigkeit vertraut ist.

In der bereits als Beispiel-Analyse besprochenen Episode aus der ersten Unterrichtsstunde der Einheit zu linearen Gleichungen (vgl. Abschnitt 4.4.3), in der Sabine und Herbert lange Zeit nicht wissen, wie sie mit der vor ihnen liegenden Streichholzschachtelgleichung umgehen können, deuten die Probleme der Lehrerin, den Schülerinnen und Schülern einen Einstieg in die Tätigkeit zu ermöglichen, genau auf diese Problematik hin: Um mit einer algebraischen Struktur arbeiten zu können, müssen die richtigen Teile des Ausdrucks als Objekte in den Blick genommen werden, hier die beiden Seiten der Gleichung. Für die Lehrerin sind sie bereits Objekte einer Tätigkeit, für Sabine und Herbert nicht. Und solange nicht deutlich ist, auf welche Objekte sich bezogen wird, bleiben alle darauf aufbauenden Beschreibungen nutzlos. Dies gilt im gegebenen Beispiel insbesondere für das Konzept der Äquivalenz, die ein zentrales Merkmal (nicht nur) linearer Gleichungen ist. Die Formulierung „gleich bleiben“, die von der Lehrerin ausdrücklich als „ganz wichtig“ markiert wird, und die auch in ihren weiteren Hinweisen eine zentrale Position einnimmt (60, 62, 72, 81), wird von Sabine und Herbert nicht aufgegriffen, eben weil für sie nicht deutlich wird, *was* eigentlich gleich bleiben soll. Die Lehrerin hält sich sowohl mit verbalen als auch mit nichtverbalen Hinweisen sehr zurück. Insbesondere macht sie keine Gesten, wo eigentlich welche nötig wären (etwa zur Verdeutlichung von Pronomina).

Das Verhalten der Lehrerin lässt sich darauf zurückführen, dass die Designprinzipien (vgl. Abschnitt 4.2 ab Seite 71) gerade in der Einführungsphase die eigenständige Tätigkeit in den Mittelpunkt stellten und von der Lehrkraft vor allem Geduld erwarteten. Doch wie können sich die Schülerinnen und Schüler einem Verständnis des Gegenstands und der Tätigkeit annähern, wenn beides zunächst unbekannt ist?

In den Analysen wurde deutlich, dass diese Konfrontation mit Neuem zu einem Verhalten führte, dass sich stark vereinfacht folgendermaßen zusammenfassen lässt:

1. Die Schülerinnen und Schüler orientieren sich in der gegebenen Situation.

2. Die Schülerinnen und Schüler klären (unter Mitwirkung der Lehrkraft) die Zielsetzung und kommen so insgesamt zu einem Tätigkeitsmotiv.

3. Die Schülerinnen und Schüler erproben die Tätigkeit, die sich aus der Situation und dem Motiv ergibt und werden darin zunehmend sicher.

Im Folgenden wird herausgearbeitet, wie diese Schritte im Einzelnen ablaufen. Am Ende dieses Unterabschnitts wird insbesondere auf die Rolle sprachlicher Explizitheit dabei eingegangen. Schließlich wird, nachdem sich bis dahin sämtliche Beschreibungen auf die Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen stützen, auf die Unterschiede eingegangen, die sich in der Unterrichtseinheit zu linearen Zuordnungen identifizieren lassen.

Orientierung in der Situation

Eine erste Erkenntnis aus den Annäherungsversuchen der beobachteten Schülerinnen und Schüler an die Streichholzschachtelgleichungen besteht darin, dass neben der intendierten viele weitere Sichtweisen auf die vorliegende Situation möglich ist. Anders als vermutet sind die in dieses Rätsel gelegte Logik und das sich ergebende Motiv nicht unmittelbar verständlich. Obwohl beispielsweise Sabine und Herbert erkannten, dass weniger offen sichtbare Streichhölzer auf einer Seite des Gleichheitszeichens durch die höhere Anzahl von Schachteln (mit enthaltenen Streichhölzern) ausgeglichen werden, blieben ihnen andere Aspekte zunächst unklar.

Die erste Hilfe, die die Lehrerin und der Forscher in der bereits besprochenen Episode 111205_2_LG1_40-41 (siehe Seite 101) leisten, besteht darin, die Anzahlen der Streichhölzer und der Schachteln zu überprüfen (17-23). In den anfangs auf den Tischen vorbereiteten Streichholzschachtelgleichungen waren die Schülerinnen und Schüler verleitet, Teile der Konfiguration als unwichtig zu betrachten. Nun wird deutlich gemacht, dass die Anzahlen der Streichhölzer und der Schachteln, separat auf jeder der beiden Seiten des Gleichheitszeichens gezählt, relevant sind. In 111205_2_LG1_43 (siehe Seite 118), als Sabine bereits beschreiben kann, wie man vorgehen muss, macht sie von sich aus die Ausgangslage deutlich und lenkt ausgehend davon unter Verwendung von Zeigegesten die Aufmerksamkeit der Lehrerin (137, 139, analog im zweiten Durchgang, 146). Herbert greift dieses Verhalten auf, wenn er die Trennung der Streichhölzer mit seinen Händen, also materiell vollzieht, während er spricht (140). Dies nimmt wiederum Sabine auf und lenkt die Aufmerksamkeit auf die Streichhölzer, deren Anzahl (15) sie durch 3 teilt (143). Die beiden lernen hier also, die Konfiguration der Streichholzschachtelgleichung in einer bestimmten Art wahrzunehmen und diese Art der Wahrnehmung miteinander zu kommunizieren: Es wird zwischen den beiden Seiten der Gleichung unterschieden, Streichhölzer und Schachteln werden jeweils getrennt gruppiert, um sie den entsprechenden Objekten auf der anderen Seite gegenüberzustellen, was dazu führt, dass bestimmte Objekte ignoriert werden und auf andere fokussiert wird.

Die gleiche Entwicklung lässt sich auch bei Ahmed und Katie erkennen. Durch die anfänglichen ideosynkratischen Versuche Ahmeds liegt in der im Folgenden dokumentierten Episode zunächst nicht mehr die Ausgangssituation vor. Erst der Forscher stellt die Streichholzschachtelgleichung wieder her, die Katie und Ahmed eigentlich lösen sollten (siehe Abbildung 5.20 auf Seite 148).

Episode 6.1: 111205_3_LG1_44-59_1: Klärung der Ausgangssituation

52 AMD: Oah ich check die Lage nich (*nimmt einige der Streichhölzer auf der linken Seite und schiebt sie umher*) ‚wieviel warn wo-

53 F: (*Sabine stellt sich vor den Tisch, so dass Ahmed nur noch teilweise sichtbar ist, der Forscher tritt von der Seite an den Tisch heran*) Soll ich nochmal- ‚soll ich euch nochmal wies am Anfang war’

54 SBN: Ja bitte’

55 KTI: Ey’

56 AMD: Ja-

57 F: Ähm-

58 KTI: (unverständlich)

> 59 F: (*Ahmed und Katie schauen zum Forscher auf*) Ihr habt sechs Schachteln insgesamt dann habt ihr das ‚okay. ‚dann habt ihr (*zeigt auf die rechte Seite*) da zwei Schachteln auf der ein und (*Sabine verdeckt jetzt die rechte Seite und damit auch den Forscher komplett*) vier auf der andern'
> 60 KTI: (*Ahmed legt eine Schachtel von der linken auf die rechte Seite, sodass dort jetzt vier Schachteln liegen und auf der linken Seite zwei*) Ja-
> 61 F: Genau und da wo vier sind sind fünf Streichhölzer-
> 62 KTI: (*Ahmed geht mit dem Zeigefinger die Streichhölzer auf der rechten Seite entlang*) Mm-
> 63 AMD: Dann nimm wir zwei weg- (*nimmt zwei Streichhölzer von der rechten Seite und legt sie auf die linke Seite, rechts liegen jetzt fünf Streichhölzer und links neun*) ‚und so.
> 64 KTI: Da warn doch-
> 65 SBN: Ja okay.
> 66 F: Genau und auf der andern Seite müssten
> 67 AMD: (*gleichzeitig*) Neun.
> 68 F: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Dann neun sein.
> 69 SBN: Ja okay. (*hockt sich vor dem Tisch hin, Ahmed und der größte Teil des Tisches wird wieder sichtbar*)
> 70 F: (*gleichzeitig*) Genau.

Ahmed nimmt die Ausgangssituation als wichtig an, indem er von sich aus die Frage stellt, wie viel am Anfang auf jeder Seite war (52). Dabei wird nicht explizit gemacht, ob es um die *Gesamtzahl der Objekte* geht (was für ihn ja zuvor relevant war, siehe Episode 111205_3_LG1_20 auf Seite 149) oder ob die *Anzahlen für Streichhölzer und Schachteln getrennt angegeben* werden sollten. Der Forscher antwortet allerdings von Anfang an (59) im Sinne der zweiten Interpretation, nennt also die Anzahlen von Streichhölzern und Schachteln separat, und Ahmed setzt seine Anforderungen ohne Widerspruch um (60), engagiert sich sogar insofern, als dass er die Anforderungen in eigene Handlungsanweisungen übersetzt („Dann nimm wir zwei weg- (*nimmt zwei Streichhölzer von der rechten Seite und legt sie auf die linke Seite, rechts liegen jetzt fünf Streichhölzer und links neun*) ‚und so.", 63). Ahmed antizipiert, dass die Anzahl der Streichhölzer auf der linken Seite kontrolliert werden muss und nennt die korrekte Anzahl (67). Dies ist ein deutlicher Kontrast zu seinem vorherigem Verhalten, in dem er die Rolle der exakten Anzahlen geringgeschätzt hatte und Sabines Hinweis auf die Korrektheit ihrer Ausgangssituation übergangen hatte (vgl. Episode 111205_5_LG1_x, siehe Anhang Seite 388).

Im weiteren Verlauf (Episode 111205_3_LG1_44-59_2, siehe Seite 152) muss außerdem geklärt werden, dass in jeder Schachtel gleich viele Streichhölzer enthalten sein sollen – Katie und Ahmed ist dies zunächst nicht klar. Bei Katie ist dies daran zu erkennen, dass sie nach dem Öffnen einer ersten Streichholzschachtel sagt: „‚hier sind zwei drinne-" (50). Daraufhin öffnet sie alle Schachteln, bevor sie Sabine und Ahmed die Anzahl mitteilt (67). Bei Ahmed wird die gleiche Grundannahme deutlich, als er schließlich mit Katies Hilfe die Lösung gefunden hat: „Dann sind hier also überall zwei Stück drinne." (63) Erst jetzt wird ihm klar, dass dies eine entscheidende Eigenschaft der Lösung der Streichholzschachtelgleichung ist: Sie gibt den Inhalt *jeder Einzelnen* der Schachteln an.

Über Ziele: Was wollen wir erreichen?

Ausgehend von der vorliegenden Situation können die Schülerinnen und Schüler eine Vision davon entwickeln, wo ihre Tätigkeit sie hinführt. Wie wichtig es ist, dass dazu erst einmal die Situation korrekt erfasst werden muss, zeigt Ahmeds erster Ansatz, der bereits weiter oben dargestellt wurde (siehe Episode 111205_3_LG1_7, Seite 148): Hier hatte er behauptet, man müsse lediglich die Anzahlen der Streichhölzer und Schachteln auf den beiden Seiten der Gleichung ermitteln, und zwar zuerst „auf der Seite wo mehr sind." (3) Ahmed bezieht sich also auf die vorliegende Situation und hebt bestimmte strukturelle Merkmale hervor: die Seiten der Streichholzschachtelgleichung mit den jeweils vorliegenden Anzahlen an Streichhölzern und Schachteln und die daraus resultierende Reihenfolge, in der man sie zählen müsse. Schülerinnen und Schüler können also durchaus eigensinnige Interpretationen der Situation entwickeln, die nicht zu der Tätigkeit führen, der sich eigentlich angenähert werden soll.

Ahmeds Sicht bleibt aber auch für Katie undurchsichtig, weil er eigene Annahmen macht, ohne sie zu begründen. Die oben beschriebene Rekapitulation der Situation ist also auch als eine Ausgangsbasis für ein gemeinsames Vorgehen zu verstehen. Die bestehende epistemologische Lücke – dass nämlich sein unbegründetes Verfahren noch keinerlei Aussage darüber macht, wie viele Streichhölzer in den Schachteln sind – wird von Ahmed durch das Wort „halt" verniedlicht (7) und letztlich ignoriert, indem er über Katies skeptischere Reaktion hinweggeht (8-9). Das Muster wiederholt sich, als Ahmed zunächst behauptet, dass man auf die eine Seite des Gleichheitszeichens alle Streichhölzer und auf die andere Seite alle Schachteln legen solle (siehe Episode 111205_3_LG1_20 auf Seite 149 und Episode 111205_3_LG1_21-23 auf Seite 150), und nochmals bei der Idee, dass man sowohl Streichhölzer als auch Schachteln gleichmäßig auf beide Seiten aufteilen solle (siehe Episode 111205_3_LG1_36 auf Seite 385). Ahmed geht *„irgendwie" strukturiert* vor. Gegenüber Sabine und Herbert, die ihn mit der Tatsache konfrontieren, dass die mit seinem zweiten Verfahren ermittelten Aussagen über die Anzahl der Streichhölzer in jeder Schachtel nicht der (von den beiden bereits durch Hineinschauen ermittelten) korrekten Lösung entspricht (siehe Episode 111205_5_LG1_x im Anhang, Seite 388, Zeile 41 und 42), antwortet er: „Ja aber da ‚darum (*hält die linke Hand mit der Handfläche nach oben vor sich*) gehts ja auch glaub ich gar nich. (*macht einen Schritt rückwärts*)" (44) Offenbar ist ihm die Aufgabenstellung nicht klar geworden, nach der es eben genau darum geht.

Seine verschiedenen Ansätze betrachtet Ahmed schließlich trotz ihrer Widersprüchlichkeit als gleichrangig, auch mit dem letztlich von Sabine erklärten Verfahren, wie wir in Episode 111205_3_LG1_44-59_3 (siehe Seite 386) sehen können. Dort macht er deutlich, dass ihm Sabines Lösung nur als eine von vielen Möglichkeiten erscheint: „dann gibts doch jetzt noch voll viele andere Möglichkeiten-" (85), und später: „„es gibt ja tausende Möglichkeiten-" (...) „„und ich hab jetzt schon zwei verschiedene Möglichkeiten aufgeschriebn-" (105-107).

Eine ähnliche Orientierungslosigkeit bezüglich des zugrunde liegenden Tätigkeitsmotivs lässt sich bei Herbert feststellen, als er erstmals mit einer Gleichung konfrontiert ist, die eine negative Lösung hat (Aufgabe C von Aufgabenblatt 2, siehe Abbildung 6.1):

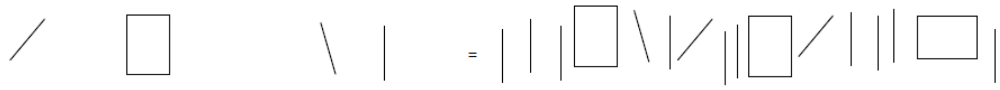


Abbildung 6.1.: Aufgabe C von Aufgabenblatt 2

Episode 6.2: 111209_2_LG3_28: Orientierungslosigkeit bei Herbert

47 HBT: (*legt die Strategiekarten an den Rand des Tisches, sodass das Aufgabenblatt wieder offen liegt, schaut auf das Aufgabenblatt*) (.) JO- (.)
48 AMD: (*sitzt auf seinem Platz, im Hintergrund zur Hälfte sichtbar, schaut nach links*) PAUL- (*Herbert schaut zu Ahmed*)
49 PL: (*sitzt auf seinem Platz links von Herbert, außerhalb des Bildbereichs*) Ja.
50 AMD: BIST (*Herbert dreht sich zu Paul*) DU BEI C' (.) (*Herbert dreht sich wieder zu Ahmed*)
51 PL: Nein bin noch bei B.
52 AMD: (*hält sich die Hand an die Stirn*) Bei C is voll verkackt is schon jemand bei C'
53 HBT: (*schaut zu Ahmed*) Nein ,wieso-
54 PL: (*teilweise gleichzeitig*) Warte ich bin gleich da- ,ich muss nur kurz was rechnen-
55 AMD: (*teilweise gleichzeitig, lässt die Hand auf halbe Höhe sinken*) Hä- (*schaut auf seine Unterlagen*)
56 HBT: (*schaut weiterhin zu Ahmed*) Wieso das denn- (*schaut auf sein Aufgabenblatt*)
57 AMD: (*schaut suchend in die Klasse*) C-
58 MRI: (*sitzt an ihrem Platz, hinter Herbert im Bildbereich*) Warte. ,ich komm da gleich hin.
59 AMD: (*schaut wieder auf seine Unterlagen, die Lehrerin nähert sich und stellt sich links hinter Ahmed, streicht sich eine Strähne aus dem Gesicht*) C bleiben aufeiner Seite gar nix mehr über-
60 PL: Hä-
61 HBT: (*schaut weiterhin auf sein Aufgabenblatt*) Hä j-o- (*schaut zu Ahmed, Ahmed schaut zunächst zu Herbert, dann zur Lehrerin auf*) ,dann- is wahrscheinlich die rechte Seite das Ergebnis.
62 AMD: (*schaut auf seine Unterlagen, zwischendurch kurz zu Herbert*) Ja null geteilt durch (unverständlich) (*die Lehrerin geht von Ahmed in Herberts Richtung*)
63 HBT: (*teilweise gleichzeitig*) Ja dann ,das aber-
64 L: (*geht rechts an Herbert vorbei aus dem Bildbereich heraus, schaut Herbert dabei an*) So , (unverständlich) mal ganz kurz ruhig einmal. (*Herbert nimmt seinen Stift und wendet sich seinen Unterlagen zu*)

Herbert behauptet, dass „wahrscheinlich“ die rechte Seite das Ergebnis sei, wenn bei den üblichen Umformungen auf der anderen Seite nichts mehr übrig bliebe (61). Es könnte sich hier um eine Übergeneralisierung in dem Sinne handeln, dass man ja immer möglichst weit reduziert und nun keinen weiteren Schritt unternehmen kann. Auch Ahmeds Äußerung

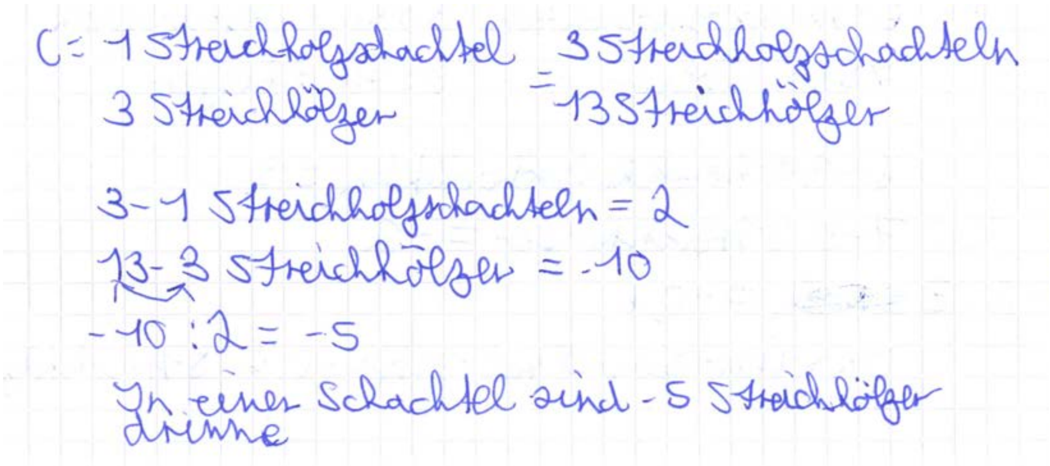


Abbildung 6.2.: Herberts Bearbeitung von Aufgabe C von Aufgabenblatt 2

(62) lässt sich entsprechend interpretieren: Er sucht nach einer Möglichkeit, den nächsten Schritt – die Division – durchzuführen. Dabei wird deutlich, dass unklar ist, zu welchem Zweck und mit welcher inneren Logik die Division eigentlich durchgeführt wird.

Zugrunde liegt hier die Annahme, das Ergebnis sei stets eine Zahl, die man am Ende erhält. Beim Lösen von Gleichungen geht es aber in einer subtilen Abweichung von dieser Norm darum, eine Aussageform zu erhalten, die der Variablen eine Zahl zuordnet, beziehungsweise an dieser Stelle der Unterrichtseinheit, welcher Zahlenwert jeder einzelnen Schachtel zuzuordnen ist. Man könnte hierbei von einem *strukturellen Ziel* sprechen: Es geht darum, etwas über eine Beziehung zu erfahren.

Die Ausrichtung auf andere, nicht-strukturelle Ziele kann auf die Strukturen bezogenes Lernen verhindern, wie folgende Episode zeigt. Hier bemüht sich der Forscher Herbert gegenüber, der mit Hilfe von Mitschülern mittlerweile die auch in der letzten Episode thematisierte Aufgabe gelöst hat (siehe Abbildung 6.2), genau die Aussageform herauszustellen.

Episode 6.3: 111209_2_LG3_42: Ein Versuch, die Aussageform zu betonen

77 HBT: Dann ham wir minus zehn’
78 F: Genau.
79 HBT: (.) (*atmet tief ein*) (.) Und dann durch zwei ham wir dann (*legt Daumen und Zeigefinger der rechten Hand kurz auf das Heft*) zwei mal (*zeigt mit dem Zeigefinger nacheinander auf die beiden Punkte, die er vorher markiert hat*) minus zehn- ‚ähm (*zeigt nochmals auf beide Punkte*) zwei mal minus fünf dann-
80 F: Genau ‚hier sind (*nimmt eine der beiden Streichholzschachteln zwischen zwei Finger und hält sie fest*) jetzt minus fünf Streichhölzer drin, (*macht eine drehende Handbewegung*) das geht natürlich ‚das gibts in echt nich-
81 HBT: Nee weil wir ja-
82 F: (*gleichzeitig*) Insofern- kannst du dir das so vorstelln dass (*legt ein Kärtchen auf*

den Tisch und schreibt darauf „–5“, Herbert beugt sich leicht nach vorne) hier- vielleicht dann auch Kärtchen drin liegen’ (*öffnet eine der beiden Schachteln, dabei fallen die enthaltenen Streichhölzer heraus*) ‚wo minus fünf draufsteht. (*legt das Kärtchen in die Schachtel*) ‚ja’ (*ist immer noch mit dem Kärtchen beschäftigt, schaut kurz zu Herbert*)
83 HBT: M-mh-
84 F: Du musst trotzdem- (*schiebt die Streichholzschachteln zu, legt die rechte Hand darauf*) ‚dann- (*hebt die Hand kurz an und lässt sie wieder auf die Streichholzschachtel sinken*) steht hier minus fünf- (*lässt die Hand auf die andere Schachteln fallen*) ‚minus fünf- (.) (*breitet die Hand ein bisschen aus und zeigt so auf beide Schachteln*) ‚sind zusamm minus zehn- (*zeigt auf das Kärtchen mit „–10“ auf der linken Seite*) ‚und auf der Seite sind auch minus zehn- (*bewegt die rechte Hand neben sich nach rechts*) ‚kommt hin.
85 HBT: Also wie soll ich das jetzt aufschreiben- (*der Forscher öffnet eine Streichholzschachtel und legt Streichhölzer hinein, Herbert legt seinen Taschenrechner zur Seite, hebt seinen Block kurz an, schiebt seine Mappe umher*) (..) ‚äh wo is jetzt mein ach da.

Die Ausführungen des Forschers sind für Herbert aufgrund seiner starken Fokussierung auf zahlenmäßige Ergebnisse und die richtige Notation uninteressant. Er kann eine negative Lösung genauso akzeptieren wie eine positive, wenn ihm dies von außen bestätigt wird. Insofern findet für ihn hier keine Erweiterung einer Struktur statt. Die unmittelbar anschließende Episode, in der Herbert versucht, Lucas das Vorgehen anhand der Streichholzschachteln und mit den vom Forscher bereitgestellten Papierschnippseln zu erklären, verdeutlicht diesen qualitativen Mangel:

Episode 6.4: Auszug aus 111209_2_LG3_44: Herbert erklärt Lucas das Vorgehen

86 LCS: (*steht links neben Herbert, gleichzeitig*) Herbert-
87 HBT: (*schaut zu Lucas auf*) Ja’
88 LCS: Man muss doch Streichhölzer- ähm geteilt durch Streichholzpackungn ne’ (.)
89 HBT: (*senkt den Blick, schaut dann auf seinen Block*) Äh mir is grad (*zieht seine linke Hand über seine Mappe, als würde er etwas wegstreichen*) einalso.
90 LCS: Oder muss durch Streich.
91 HBT: Wir hatt (*nimmt den Papierschnippsel, der zuvor auf seinem Block lag, und lässt ihn wieder auf den Block fallen*) ‚wir ham das jetzt so gemacht dass wir jetzt ä-h-m-
92 F: (*legt die Streichholzschachtel zu Seite*) Genau erklär (*zeigt auf Herbert*) ihm das mal- (*geht um das Lehrerpult herum zur Kamera*) und- ‚ich hör einfach nur zu. (*Herbert setzt sich aufrecht an den Tisch, nimmt erst eine der Schachteln, dann eine andere, Lucas setzt sich neben ihn*) (.) (*der Forscher steht jetzt hinter der Kamera und verstellt sie so, dass sowohl Herbert als auch Lucas zu sehen sind*) ‚und stell die Kamera noch n bisschen um.
93 HBT: (*teilweise gleichzeitig*) Also als erstes wie- (*zeigt mit der linken Hand auf eine Aufgabe relativ weit oben auf dem Aufgabenblatt*) normal- (*greift nach einer Schachtel am oberen Rand des Tisches, hält sie ebenso wie die andere in der Luft, schaut zwischen*

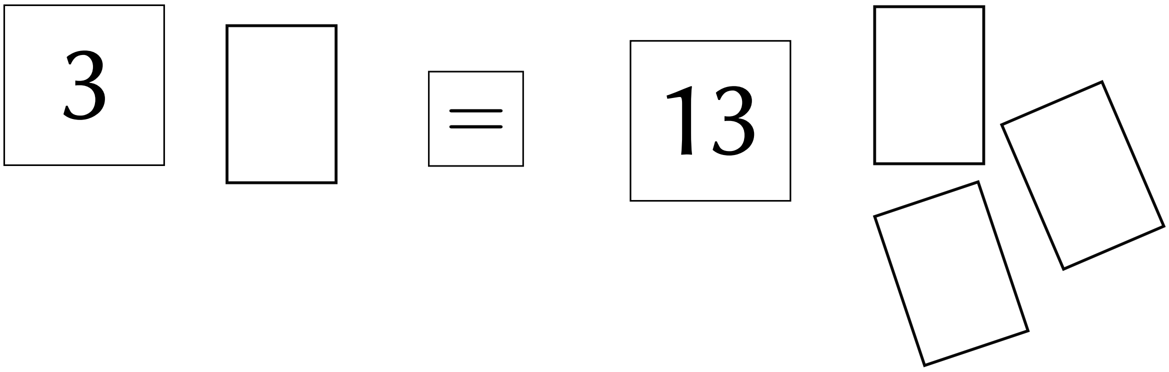


Abbildung 6.3.: Schematische Darstellung der Ausgangssituation, die Herbert zunächst auf dem Tisch herstellt (95)

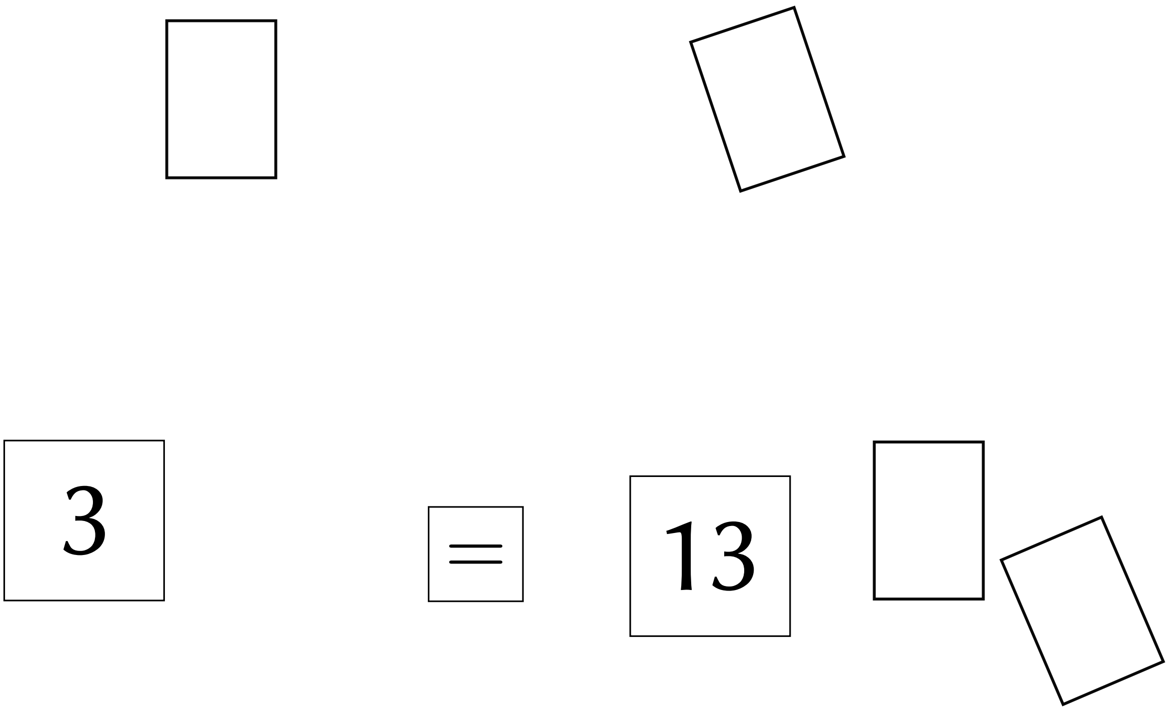


Abbildung 6.4.: Schematische Darstellung der Situation, die Herbert durch das Weglegen zweier Schachteln erzeugt (97) und auf die er sich im Folgenden bezieht

den Schachteln hin und her) ‚äh äh äh- (*Lucas lacht, Herbert legt die linke Schachtel links auf den Tisch, die rechte zu einer weiteren Schachtel auf die rechte Seite, greift dann nach etwas in der Nähe seiner Federmappe, nicht genauer erkennbar*) ‚eins- zwei drei- (*öffnet die Schachtel, in die der Forscher zuvor den Papierschnippsel gelegt hatte und zieht den Papierschnippsel heraus*) (.) ä-h- (*schaut auf den Papierschnippsel*) (.) (*legt den Papierschnippsel neben die beiden Schachteln auf der rechten Seite*) ‚wir ham dreizehn. ‚was vergiss das (*verdeckt mit seinen Fingern etwas am unteren Rand des Aufgabenblattes*) ‚vergiss das was hier- (*der Forscher legt einen Stift auf Herberts Tisch, Herbert nimmt ihn und streicht etwas durch in dem Bereich, den er zuvor verdeckt hatte*) ‚(unverständlich)

94 LCS: (*schaut auf die Stelle, an der Herbert etwas durchstreicht*) Was da is. vergessen.

95 HBT: Vergessen. (*schiebt eine dritte Schachtel zu den anderen beiden auf der rechten Seite, legt seine Hand kurz auf den Papierschnippsel, die hergestellte Situation ist in Abbildung 6.3 auf Seite 183 dargestellt*) ‚also ich soll hier was (unverständlich) also (*zeigt mit dem Stift auf eine Aufgabe auf dem Aufgabenblatt, wahrscheinlich Aufgabe C*) ‚wie bei C steht hier.

96 LCS: (*schaut auf das Aufgabenblatt*) Ja.

97 HBT: Als erstes nimmst du das Gleiche ersmal weg. (*legt die Schachtel auf der linken Seite und eine der Schachteln auf der rechten Seite etwas nach oben, die hergestellte Situation ist in Abbildung 6.4 auf Seite 183 dargestellt*)

98 LCS: Ja.

99 HBT: (*gleichzeitig, schaut kurz zu Lucas*) Wie normal auch.

100 LCS: (*nickt einmal*) Ja.

101 HBT: (*reibt sich die Nase*) Dann- machst dus aber so' (*bewegt die beiden verbleibenden Streichholzschachteln auf der rechten Seite etwas zur Seite*) ‚dass d-u ä-h-m- (*zeigt ruckhaft auf den Papierschnippsel auf der rechten Seite*) ‚das minus rechnest also auf (*zeigt auf die linke Seite, wo wahrscheinlich ebenfalls ein Papierschnippsel liegt*) das. ‚hä' (*geht mit dem Kopf etwas nach vorne*) nee. (*legt seine linke Hand neben den Papierschnippsel auf der linken Seite, Lucas schaut kurz in die Kamera, hält sich dann die Hand an die Stirn*) (..) (*schaut kurz nach rechts, dann wieder auf die linke Seite der Gleichung*) ‚h-ä wadde- ‚ä- (*geht mit dem Kopf etwas zurück*) (.) ‚dass du- (.) (*grinst, mit hoher Stimme*) ‚scheiße. (*Lucas lacht*) (..) (*Herbert schaut zum Forscher auf, der jetzt vor dem Tisch steht*) Hilfe- (*der Forscher lacht kurz auf, daraufhin auch Herbert, Lucas schaut ebenfalls zum Forscher*) (..) ‚äh also dass man jetzt (*schaut wieder auf den Tisch vor sich, zeigt auf den Papierschnippsel auf die rechte Seite der Gleichung*) das hier- (*zeigt auf den Papierschnippsel auf der linken Seite*) ‚das minus das rechnet oder was. (*schaut zum Forscher auf*)

102 F: J-a. ‚und zwar wieso. (.)

103 HBT: W-e-i-l sonst weil wenn du m jetzt äh (*zeigt mit der rechten Hand erst auf die rechte, dann auf die linke Seite*) ‚das minus das rechnest dag hast du- (*deutet unbestimmt auf die rechte Seite der Gleichung*) hier zehn aber (*bewegt die Handfläche über die rechte Seite der Gleichung*) da is nix mehr. (*schaut Lucas an, wiederholt dann die Geste*) ‚also auf dieser Seite gar nix mehr (*bewegt die beiden Hände mit den Handflächen*

zueinander gegeneinander auf und ab) ,also dhast keine Gleichung. (*hält kurz inne, wiederholt die Geste dann mit den Handflächen nach oben*) ,also da ist nix gleich.
104 LCS: (*nickt einmal*) Ja.
105 HBT: Also wenn du (*zeigt erst auf den Papierschnippsel auf der rechten, dann auf den auf der linken Seite*) das hier minus das nimmst-
106 LCS: Da hast du zehn.
107 HBT: (*schaut Lucas an, zeigt weiterhin auf die linke Seite, bewegt den Finger kurz auf und ab*) Hast du zehn. (*bewegt wieder die Hände gegeneinander auf und ab, Handflächen nach oben*) ,also minus zehn. (*schaut wieder auf den Tisch vor sich*) ,abal ,äh weil du (*zeigt wohl auf den Papierschnippsel auf der linken Seite*) das ja- (*zeigt auf eine Stelle etwas weiter unten, wohl immer noch auf dem Papierschnippsel*) minus das nimmst (*schaut wieder Lucas an*) ,hast du minus zehn.
108 LCS: Und (*nickt einmal*) da hast du drei. äh hast-
109 HBT: (unverständlich) ,(unverständlich) durch (*lässt beide Hände auf den Tisch sinken, die rechte mit der Handkante auf die Tischkante, die linke mit den Fingerspitzen auf die Tischfläche*) zwei machst hast du zweimal minus (*wiederholt die Geste mit der rechten Hand*) fünf. ,eine (*hält die linke Hand mit der Handfläche nach oben über dem Tisch*) (unverständlich) minus fünf und in (*hält die rechte Hand in gleicher Weise neben die linke, schaut kurz auf die rechte Seite, dann wieder zu Lucas*) andern auch minus fünf.
110 LCS: Ja. (*nickt, schaut dann Herbert an*) ,beides is gleich.
111 HBT: (*zieht die Hände zurück und legt sie entspannt auf den Tisch*) Ja beides is gleich.
112 LCS: Fett.
113 HBT: Bloß- (*streicht sich mit der rechten Hand über die Nase, hebt dann eine der beiden verbliebenen Schachteln auf der rechten Seite kurz an und legt sie wieder hin, schaut dafür kurz dorthin, danach wieder zu Lucas*) ,in einer Packung könn ja nich (*bewegt die linke Hand zur rechten, faltet dabei einen Finger nach dem anderen aus*) minus fünf sein weil- (*bewegt wie zuvor die beiden Hände gegeneinander auf und ab, Handflächen nach oben*) ,geht ja gar nich.
114 LCS: Weil sonst wärn da ja (*wackelt mit der linken Hand in der Luft*) gar keine mehr drinne.
115 HBT: (*zeigt mit beiden Hände kurz auf die Streichholzschachteln, legt dann die Hände auf die Tischkante*) Aber kann sein dass da dann- äh so- (*führt kurz die Hände zusammen, legt sie dann wieder ab*) Zettel drinne sind wo minus- (*dreht den Papierschnippsel, der auf der rechten Seite lag, um und schaut kurz darauf, schaut dann wieder zu Lucas, hält den Papierschnippsel so, dass Lucas ihn sehen kann*) fünf draufsteht zum Beispiel. (..)
116 LCS: (*nickt leicht*) Hä-
117 HBT: (*nickt einmal, lächelt*) Verstanden'
118 LCS: (*nickt deutlich*) Aber is- (*setzt seine linke Hand kurz auf dem Aufgabenblatt auf, geht die Aufgaben dann mit dem Zeigefinger von oben nach unten entlang*) ,Beispiel jetzt hier watte- ,labelabelabellabellabel- (*hebt den Zeigefinger an, hält ihn in der Luft*)

Lucas stellt nun die Frage, wie herum er bei einer spezifischen Aufgabe die Division durchzuführen hat, der Forscher geht mit ihm zu seinem Platz und lässt Herbert alleine.

Herbert verdeutlicht hier, wie sich für ihn der Unterschied darstellt zwischen dem bisherigen Vorgehen und dem, was neu ist. Das Wegnehmen der Streichholzschachtel geht „wie normal" (93, 99); er fährt fort: „Dann- machst dus aber so'" und leitet so das in seinen Augen Neue ein. Damit meint er (anders als der Forscher) nicht das negative Ergebnis (der Division), sondern das Wegnehmen ins Negative.

Dieses wiederum baut er anders auf als es ihm der Forscher zuvor erklärt hat: In seinen Augen findet es nicht als Äquivalenzumformung statt, sondern als Verrechnung der einen mit der anderen Seite. (101-102). Die Richtigkeit der Umformung wird nicht über die Struktur begründet, sondern über ihre Plausibilität und die Unzulänglichkeit der Alternative (103). Dabei bezieht sich Herbert sehr wohl auf den Begriff der Gleichung: „,also dhast keine Gleichung. (*hält kurz inne, wiederholt die Geste dann mit den Handflächen nach oben*) ,also da ist nix gleich." In Herberts Augen ist es keine Option, dass auf der einen Seite der Gleichung nichts steht, dass dort dann „= 0" stünde, ist ihm nicht klar.

Die unterschiedlichen Zielsetzungen – strukturbezogen oder nicht – finden sich auch in den bereits dargestellten Diskussionen darüber, wie Anwendungsaufgaben anzugehen sind (Episode 120109_2_LG10_14-15_3, siehe Seite 137). Wie gesehen steht insbesondere für Herbert die Ermittlung eines konkreten Zahlenwertes im Vordergrund. Die Zielsetzung der Lehrerin, eine Gleichung aufzustellen, leuchtet von seinem Standpunkt her nicht ein.

Die gleiche Problematik lässt sich auch bei Katie und Ahmed erkennen, als sie beginnen, sich mit ihrer Anwendungsaufgabe (siehe Abbildung 5.36 auf Seite 168) zu befassen:

Episode 6.5: 120109_3_LG10_11-12: Eigentlich geht es um Gleichungen ...

1 AMD: (*legt das Aufgabenblatt an die Kante zwischen seinem und Katies Tisch*) Also ,Katie- ,hast durchgelesen- (*beugt sich vor, schaut dann wieder auf sein Blatt*) (...)

2 KTI: (*bislang aufgestützt, lässt die Arme auf die Tischplatte sinken, schaut kurz zu Ahmed, dann wieder auf das Aufgabenblatt vor sich, Ahmed schaut ebenfalls auf sein Aufgabenblatt*) Ja. (..)

3 AMD: Is ja eigentlich gar nich so schwer ne- (*Katie schaut kurz zu Ahmed herüber, dann wieder auf ihr Aufgabenblatt*) (..) a man kann ,man (*gestikuliert mit dem linken Arm*) rechnet- (*die Tür unmittelbar vor dem Tisch der beiden geht auf, beide Schüler schauen hin*) (..) (*streckt seinen Arm in Richtung des Mikrophons aus, das von der Tür beinahe heruntergestoßen wird*) Vorsicht Vorsicht (*die Tür verdeckt die Sicht auf die beiden Schüler*) (..)

4 KTI: Geh durch- (*Katie hält das Mikrophon hoch, während Anna unter dem Kabel hindurch in die Klasse kommt, schließt die Tür hinter sich*) (...) (*Katie stellt das Mikrophon wieder auf den Tisch*)

5 L: A-h- ,Anna- (*Herbert schaut zu Anna und der Lehrerin*)

6 ANA: Ich war krank und jetzt bin ich verspätet. (*geht zu ihrem Platz, Katie schaut*

wieder auf ihr Blatt, Herbert dreht sich zu Katie) (.)

7 L: Schön dass du wieder da bist. (*folgt Anna zu ihrem Platz, gibt ihr das Aufgabenblatt, die Unterhaltung geht noch weiter, Herbert und Katie haben sich jetzt aber beide wieder ihren Aufgabenblätter zugewandt*) (..)

8 AMD: (*schaut zu Katie*) Hast äh aber (*wackelt mit der rechten Hand*) hast durchgelesen ne- (*schaut auf sein Aufgabenblatt, Katie schaut ebenfalls herüber*) ‚man rechnet erstmal ähm- (*zeigt auf verschiedene Stellen im Aufgabentext*) ‚fümundreißig plus vitzehnneunzich- (*zeigt unverändert auf die zweite Stelle, Katie schaut auf ihr eigenes Blatt*) (...)

9 KTI: Ja- (*schaut Ahmed an, tippt mit den Fingerspitzen auf den Tisch*) (...)

10 AMD: Dann rechnent- man das (*gestikuliert ungerichtet mit dem linken Arm, fasst sich dann an den Kopf*) Erg-e-bnis- minus fünfzich- (*Katie schaut wieder auf ihr Aufgabenblatt*) (.) ‚also-m- (*streicht sich mehrfach mit der Hand durch die Haare*) (..) ‚äh das sind dann fünfzin- fümunzwanzich ne' (.) (*Katie schaut Ahmed an, Ahmed kratzt sich an der Nase*) ‚minus fünfz-i-c-h- ‚sind fümun- ‚sind vierun-dreißich fümunsiebzich. (..) (*zieht seinen Block etwas zur Mitte, bewegt den Stift in die Richtung des Blocks*)

11 L: (*geht nach vorne*) So-

12 AMD: (*leise*) Vierundreißich fümunsiebzich- (*klickt den Kugelschreiber auf, dreht den Block auf die Rückseite*)

13 L: (*teilweise gleichzeitig*) Ihr wisst was ihr zu tun habt erste Aufgabe (*Herbert schreibt etwas auf den Block, Katie schaut dabei zu*) Sabine komm hoch-

14 AMD: (*schreibt weiterhin, leise*) Vierndreißich- (.)

15 KTI: Wieso kannst du gut im Kopf rechnen'

16 L: (*gleichzeitig*) So ihr habt jetzt- ne Viertelstunde Zeit um (unverständlich) vielleicht auch n bisschen weniger-

17 AMD: (*gleichzeitig, macht eine wegwerfende Handbewegung*) Ja normal.

18 KTI: (*auch noch gleichzeitig mit der Lehrerin*) Solln wir jetzt- aufschreiben- ‚wie wir das ausgerechnet haben'

19 L: Und wenn ihr ne Idee habt wie man die Aufgabe lösen kann dann schreibt ihr das bitte auf. (*leise*) ‚ja'

20 AMD: (*gleichzeitig, bewegt die rechte Handfläche parallel zum Tisch auf und ab*) Nein ‚das is ja noch lange nich fertig. (*beide Schüler schauen wieder auf ihre Aufgabenblätter, Ahmed murmelt unverständlich vor sich hin*) (4sec) ‚er hat sich (*zeigt mit der linken Hand drei Finger*) drei CDs gekauft- (.)

21 L: (*weiterhin von vorne, zur ganzen Klasse sprechend*) Es geht um Gleichungn (*leiser*) nochmal so ne-

22 AMD: (*gleichzeitig, hält weiterhin drei Finger nach oben*) Neue Kopfhörer ham wir verrechnet. (*beide Schüler schauen auf Ahmeds Aufgabenblatt, Ahmeds Hand zeigt unverändert mit drei Fingern nach oben*) (5sec) ‚den Bon hat er ä-h- (*Katie schaut wieder auf ihr eigenes Aufgabenblatt*) (...) ‚ja. ‚jetzt kann man das eigntlich- (*löst die linke Hand, deutet damit auf den Block, legt den Stift auf den Tisch*) ‚vierndreißig fümunsiebzich (*Katie schaut Ahmed an*) geteilt durch zwei' (*beginnt in seiner Tasche zu kramen*) (..) (*zieht die Hand entlang der Stuhlkante wieder nach oben, ohne etwas aus der Tasche*

geholt zu haben, Katie schaut kurz auf ihren Taschenrechner, dann wieder zu Ahmed) ,und dann abba- (...) (*beugt sich wieder über seine Tasche und beginnt zu kramen*) ,muss ja eigentlich noch- der halbe Preis (*Katie schaut wieder auf ihr Aufgabenblatt*) da mit reingerechnet werdn (*atmet tief ein, kramt weiterhin in seiner Tasche*) ,ACH so ich okay weiß wie okay ,ich hab die Lösung.

23 KTI: (*schaut weiterhin auf ihre Aufgabenstellung*) Du bist so schlau.

24 AMD: (*zieht den Taschenrechner aus seiner Tasche*) Weiß ich doch.

25 KTI: Ühü- (*Katie geht mit dem Stift den Aufgabentext entlang, Ahmed tippt etwas in den Taschenrechner*) (..)

26 AMD: Vierndreißig komma- (..) sieben fünf- geteilt durch-

27 KTI: (*gleichzeitig, dreht sich ruckartig zu Ahmed, hält den Stift weiterhin über dem Aufgabentext*) Warte rechnest du jetzt die-

28 AMD: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Gleich- (*legt den Taschenrechner zur Seite, nimmt den Stift in die Hand, schreibt auf dem Block*) (5sec)

29 KTI: (*versucht, die Seite, auf der Ahmed gerade schreibt, anzuheben*) Das schreibst du nich auf ein Blatt. (*dreht sich nach hinten, wo die Lehrerin gerade zu Anna und Mia kommt, zieht dann ihre Hand zurück*)

30 AMD: Siebzehn komma drei- sieben- (.) fünf' (*legt den Stift weg, nimmt den Taschenrechner und gibt etwas ein*) (...) (*legt den Taschenrechner wieder auf den Tisch, schreibt, schaut dabei mehrmals auf das Display*) (...) ,acht- komma- (.) sechs (...) a-cht sieben (..) fünf. (*lehnt sich zurück, schiebt die Blätter vor sich etwas hin und her*) (..) ,so. (.) (*zeigt mit dem Zeigefinger in der Luft unbestimmt auf das Blatt, auf dem er geschrieben hat*) ,vierndreißig war das Ausgangs. (*macht eine bogenförmige Handbewegung nach links*) ,davon die Hälfte- (*bewegt die Hand mit leicht angewinkeltem Zeigefinger mehrfach über dem Blatt auf und ab*) ,das war eine CD- ,eine C D- ,so- (*lässt den Stift auf den Tisch fallen, nimmt den Taschenrechner, Katie schaut zu*) ,jetzt rechne ich- (..) v-ierundreißich komma- sieben fünf' (..) ,minus- (*schiebt den Stift auf dem Blatt etwas nach oben*) ,acht- komma- sechs- (.) acht- (.) sieben fünf. gleich- (.) (*legt den Taschenrechner auf den Tisch, nimmt den Stift in die Hand, schreibt*) ,sechsunzwanzich komma null (5sec)

31 KTI: (*Ahmed schreibt weiterhin*) Verdammt bist du schlau. (*lässt ihren Stift auf den Tisch fallen, macht ein schrilles Geräusch, stützt sich auf und schaut auf ihr Aufgabenblatt*) (..)

32 AMD: Fünf so. (*beendet den Schreibprozess, nimmt den Taschenrechner in die linke Hand, tickt mit der rechten Hand Katie am Arm an*) (..) (*dreht sich zum Forscher, der gerade vorbeigeht*) ,ich hab jetzt das (*streckt seinen Zeigefinger in Richtung des Forschers aus, der Forscher reagiert mit Verzögerung, Katie lacht*) ,ich hab jetzt- (*hält den Zeigefinger weiterhin nach oben, schaut auf seinen Block, Katie schaut zu Ahmed und dem Forscher*) (.) das- (.) Er-geb-nis-s- (*lässt den Arm sinken*) noch nich ganz. ,noch nich ganz sechsunzwanzich (*lässt den Stift auf den Tisch fallen, nimmt den Taschenrechner*) (unverständlich) geteilt durch zwei- (*gibt etwas in den Taschenrechner ein*) (6sec) (*schreibt auf dem Block*)

33 KTI: (*schaut Ahmed mit aufgestützten Armen zu, spricht mit hoher, sich teilweise*

> *überschlagender Stimme*) Warum checkst du das so schnell- (*legt die Arme vor sich auf die Tisch, lächelt*) (4sec)
> 34 AMD: (*hebt den Stift an, zeigt auf das Geschriebene, schaut zum Forscher auf*) Das is der Preis für eine CD- (..) ,ähm ,und (*zeigt auf eine Stelle weiter oben*) das is der Preis für ne ,für die- (*hebt die Hand kurz an und senkt sie wieder*) (.) (*zeigt auf den Aufgabentext, schaut kurz zum Forscher auf*) andre Hälfte dann. (*Katie, Ahmed und der Forscher schauen auf Ahmeds Unterlagen*) (...)
> 35 F: M-m-m-
> 36 KTI: Also sind es zwei (unverständlich) (*schaut zum Forscher auf, grinst*)
> 37 F: Probier mal ob das hinkommt ,wenn du da jetzt wieder die Rechnung- (*geht mit dem Finger über den Notizen auf dem Block von oben nach unten*) machst die die- haben ne (*bewegt den Finger auf und ab*) ,also was ,was
> 38 AMD: Hä-
> 39 F: (*redet ohne Unterbrechung weiter, Ahmed greift nach dem Taschenrechner*) Ugur alles gekauft hat ,wenn du das jetzt- (*zeigt kurz auf den Block*) mit diesem Preis zusammrechnet (*Katie schaut wieder auf ihr Aufgabenblatt*) musst du mal ausprobiern.
> 40 AMD: Okay- (*gibt etwas in den Taschenrechner ein*)
> 41 F: Ob das hinkommt- (*geht weg*)

Ahmed leitet die Interaktion damit ein, dass er Katie fragt, ob sie das Aufgabenblatt durchgelesen habe (1). Nachdem sie bejaht, beginnt Ahmed, seine Ideen vorzutragen, wobei er zwischendurch von einer zu spät ankommenden Mitschülerin unterbrochen wird (3-7). Ahmed erklärt, dass er zunächst „fümundreißig plus vitzehnneunzich“ (8) rechnen müsse, und das Ergebnis von 50 subtrahieren müsse (10). Bei der Durchführung wird deutlich, dass er insgesamt die Rechnung $50 - (14,90 + 0,35) = 34,75$ meinte, also von 35 Cent sprach (10).

Katie fragt, ob sie und Ahmed diese Rechnung aufschreiben sollten (18). Ahmed entgegnet, dass die Aufgabe noch nicht fertig bearbeitet ist und beginnt, den Aufgabentext durchzugehen (20-22). Die Situation, der er sich gegenüber sieht, gibt er folgendermaßen wieder: „‚jetzt kann man das eigntlich- (*löst die linke Hand, deutet damit auf den Block, legt den Stift auf den Tisch*) ,vierndreißig fümunsiebzich (*Katie schaut Ahmed an*) geteilt durch zwei’ (*beginnt in seiner Tasche zu kramen*) (..) (*zieht die Hand entlang der Stuhlkante wieder nach oben, ohne etwas aus der Tasche geholt zu haben, Katie schaut kurz auf ihren Taschenrechner, dann wieder zu Ahmed*) ,und dann abba- (...) (*beugt sich wieder über seine Tasche und beginnt zu kramen*) ,muss ja eigentlich noch- der halbe Preis (*Katie schaut wieder auf ihr Aufgabenblatt*) da mit reingerechnet werdn“ (22)

Die gleichzeitige Ansage der Lehrerin, dass es bei der Aufgabe weiterhin um Gleichungen geht (21), wird von Ahmed und Katie nicht gewürdigt. Da Ahmed gleichzeitig spricht (22), überhören sie sie wahrscheinlich.

Daraufhin behauptet Ahmed, die Lösung zu haben (22) und rechnet zunächst 34,75 : 2 = 17,375 (26-30). Das Ergebnis teilt er nochmals durch 2 und erhält so $8,6875$ (30). Den erhaltenen Wert subtrahiert er von 34,75 und kommt auf 26,0625 (30-32). Gegenüber dem vorbeikommenden Forscher behauptet er, er habe das Ergebnis, so dass dieser stehen bleibt und die Rechnung verfolgt, die Ahmed dann doch noch durchführt: Er dividiert 26,0625

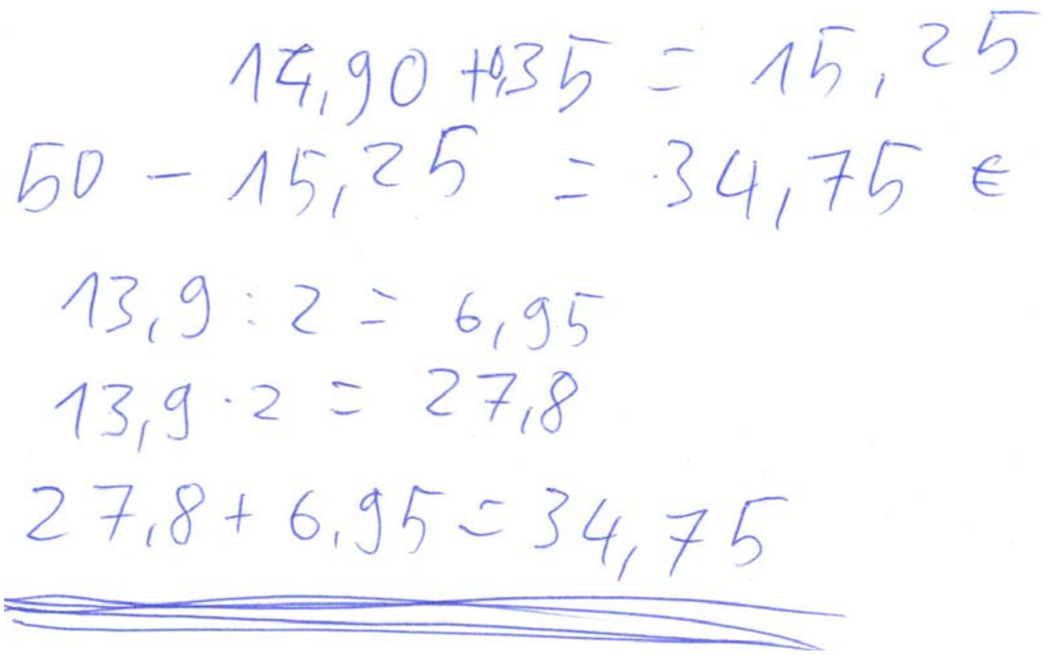


Abbildung 6.5.: Ahmeds Ansätze zur Anwendungsaufgabe „Vergesslich im Elektromarkt“

durch 2 (32) und behauptet dann gegenüber dem Forscher, das erhaltene Ergebnis sei der Preis für eine CD (34). In Bezug auf einen anderen Wert – wohl 8,6875 – behauptet er, dies sei “der Preis für ne ‚für die- (*hebt die Hand kurz an und senkt sie wieder*) (.) (*zeigt auf den Aufgabentext, schaut kurz zum Forscher auf*) andre Hälfte dann.“ (34)

Der Forscher äußert sich nicht explizit zur Richtigkeit der Lösung, sondern beauftragt Ahmed, die Probe zu machen (37-39). Ahmed reagiert zunächst irritiert (38), nimmt die Aufgabe dann aber an (39).

Katie ist in Ahmeds Vorgehen kaum eingebunden. Als er beginnt, von 34,75 herunterzurechnen, versucht sie, sich einzubringen, indem sie danach fragt, was Ahmed tut (27, 29). Ahmed geht darauf nicht ein.

Genau wie Sabine und Herbert fällt es auch Ahmed schwer, die Unbekannte erst einmal als Teil einer Rechnung zu betrachten und nicht als das Ergebnis einer Rechnung. Der Forscher versucht, das intendierte Tätigkeitsmotiv deutlicher zu machen:

Episode 6.6: 120109_3_LG10_15,18: „Aber dan-n muss man halt mit der andern Technik da“

Nach der zuvor dargestellten Episode kommt Ahmed durch Umkehrung der durchgeführten Rechnungen wieder auf den Ausgangswert. Daraufhin geht er nach hinten und berichtet dies dem Forscher. Der Forscher kommt mit Ahmed an seinen Tisch und bittet ihn, die Rechnung noch einmal zu erklären. Dem kommt Ahmed nach. Der Forscher hat zunächst Probleme zu folgen und gibt nur an, dass er selbst ein anderes Ergebnis erwartet hatte. Dann fordert er Ahmed auf zu erklären, wie er auf seine

Lösung gekommen ist.

45 F: (*hockt links neben Ahmeds Tisch, hält die Arme verschränkt auf dem Tisch, schaut auf Ahmeds Aufzeichnungen, siehe dazu Abbildung 6.5; Katie schaut den Forscher an, Ahmed schaut teilweise auf seine Aufzeichnungen, teilweise zum Forscher*) Wie bist du denn da drauf gekomm- ,erklär mal eben-
46 AMD: Also- (*legt den Taschenrechner an der unteren Tischkante ab, zeigt dann auf eine Stelle auf dem Aufgabenblatt*) ,ich hab erstmal n-natürlich runtergerechnet ,von fünfzich-
47 F: J-a.
48 AMD: (*bewegt den Finger etwas nach rechts*) Hab ich natürlich- äh vitzehn neunzich- (*zieht den Finger zurück*) abgerechnet- (*zeigt auf eine Stelle weiter links unten auf dem Blatt, wahrscheinlich die nächste Zeile*)
49 F: (*gleichzeitig, leise*) Ja ,das is
50 AMD: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) und fünfundreißig Cent abgerechnet.
51 F: Genau.
52 AMD: (*bewegt die Hand weg vom Aufgabenblatt und nach links zu seinem Block*) Dann kam ich auf (*zeigt auf eine Stelle rechts unten auf dem Block*) vierundreißig komma sieben fünf.
53 F: Genau.
54 AMD: Dann äh (*kratzt sich an der Nase*) wusst ich ja (*kratzt sich am rechten Arm*) dass drei CDs insgesamt gekauft wurdn (*macht ein schmatzendes Geräusch*) ,aber erstmal wollt ich ,den Preis für- (*schaut auf das Aufgabenblatt*) ei-ne CD ausrechnen’
55 F: J-a- ,darf ich mal ebn- (*nimmt Ahmeds Taschenrechner*) kuz hier. was. rechnen- (*gibt etwas in den Taschenrechner ein*) (10sec)
56 KTI: Is doch die Frage (*deutet mit der Hand unbestimmt auf das Aufgabenblatt, zieht sie dann wieder zurück*) ,(unverständlich)
57 F: (*gleichzeitig*) Ja- (*legt den Taschenrechner oben auf Ahmeds Block ab*) ,und wie hast du das gemacht’ (*stützt sich mit dem rechten Arm auf dem Tisch auf*) (.)
58 AMD: (*kratzt sich an der Nase*) Ä-h-m- (.) (*kratzt sich immer noch an der Nase*) ,ich klaube es ,j-a das ist zwar so aber- ,es (*hört auf sich zu kratzen*) das muss nich so sein- (*nestelt mit der linken Hand an seinem rechten Ärmel*) ,glaube wie hab ich das gemacht. ich hab- (*der Forscher richtet sich auf*) ,dann geteilt durch zwei- (*macht zweimal eine von oben nach unten ziehende Bewegung auf dem Block, ungefähr von der Stelle aus, auf die er zuletzt gezeigt hatte*) gerechnet’ (..) (*bewegt den Finger einmal nach links und wieder zurück, wahrscheinlich in der wiederum nächsten Zeile*) ,dann bin ich auf siebzehn komma drei sieben fünf’ aber- (*trommelt mit den Fingern der linken Hand auf dem Tisch, der Forscher bewegt seinen Stift an der linken Seite des Geschriebenen entlang, nuschelt*) ,sns (*Kommentar:* ansonsten? besonders?) komm ich dann ja eigntlich auch nich weiter weil ich ja nich weiß- (..) wieviel ne
59 F: (*gleichzeitig, bewegt weiterhin den Stift auf der linken Seite des Geschriebenen*) Hm-
60 AMD: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) halbe (*formt den Ansatz eines P-Lautes*) kostet so-

61 KTI: Es hat grad geklopft'
62 F: J-a. ‚wie bist du auf (*zeigt abwechselnd auf zwei Stellen auf dem Block*) diese Zahln gekomm' (*Ahmed fasst sich erst an die Nase, dann ans Kinn, verbleibt in dieser Haltung*) (...) ‚oder mal anders gefragt. (*umkreist auf dem Block einen horizontal länglichen Bereich*) wenn das hier der Preis für ne ganze CD is ne'
63 AMD: (*nickt, nasal*) Öhä-
64 F: (*umfährt mit dem Stift mehrfach eine Zeile weiter oben*) Is das der Preis für ne halbe CD' (*zieht den Stift zurück*) (..)
65 AMD: (*lässt die Hand sinken, geht mit dem Oberkörper zurück, zieht sich erst den rechten, dann den linken Ärmel hoch*) Verdammt- das pass passt ja hinten und vorne (*lachend*) nich-
66 F: (*schaut Ahmed an, bewegt sich etwas nach links, also von Ahmed weg*) Mhm. (*nimmt sein Notizbuch vom Tisch*)
67 AMD: Äch- (*rückt mit dem Stuhl stückweise nach vorne, der Forscher macht zwei Schritte nach hinten*) (..)
68 F: (*bewegt sich wieder an den Tisch heran, Ahmed schaut mehrmals zu ihm auf, dann wieder nach vorne*) Du hast zwar ne (*bewegt seine rechte Hand, als würde er an einem Regler drehen*) Zusammsetzung gefundn
69 AMD: (*gleichzeitig*) Jaja. (*grinst*)
70 F: (*redet fast ohne Unterbrechung weiter, Katie wendet sich ab und blättert in der Folge in ihrem Block*) Wie du insgesamt (*dreht die Hand ein letztes Mal so, dass die Handfläche nach oben zeigt, gestikuliert so weiter*) auf diese fünfzich Euro kommst- (*setzt die Hand auf die Tischkante, Ahmed schaut zu ihm auf*) ‚aber nicht die richtige ne'
71 AMD: (*senkt seinen Blick wieder auf den Tisch*) Mh.
72 F: (*zeigt auf die gleiche Stelle im Block, auf die er zuletzt gezeigt hatte, bewegt die Hand kurz etwas nach unten, dann wieder zurück auf die gleiche Stelle*) Weil das is nicht der halbe Preis sondern irgendwie mehr als der halbe Preis. (..)
73 AMD: (*leise*) Wie hab ich das denn gemacht-
74 F: (*bewegt die Hand unbestimmt über dem Papier*) Aber grundsätzlich is das schon nich schlecht (*beschreibt auf dem Blatt einen Kreis*) mit dem Rückwärtsrechnen' (*umfährt mit dem Finger einen Bereich auf dem Papier*) ‚also von diesem Betrag auszugehn und (*macht mit dem Finger kleine Schritte auf dem Papier*) dann zu gucken- (*zieht die Hand zurück und lässt sie herabhängen*) ‚ja was-
75 AMD: Aber dan-n muss man halt mit der andern Technik da (*Ahmed schaut zum Forscher auf, der Forscher schaut Ahmed an, neigt seinen Kopf, Ahmed deutet mit der Hand unbestimmt nach vorne, Katie hat eine Seite in ihrem Block aufgeschlagen und schaut nun wieder zu Ahmed und dem Forscher*) weitermachen ne'
76 F: J-a überleg mal wie (*nickt, tippt mit dem rechten Zeigefinger auf den Tisch und bewegt sie dann darüber hin und her*) ‚genau wie jetzt eure Technik die ihr- die letzten Stunden gelernt habt wie die da hilft. (*bewegt sich nach hinten weg*) (.)
77 AMD: Okay-

78 KTI: (*gleichzeitig*) Oh Gott. (*Ahmed schaut kurz zu Katie herüber, dann wieder auf seine Unterlagen*) (.)
79 AMD: Also so natürlich (*zeigt auf eine Stelle in seinem Block*) vierndreißig- sieben fünf'
80 KTI: Das schon richtich.
81 AMD: Ja.
82 KTI: Glaube das weiß ich auch. (*klickt mehrfach ihren Kugelschreiber, Ahmed schaut auf seinen Block*) (...) (*schaut auf ihre Unterlagen*) ,aber wie geht das danach weiter das is die Frage.
83 AMD: (*atmet tief ein, lehnt sich kurz nach vorne, greift dann nach seiner Mappe, die unter einem Stapel von anderen Unterlagen liegt*) Wie ging denn das noch. (*nimmt die Mappe zu sich*) (..) ,mit den ganzen Streichhölzern und so. (*legt die Mappe links vor sich auf den Tisch, blättert dann darin*) (8sec)
84 KTI: (*nimmt ebenfalls ihre Mappe*) Lalala. ,dieses eine Arbeitsblatt'

Durch die Frage danach, inwiefern die von Ahmed behaupteten Werte für den Preis einer CD und für den „Preis für ne halbe CD“ zusammenpassen (62-64), fokussiert der Forscher noch mehr auf die Frage der Richtigkeit des Ergebnisses, das Ahmed gerade noch versucht herzuleiten. Es geht jetzt nur noch um die Frage, ob das Ziel insgesamt erreicht wurde, und Ahmed muss eingestehen, dass dies nicht der Fall ist (65). Der Forscher macht eine Differenzierung, die ihm offenbar wichtig ist – zu erkennen an seiner Rückkehr an den Tisch, nachdem er eigentlich schon im Rückzug begriffen war (66-68): Er erklärt, dass ein Ziel durchaus erreicht wurde, nämlich *eine* Zusammensetzung der 50€ zu finden (68-70). Ein weiteres grundlegendes Ziel wurde aber nicht erreicht: „Weil das is nicht der halbe Preis sondern irgendwie mehr als der halbe Preis.“ (72) Der Forscher benennt das „Rückwärtsrechnen“ explizit als erfolgversprechende Handlung (74), fügt aber hinzu, dass eine Tätigkeit in Form der „andern Technik da“ (Ahmed, 75) hilfreich wäre, um beide Ziele zu erreichen. Ahmeds spätere Äußerung (83) macht deutlich, dass er versteht, dass es um das Arbeiten mit Gleichungen geht. Durch sein Benennen des bereits vorhandenen Ansatzes und der vorliegenden Handlungsoptionen möchte der Forscher Ahmed (und Katie) dazu ermutigen, weiter zu probieren, auf diesem Wege voranzukommen.

Ahmed setzt sich in der Folge zum Ziel, konkrete Preise darauf zu überprüfen, ob sie den Anforderungen genügen, wie die bereits weiter oben dargestellte Episode 120109_3_LG10_23 (siehe Seite 168) zeigt. So kommt er zügig zu der richtigen Feststellung, der Preis einer CD liege „auf jeden Fall zwischen dreizehn und vitzehn Euro“ (118). Dabei ist Ahmed offenbar klar, dass die Eingrenzung eines Intervalls nicht den Anforderungen der Aufgabe genügt: „A-c-h- (..) ,aber wie kann ers denn herausfinden ,verdammt-“ (120).

Dennoch kehrt er letztlich wieder dazu zurück (138-140). Diese Rückkehr zur Intervall-Idee deutet darauf hin, dass die Reformulierung des Problems, die er unmittelbar vorher geliefert hat, ihm keinen Erkenntnisgewinn bringt. Dabei stellt sie eine verbale Formulierung der zur Lösung notwendigen Gleichung dar: Symbolisch notiert bedeutet Ahmeds Beschreibung (136-138) nichts anderes als $34{,}75 = 2x + 0{,}5x$. Dass Ahmed dies erst sieht, als er die Musterlösung erhält (vgl. Abbildung 5.37 auf Seite 173), ist ein deutliches Indiz dafür, dass er als Ziel nicht an eine Aussage über eine Unbekannte denkt. Als Ziel der Rechnung benennt Ahmed stattdessen den Preis einer CD.

In einer ungleich schwierigeren Lage als Ahmed mit seinen teilweise irrigen Annahmen über die Ausrichtung der Tätigkeit ist Katie, bei der sich in dieser Episode gar kein Gespür für ein mögliches Tätigkeitsmotiv erkennen lässt. Symptomatisch ist ihre Aussage „Nachdenken nachdenken." (111), gefolgt von weitgehender Untätigkeit. Erst deutlich später (ab 123) beginnt Katie wieder mit inhaltlichen Fragen an Ahmed, der bis dahin völlig losgelöst von ihr weiterarbeitet. Es leuchtet ein, dass Nachdenken ohne ein Motiv, das dabei verfolgt werden könnte, zu keiner Tätigkeit und damit auch nicht zu Lernen führt.

Es ist offenbar für die Schülerinnen und Schüler eine enorme Hürde, sich strukturbezogene Ziele zu setzen und so von sich aus auf das neue, auf die algebraische Struktur bezogene Tätigkeitsmotiv zu kommen. Es besteht eine starke Tendenz dazu, sich auf bekannte Ziele und damit Verfahren zu beziehen. Es stellt sich die Frage, ob eine Aufgabe an sich es überhaupt für einen Schüler oder eine Schülerin *notwendig* machen kann, von sich aus mit einer neuen Struktur zu arbeiten. Sicher gibt es auch Schülerinnen und Schüler, die ein eigenes Interesse an solchen Entdeckungen mitbringen; bei anderen muss dieser Impuls aber wohl von der Lehrperson kommen.

Zum Tätigkeitsmotiv nur mit der Lehrkraft?

In den beobachteten Lernprozessen gelingt die Erschließung des Umgangs mit linearen Gleichungen nicht ohne ein gewisses Maß an äußerer Einflussnahme. Bei Sabine und Herbert ist es letztlich die Lehrerin, die „wegnehmen" als Handlungsoption ins Spiel bringt und so das Motiv in Reichweite bringt: die Vereinfachung der Streichholzschachtelgleichung in eine Form, in der die Anzahl der Streichhölzer pro Schachtel unmittelbar zu sehen ist. Bei Katie und Ahmed bringt Sabine dieses Vorgehen ins Spiel, es muss aber nochmals durch die Lehrerin legitimiert werden, bevor es auch für Ahmed nicht mehr eine von vielen möglichen Tätigkeiten ist.

Dass die Lehrkraft weiß, „wie es geht", ist den Schülerinnen und Schülern natürlich klar und lässt sie auf schnelle Anleitungen hoffen. Darauf deutet bereits Sabines Einstiegsfrage in Episode 111221_2_LG1_40-41 (siehe Seite 101) hin: „Wie rechnet man das denn-" (25). Sabine nimmt also an, dass gerechnet werden muss (siehe auch Zeile 44) und lässt sich daher nicht auf die intendierte Rahmung des Lösens von Gleichungen als Lösen eines Rätsels ein. Das Muster wiederholt sich im weiteren Verlauf der Episode: Die Fragen der Schülerinnen und Schüler lassen erkennen, dass sie davon ausgehen, dass die Lehrkraft und der Forscher den mathematisch korrekten Lösungsweg kennen, und dass es reichen würde, wenn sie ihn ihnen einfach sagen würden (39, auch Herberts „Das ist übelst kompliziert. ‚echt." (75) ist illokutionär eine Aufforderung). Explizit wird dieser Wunsch in der Aussage „Das einfachste wär wenn Sie uns einfach die Lösung sagen. (*streicht sich durch die Haare, Herbert lacht*)" (80). Dieser Interpretation entspricht auch die Beobachtung, dass Sabine und Herbert ihre Ideen in Form von Schlagwörtern oder kurzen, unvollständigen Beschreibungen einbringen (27, 34, 41, 42, 59, 64, 70, 88, 95, 104-111) – illokutionär wird durch dieses „Raten" nach einer schnellen Bestätigung oder Ablehnung gesucht.

In der Tätigkeit angekommen

Der bis hierhin dargestellte Zusammenhang zwischen vorliegender Situation, Tätigkeitsmotiv und durchzuführenden Handlungen lässt sich immer wieder erkennen, auch nachdem die Schülerinnen und Schüler sich eingearbeitet haben, weil er insgesamt die Tätigkeit definiert. Insbesondere lässt sich ein Rückbezug auf diesen Zusammenhang rekonstruieren, als es darum geht, auch Gleichungen mit negativen Lösungen zu bearbeiten. Da es sich dabei um einen relativ langwierigen Prozess handelt, soll dies hier nur anhand eines Ausschnitts gezeigt werden:

Episode 6.7: 111209_3_LG3_32_2: Wegnehmen der Schachteln ins Negative

Ahmeds Aufzeichnungen, auf die sich in dieser Episode bezogen wird, sind bereits als Abbildung 5.32 auf Seite 166 wiedergegeben worden. In der vorherigen Episode (die ab Seite 215 ausführlich dargestellt wird) hat die Lehrerin darauf bestanden, dass Ahmed zunächst nur die Streichhölzer „wegnimmt“, woraufhin er die sichtbaren Ausstreichungen vorgenommen hat.

90 L: (*Ahmed ist fertig mit Schreiben, Marie hält den Stift über ihrem Blatt, die Lehrerin atmet tief ein*) So also (*beugt sich nach vorne und zeigt mit dem rechten Zeigefinger auf die linke Seite der Gleichung auf dem Aufgabenblatt*) wenn wir hier drei wegnehm ham wir hier noch eine Schachtel’ (*bewegt den Zeigefinger auf die rechte Seite*) (.) ‚und da zehn Streichhölzer (*schaut Ahmed an*) und drei Schachteln. (*Ahmed nickt*) (.) ‚so jetzt (*klopft mit der rechten Hand mehrfach auf die rechte Seite der Gleichung*) müssen wir ja hier die Schachteln wegnehm- (*macht die gleiche Klopfbewegung kurz auf der linken Seite der Gleichung, legt dann die Hand mit dem ausgestreckten Zeigefinger auf die rechte Seite, schaut Ahmed an*) weil hier ham wir ja schon was weggenomm ne’ (*Ahmed nickt, im Hintergrund albern zwei Schüler herum, die zusätzlich zu den drei genannten zuhören, die Lehrerin zeigt auf die rechte Seite und bewegt den Zeigefinger auf und ab*) ‚wie viel Schachteln muss man denn hier wegnehm’

91 AMD: Ja man kann ja nur eine weil das auf der andern Seit- (*geht mit dem Stift in Richtung des Aufgabenblattes, zeigt unbestimmt auf die linke Seite der Gleichung*)

92 L: (*dazwischen, hebt den Zeigefinger zwischen Ahmed und dem Aufgabenblatt*) Nee- (*zeigt wieder auf die rechte Seite der Gleichung, bewegt den Finger dort hin und her, wahrscheinlich zeigt sie auf die einzelnen Schachteln*) ‚wir müssen jetzt so viele Schachteln wegnehm bis hier keine mehr sind. (*schaut zu Ahmed und Marie*)

93 KTI: Drei.

94 AMD: (*beugt sich über das Aufgabenblatt*) Ach man kann die auch rübernehm- (*Paul kommt dazu und stellt sich vor Ahmeds Tisch, verstellt so die Sicht auf alles außer Marie, daher ab jetzt nur noch lückenhafte Beschreibung der nonverbalen Handlungen*) oder’

95 L: Nee nee nee nee nee. ‚so wenn wir drei wegnehm ‚könn wir das rechnen’ (.)

96 AMD: Ja a-

97 L: Eins minus drei’ (...)

98 AMD: J- ja minus drei. (*schaut zur Lehrerin auf, Marie ebenso, Paul nimmt Ahmeds*

Taschenrechner in die Hand) (..)
99 MRI: Wie jetzt das hab ich jetzt nicht verstanden.
100 KTI: (*teilweise gleichzeitig*) Hä hab ich auch nich verstanden Ahmed. (*kratzt sich mit den Karten am Kopf*)
101 PL: Minus drei (unverständlich)
102 AMD: (*teilweise gleichzeitig*) A-ch- ‚es geht in Minusbereich- (...)
103 PL: He also wie soll man wie soll ich rechnen ‚wie soll man jetzt rechnen. (*der Forscher macht ein Foto, der Blitz sorgt für Unruhe in der Klasse, auch die Schülerinnen und Schüler im Bildbereich drehen sich um*) (5sec) ‚also wie soll man jetzt rechnen ‚also einfach- (*scheint mit dem rechten Arm zu gestikulieren*) (...) ‚das-
104 L: (*teilweise gleichzeitig*) Ich schreib das erstmal vernünftig auf das is ja hier n Graus. (*Katie lacht auf*) ‚also pass auf wir ham (*schreibt in Ahmeds Block, unterhalb von Ahmeds bisherigen Aufzeichnungen*) hier drei Streichhölzer und eine Schachtel ne’
105 KTI: Mh’
106 AMD: Ja.
107 L: Und da drüben ham wir dreizehn Streichhölzer’ und drei Schachteln. (.) (*atmet tief ein*) ‚so und jetzt nehm wir erstmal hier ein Streichholz weg. (*schreibt am rechten Rand der Gleichung*) ‚minus- (...) ‚drei Streichhölzer nehm ich weg ne’ (*ist fertig mit Schreiben, bewegt den Stift weiter nach links, so dass er im Bild nicht mehr zu sehen ist*) (..) ‚richtich’
108 AMD: Ja.
109 PL: (*gähnend*) Joa.
110 L: (*der Forscher nimmt jetzt die Kamera in die Hand, dadurch zunächst sehr wackeliges Bild, aber danach wieder mehr zu erkennen*) Dann ham wir hier noch eine Schachtel’ (.) zehn Streichhölzer und drei Schachteln. ‚richtig’
111 AMD: Ja.
112 PL: (*gleichzeitig*) Ja.
113 L: Gut.
114 MRI: (*nuschelnd*) Warde warde warde warde- (...) ‚ja-
115 L: Marie’ richtich’
116 MRI: Okay- ‚ja okay-
117 L: So jetzt hab ich ja (*zeigt mit dem Stift auf die linke Seite der Gleichung im Block*) hier schon was weggenomm (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) das heißt ich muss jetzt auf dieser Seite die Schachteln wegnehm ‚und da hab ich (*umkreist mit dem Stift eine bestimmte Stelle*) drei Stück. (*schreibt rechts neben der Gleichung*) ‚das heißt ich zieh drei Schachteln ab. (*bewegt den Stift auf dem Blatt nach unten, schaut zu Ahmed und Marie*) (..)
118 PL: Dann hat man
119 MRI: (*dazwischen*) Aber vom-
120 PL: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Minus zwei Schachteln.
121 L: (*schreibt in einer neuen Zeile weiter*) So jetzt hab ich hier minus zwei Schachteln- und zehn Streichhölzer.

122 MRI: Ach so da is die andere Seite auch ,minus drei (*schaut zur Lehrerin auf*) Schachteln und-
123 PL: (*größtenteils gleichzeitig*) Also so so so (*zeigt auf den Block, wahrscheinlich auf die linke Seite der neuen Zeile*) zwei-
124 L: (*zu Marie gewandt*) Du musst (*gestikuliert mit der rechten Hand*) ja auf beiden Seiten immer das gleiche machen-
125 MRI: Ja ,aber-

Die Lehrerin markiert den Beginn dieses Abschnitts mit „So also" (90) als einen Neuanfang. Sie benennt die Situation, von der sie ausgeht. Darüber hinaus gibt sie auch die Handlung vor, die jetzt durchgeführt werden soll: „„so jetzt (*klopft mit der rechten Hand mehrfach auf die rechte Seite der Gleichung)* müssen wir ja hier die Schachteln wegnehm- (*macht die gleiche Klopfbewegung kurz auf der linken Seite der Gleichung, legt dann die Hand mit dem ausgestreckten Zeigefinger auf die rechte Seite, schaut Ahmed an*) weil hier ham wir ja schon was weggenomm ne'" (90)[1]

Ahmed hingegen nimmt anders als von der Lehrerin beabsichtigt an, man müsse auf der rechten Seite eine Rechnung durchführen (nämlich $3-1$, 91), während auf der linken Seite nach dieser Operation eben einfach keine Schachteln mehr vorliegen würden. So war er auch vorgegangen, als er die Aufgabe alleine bearbeitet hatte. Von der Lehrerin ist aber intendiert, dass auf der rechten Seite die Anzahl der wegzunehmenden Schachteln begründet liegt. Das ist für Ahmed, sicher verstärkt durch seine bisherige Schreibweise, zunächst nicht denkbar: Er geht noch davon aus, dass man niemals mehr Schachteln wegnehmen kann als tatsächlich vorliegen (91) – dass der „Minusbereich" hier überhaupt erreichbar ist, muss ihm erst einmal klar werden (102). Für ihn ist die Situation immer noch eine konkret-anschauliche, in der „negative Schachteln" nicht denkbar sind.

Es wird hier sichtbar, dass eine besondere Schwierigkeit bei der Einführung mathematischer Inhalte anhand nichtmathematischer Kontexte darin besteht, dass der Kontext selbst Bedeutungszuschreibungen mit sich bringt, die überwunden werden müssen, wenn es nur noch um die mathematischen Inhalte gehen soll.[2] In der an späterer Stelle ausführlicher besprochenen Episode 111209_3_LG3_14 (siehe Seite 209), in der Ahmed Marie zeigt, wie er die erste Aufgabe mit einem Bruch als Lösung bearbeitet hat, beziehen sich ihre skeptischen Nachfragen darauf, ob die Streichhölzer teilbar sind. An der Korrektheit der Rechnung äußert sie keinen Zweifel, sondern bindet das Ergebnis in ihre Argumentation ein (47). Ihr Problem besteht in der Machbarkeit – können wir wirklich halbe Streichhölzer in die

[1]Da in der Gruppe bekannt ist, dass stets auf beiden Seiten gleichzeitig das Gleiche weggenommen werden muss (75-77 in der vorangegangenen Episode 111209_3_LG3_32_1, siehe Seite 6.16), behauptet sie hier nicht, dass nur rechts weggenommen werden muss.

[2]Man könnte Ahmeds Herangehen an die Aufgabe mehr würdigen, indem man die Gleichung, auf die er kommt, zunächst einmal akzeptiert. Sie ließe sich auffassen als 0 Streichhölzer = 10 Streichhölzer + 2 Schachteln. Davon ausgehend müsste man überlegen, wie dies angehen könnte. Die Motivation, den ursprünglichen Kontext zu überschreiten (negative Streichhölzer sind natürlich genauso undenkbar wie negative Schachteln), bestünde nicht mehr in der Anwendung des Schemas, demzufolge am Ende stets eine Division durchgeführt werden muss, sondern im eigentlichen Motiv der Tätigkeit, den Inhalt der Schachteln zu bestimmen.

Schachteln legen (47)? Ganz offen stellt sie die Frage: „Kann ich den Streichholz teiln' (*lacht*)“ (49) Ahmed ist zwar verunsichert, geht aber offenbar davon aus, dass er nur mit Situationen konfrontiert wird, die auch lösbar sind: „Ich glaub schon- ,weil das die einzige Lösung so-“ (50)

Sprachliche Explizitheit

Es deutet sich in den beschriebenen Episoden bereits an, dass der Grad der Explizitheit eher gering ist, wenn angenommen wird, dass die beschriebene Struktur eigentlich klar ist. Das gilt wie eingangs gesehen für die Lehrkraft, aber auch für die Schülerinnen und Schüler. In der folgenden Episode aus der zweiten Unterrichtsstunde erklärt Ahmed Katie anhand seiner Bearbeitung von Aufgabe B auf Aufgabenblatt 1 (siehe Abbildung 5.30 auf Seite 164), wie vorzugehen ist:

Episode 6.8: 111206_3_LG2_21: Ahmed erklärt Katie das Vorgehen

8 AMD: (*legt seinen Stift auf den Tisch, beugt sich nach rechts zu Katie, nimmt dann den Stift wieder auf und gestikuliert damit*) Erstmal zähln dann aufschreibn guck- (*nimmt seinen Block und legt ihn in die Mitte zwischen sich und Katie*) ,auf eine- (*dreht den Block um*) ,wo bist du bei B ne'
9 KTI: Ja-
10 AMD: Hab ich aufgeschrieben wie viele (*geht mit dem Stift das Geschriebene entlang*) das sind- ne'
11 KTI: Ja-
12 AMD: (*bewegt den Stift nochmals von links nach rechts über das Blatt*) Auf beiden Seitn- ,dann musst du natürlich welche wegnehm. ,dann guckst du (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) ,hier sind weniger Kästchen
13 KTI: Ja-
14 AMD: Sieht man ja ne' ,weniger Schachteln- ,dann zählt man mal wie viel das sind (*tippt mit dem Stift auf die einzelnen Schachteln auf der rechten Seite*) ,eins zwei drei vier fünf sechs sieben ,die könn ja alle weg (*macht mit beiden Händen eine Bewegung über der Tischfläche*) weil hier (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) mehr sind. ,aulso komm ersmal (*zeigt mit dem Stift auf die Mitte der Gleichun*g) sieben auf beiden Seiten weg.
15 KTI: Okay.
16 AMD: Und von den Strichen sind hier mehr (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) (.) (*zeigt mit dem Stift auf die linke Seite der Gleichung, tippt dann auf jeden einzelnen Strich*) ,hier sind eins zwei drei vier fünf sechs sieben-
17 KTI: Ja.
18 AMD: Also komm hier auch sieben weg-
19 KTI: (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) Und da auch-
20 AMD: (*zeigt mit dem Stift auf die rechte Seite der Gleichung*) Ja da ja auch.
21 KTI: (unverständlich) (*Kommentar:* Bleiben da?)

22 AMD: Und dann bleibt übrig- (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) ,vier Kästchen- (*zeigt auf die Mitte der Gleichung*) ,weil hier ja sieben weggenomm wurden'
23 KTI: Ja-
24 AMD: (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) Hier- keine Kästchen- ,aber dafür hier noch n paar Striche. (*schaut kurz Katie an*) (.)
25 KTI: Achs-o-
26 AMD: Und dann rechnet man die- (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) ,das sind zwölf Striche- geteilt durch dv (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) ,die vier Schachteln. (*schaut sich zu einer Mitschülerin außerhalb des Bildbereichs um, die laut herumschreit*) (.)
27 KTI: (*rückt auf ihrem Stuhl nach hinten*) Achso okay danke.
28 AMD: (*zeigt auf die rechte Seite der Ergebniszeile*) Und das dann das- Ergebnis wie viel Streichhölzer in so ner Schachtel sind. (*zieht sich vom Tisch zurück*)

In Ahmeds Erläuterungen finden sich an mehreren Stellen Hinweise darauf, dass ihm das Vorgehen mittlerweile selbstverständlich geworden ist. Den ersten Schritt, nämlich die Gleichung in einer Kurzschreibweise zu notieren, beschreibt er nur kurz und lässt ansonsten sein Geschriebenes für sich sprechen, indem er darauf zeigt. Weitere Indikatoren sind die Verwendung des Wortes „natürlich" in Verbindung mit dem Verb „müssen" bei der Beschreibung des zweiten Schritts (12). Dabei „sieht man ja" (14) seiner Meinung nach sofort, auf welcher Seite weniger Schachteln liegen und demnach zu bestimmen ist, wie viele Schachteln auf beiden Seiten wegzunehmen sind. Im dritten Schritt fasst er sich dementsprechend noch kürzer und ersetzt Teile der Argumentation durch Zeigegesten (16). Auch im letzten Schritt deutet die Formulierung „Und dann rechnet man die- (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) ,das sind zwölf Striche- geteilt durch dv (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) ,die vier Schachteln." (26) darauf hin, dass es sich hierbei um eine etablierte Regel handelt.

Andererseits ist den Schülerinnen und Schülern manchmal intuitiv klar, dass es hilfreich sein kann, ihre Sicht der jeweiligen Situation explizit zu machen, wie im folgenden Beispiel Sabine, die Herbert bei Aufgabe A von Aufgabenblatt 1 (siehe Abbildung 5.5 auf Seite 126) hilft:

Episode 6.9: 111205_2_LG1_54,57: Explizitheit ist hilfreich

196 HBT: (*Sabine wendet sich gerade wieder ihren Aufzeichnungen zu, nachdem klar geworden ist, dass sie deutlich schneller ist als Herbert*) Aber wie rechnet jetzt man denn das' (*beugt sich weit nach vorne und schaut auf seinen Block*) (.)
197 SBN: (*dreht sich zu Herbert*) Ja- (*zeigt mit ihrem Stift auf eine Stelle auf Herberts Block*) ,d-a-s- (*zeigt auf eine Stelle etwas weiter rechts*) ,also vier minus (*zeigt wieder auf die gleiche Stelle wie zuvor, Herbert grinst, geht mit dem Oberkörper etwas zurück*) drei- (*schaut Herbert an*) (.)
198 HBT: (*schaut Sabine an*) Ergibt eins.
199 SBN: Ja dann (*ruckelt mit dem Stift, zeigt dabei weiterhin auf die gleiche Stelle,*

Herbert senkt den Blick auf das Blatt) hat man e-i-n Streichholz übrig.
200 HBT: (*schaut wieder Sabine an*) Schachtel meinst du.
201 SBN: (*bewegt den Stift einmal auf und ab*) Ja eine Streichholzschachtel. (*lässt den Stift kurz nach oben gleiten, zeigt dann wieder auf die linke Seite der Gleichung*) ,dann rechnest du nu- ,zwei minus (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung, Herbert schaut auf das Blatt, grinst*) null sind zwei- (*zieht den Stift zu sich heran, schaut Herbert an*)
202 HBT: (*spitzt die Lippen, schaut Sabine aus dem Augenwinkel an, lächelt*) Ja.
203 SBN: Hast du noch (*gestikuliert mit der rechten Hand, in der sie den Stift hält, dreht die Innenfläche der linken Hand nach oben*) zwei Streichhölzer übrich- (*Herbert nimmt einen neutralen Gesichtsausdruck an, Sabine legt beide Handflächen auf den Tisch*) (.) (*dreht beide Hände mit den Handflächen nach oben*) ,und WIEVIEL SIND DANN IN EINER SCHACHTEL (*bewegt die rechte Hand ruckartig etwas nach rechts, sodass sie auf die Gleichung auf Herberts Block zeigt, die Handfläche zeigt weiterhin nach oben, Herbert grinst*) WENN EINE ÜBRICH IS und du (*bewegt die Hand ruckartig nach links*) zwei noch übrich hast'
204 HBT: Zwei'
205 SBN: (*zieht die Schultern hoch, bewegt die weiterhin nach oben zeigenden Handflächen etwas nach vorne, mit hoher Stimme*) J-a. (...)
206 HBT: (*spitzt den Mund, dreht sich langsam in Richtung seines Block*) H-n-o-kay- (*grinst, dreht sich nach rechts weg, singt etwas in Richtung des Nachbartisches, Sabine stützt sich auf und arbeitet weiter an ihren Aufgaben*)

In der Zeit zwischen Episode 111205_2_LG1_54 und 111205_2_LG1_57 arbeitet Sabine konzentriert, Herbert bleibt erst eine Weile dem Nachbartisch zugewandt, schreibt dann kurz etwas und schaut dann auf Sabines Aufzeichnungen.

209 SBN: Checkst du das nich-
210 HBT: (*reibt sich mit der rechten Hand das rechte Auge, gähnt, schüttelt den Kopf*) Äh äh.
211 SBN: Gumma- (*richtet sich auf, streicht sich mit der linken Hand durch die Haare*) ,jetzt rechnest du ja ,(*zeigt mit der linken Hand auf eine Stelle in Herberts Block*) vier plus (*zeigt auf eine Stelle weiter links*) ,minus drei'
212 HBT: Hab ich.
213 SBN: (*bewegt die Hand kurz etwas nach unten, zieht sie dann zurück*) Ja. ,gleich- (*zeigt auf eine Stelle etwa in der Mitte des Blattes, vertikale Position nicht genauer zu erkennen*) (.) (*Herbert setzt den Stift an der Stelle an, auf die Sabine gezeigt hat, Sabine zieht sich die Ärmel ihrer Kapuzenjacke hoch*) eins. (*Herbert schreibt*) (.)
214 HBT: Ja. (*zieht die Hand zurück*)
215 SBN: Ja. ,jetzt rechnest du (*zeigt auf eine Stelle auf der linken Seite des Blocks, hält mit der Hand kurz inne*) zwei- (*zeigt auf zwei weitere Stellen, die erste etwas weiter unten, die zweite deutlich weiter rechts*) minus null' (*zieht die Hand zurück*)
216 HBT: Öh- (*bewegt den Kopf etwas nach vorne, hebt kurz den Stift an und lässt ihn wieder auf den Tisch sinken, schüttelt den Kopf*)
217 SBN: (*dreht beide Handflächen nach oben*) Zwei.

218 HBT: Sind zwei ja. (*dreht sich zu Sabine, schaut sie an*)
219 SBN: Ja. ‚dann- (*zeigt mit dem Stift auf Herberts Block*) ‚schreib trotzdem auf.
220 HBT: (*setzt den Stift an und schreibt*) Ye-ah- ‚zw-e-i minus n-u-ll (*schreibt/korrigiert etwas weiter links*) ‚o-a-h- (*bewegt die Hand mit dem Stift mehrfach hin und her*) ‚das Wort lass ich erstmal aus- (*schreibt „=" weiter rechts*) ‚gleich- (*schaut Sabine an*)
221 SBN: (*senkt den Kopf etwas*) Zwei.
222 HBT: (*setzt den Stift wieder an und schreibt*) (.) Ja.
223 SBN: (*Herbert schreibt noch*) Und jetzt hast du das Ergebnis (*Herbert ist fertig mit Schreiben, zieht seine Hand zurück, Sabine zeigt in dem Moment mit dem Stift auf das Geschriebene*) ‚du hast noch eine Streichholzschachtel und (*zeigt auf eine Stelle etwas weiter unten*) zwei Dinger. (*bewegt den Stift an den linken Rand des Blocks, etwas weiter unten*) ‚also schreibst du auf- (*bewegt den Stift auf und ab, während sie spricht*) ‚in einer Streichholzschachtel sind z-w-e-i (*nickt*) Streichhölzer.
224 HBT: (*synchron, schaut zu Sabine*) Z-w-e-i Streichhölzer. ‚okay. (*beugt sich vor und beginnt zu schreiben, Sabine wendet sich wieder ihren Aufgaben zu*)

Im ersten Durchlauf sagt Sabine Herbert die einzelnen Schritte vor, wobei sie verbal jeweils nur die Rechenaufgaben sagt und durch Gesten auf die entsprechenden Teile der Streichholzschachtelgleichung verweist. Herbert führt lediglich die (sehr einfachen) Rechnungen aus (197) beziehungsweise bestätigt das Ergebnis (201). Danach kehrt Sabine jeweils zum Kontext zurück und rekapituliert die Situation. Nur den letzten Schritt, nämlich zu erkennen, wie viele Streichhölzer in jeder Schachtel sind, überlässt Sabine Herbert (202), der auch die korrekte Lösung angibt (203).

Nach einer kurzen Phase, in der Sabine weiterarbeitet, nimmt sie wahr, dass Herbert weiterhin Hilfe braucht und erklärt nochmals. In diesem Durchlauf fordert Sabine Herbert jeweils explizit auf, die jeweiligen Zwischenergebnisse zu notieren (213, 219). Die Rechnungen an sich scheint Herbert zu beherrschen. Am Ende formuliert Sabine ausführlicher als vorher die Bedeutung des Ergebnisses. Herbert macht im Gegensatz zum ersten Durchlauf klar, dass er Sabines Ausführungen folgen konnte (223-224).

In der Kontrastierung von erstem und zweitem Durchgang lässt sich die Hypothese aufstellen, dass Sabines Aufforderungen, die Schritte einzeln aufzuschreiben, Herbert helfen, ihren Erläuterungen zu folgen.

Der Aspekt der expliziten Benennung der relevanten Objekte verweist darauf, wie nützlich eine geteilte Sprache ist, in der man sich versteht. Ihre Abwesenheit führt immer wieder zu Problemen. Als Beispiel soll die bereits dargestellte Episode 111209_2_LG3_44 (siehe Seite 182) dienen, in der Herbert seinem Mitschüler Lucas erklärt, wie er Streichholzschachtelgleichungen löst, bei denen es zu negativen Lösungen kommt. Bei der Beschreibung der durchzuführenden Rechnungen bezeichnet Herbert die Elemente der Rechnungen fast durchgängig mit „das (hier)" und zeigt dann auf die entsprechenden Objekte – Zahlen, Streichhölzer und Streichholzschachteln, die beiden Seiten der Gleichung (103-109). Die gewählte Formulierung ist natürlich relativ ungenau. Hierin liegt eine mögliche Ursache für das Aufkommen der „Verrechnungen": Die Schülerinnen können schon nicht benennen, auf welche *Objekte* sie sich beziehen (beispielsweise die Streichhölzer auf der rechten Seite).

Umso schwerer fällt es ihnen, die *Anzahl* der jeweiligen Objekte in den Blick zu nehmen – diese ist abstrakt, auf sie lässt sich nicht zeigen. Nur mit dieser Abstraktion ließe sich eine Rechenoperation bestimmen, die *auf beiden Seiten* durchgeführt werden muss, um dem Ziel näher zu kommen, die Lösung zu erkennen. Es wäre notwendig zu verstehen, dass beide Seiten der Gleichung durch die Anzahl der Schachteln dividiert werden, nicht durch „die Streichhölzer durch die Schachteln".

Es zeigt sich aber auch, welchen Einfluss der Tätigkeitskontext hier hat. Es lag eben eine Gleichung aus Streichholzschachteln vor und nicht eine Gleichung der Form $ax = b$. Bei einer Gleichung in symbolischer Form lässt sich in einem konkreten Beispiel – etwa $6x = 12$ – direkt erkennen, dass die Rechenoperationen sich stets auf die vorliegenden *Zahlen* beziehen. Im Kontext der Streichholzschachtelgleichungen muss zunächst verstanden werden, dass es jeweils um die *Anzahlen* von Streichhölzern beziehungsweise Streichholzschachteln geht. Ein verkürzende Alltagssprache führt hier zu Problemen, und zwar ganz besonders im Übergang von Addition und Subtraktion zur Division. Der Divisor bei einer Aufteilung von Objekten kann nicht mehr mit den Objekten identifiziert werden. Es ist schon ungenau zu sagen: „Ich nehme die Streichhölzer auf der rechten Seite weg", wenn eigentlich gemeint ist: „Ich nehme auf beiden Seiten die Anzahl der Streichhölzer weg, die auf der rechten Seite vorliegt." Es ist aber eine vollständig unsinnig zu sagen: „Ich teile die Streichhölzer durch die Schachteln." Korrekt wäre: „Ich teile sowohl die Anzahl der Streichhölzer als auch die der Schachteln durch die Anzahl der Schachteln."

Nur in dieser Formulierung wird deutlich, *warum* die entsprechenden Rechenoperationen durchgeführt werden. Das Teilen der einen Anzahl durch die andere wirkt ansonsten wie eine willkürliche Setzung; immer wiederkehrende Nachfragen nach der Ordnung der Division bestätigen diese Wahrnehmung bei vielen Schülerinnen und Schülern. Nur wenn die Rechenoperationen als Äquivalenzumformungen bezogen auf die Anzahlen auf einer Seite formuliert werden, wird jeweils auch eine Begründung deutlich: Man möchte unter Erhaltung der Gleichheit der beiden Seiten zueinander sämtliche Objekte einer Art auf einer Seite entfernen beziehungsweise die Anzahl der Streichholzschachteln auf 1 bringen.

Das bedeutet letztlich, dass der angelegte Tätigkeitskontext ernst genommen werden muss. Er ist keine bloße Fassade, die Regeln des Rätsels sind wichtig. Wenn dies nicht anerkannt wird, kann nicht zielgerichtet gearbeitet werden; stattdessen suchen die Schülerinnen und Schüler Verfahren, die sie durchführen können, bei denen aber nicht deutlich wird, warum die sich ergebenen Lösungen korrekt sind. Die algebraische Struktur ist eine Tätigkeitsstruktur – wenn sie nicht als solche aufgebaut wird, wird sie gar nicht aufgebaut.

Somit kommen wir zu einem Rückblick auf sämtliche Aspekte der Erkundung der Struktur linearer Gleichungen, die bis hierhin herausgearbeitet wurden:

- Die Lernenden müssen sich im Tätigkeitskontext zurecht finden, in dem die algebraische Struktur angelegt ist,
- sie müssen sich auf Ziele orientieren und Handlungen (hier: Äquivalenzumformungen) entwickeln,
- und schließlich in der Lage sein, all dies im Umgang miteinander sprachlich auszudrücken.

Andere Struktur, andere Tätigkeit, andere Erkundung

Auch in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen lässt sich insgesamt ein Hineinfinden in die entsprechende Tätigkeit beobachten. Im Vergleich zur bis hierhin beschriebenen Erkundung der Tätigkeit bezüglich linearer Gleichungen fällt aber auf, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst deutlich eigenständiger arbeiten können: Sowohl Katie und Ahmed als auch Sabine und Herbert führen die Messungen beim Befüllen der Bechergläser wie vorgesehen durch und kommen selbst zu der Annahme eines regelmäßigen Zuwachses der Füllhöhe. Anders als in der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen ist kein Eingreifen der Lehrerin notwendig, um Handeln zu ermöglichen. Dies leuchtet bei einem Rückblick auf die zugrunde liegende algebraische Struktur ein: Wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben wird beim Umgang mit (linearen) Funktionen anders als bei linearen Gleichungen zunächst nicht auf die Bestimmung der Variablen abgezielt.[3] Vielmehr sind sie unter verschiedenen Aspekten zu betrachten: Es können einzelne Werte eingesetzt oder ganze Bereiche dynamisch oder simultan betrachtet werden. Zu diesem Vorgehen können Schülerinnen und Schüler direkt angeregt werden, während es sich beim Lösen von Gleichungen um eine Problemlöseaufgabe handelt, wenn es erstmals auftritt.

Die Hilfe der Lehrerin ist dennoch nötig, nämlich um die durchgeführten Handlungen zu rahmen und in Bezug auf die mathematische Tätigkeit Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Da dabei aber noch weitere Aspekte eine Rolle spielen, wird ein Beispiel für die entsprechende Interaktion erst in Abschnitt 6.3.5 wiedergegeben.

6.1.2. Algebraischer Struktursinn in Aktion

Mit Strukturen handeln

Man könnte die bisherigen Beschreibungen folgendermaßen zusammenfassen: Wenn man mit Strukturen handelt, sieht man eine Struktur in etwas (hinein). Die Gültigkeit dieser Aussage zeigt sich insbesondere, wenn gemäß einer Struktur gehandelt wird, die eigentlich nicht als mathematisch sinnvolles Ziel angelegt war, so wie Ahmeds Theorie, nach der man die ursprüngliche Ordnung auflöst und die Streichhölzer und Schachteln jeweils auf einer der beiden Seiten des Gleichheitszeichens sammelt. In der bereits besprochenen Episode 111205_3_LG1_21-23 (Seite 150) stellt sich Ahmeds Handeln (19) als eine Suche nach Zusammenhängen zwischen der Anzahl der Streichhölzer und der der Schachteln dar. Deutlich wird dies zunächst durch das Zählen auf beiden Seiten. Daraufhin schaut er abwechselnd auf beide Seiten: Er sucht nach einer Verbindung. Dabei scheint er einen bestimmten Zusammenhang vermutet zu haben. Seine Aussage „was sechs' ‚nein nich sechs-" (19) deutet darauf hin, dass er eine andere Zahl an Schachteln erwartet hätte, wahrscheinlich 7, was eine gleichmäßige Zuordnung der 14 Streichhölzer ermöglichen würde. So beginnt Ahmed auch damit, jeder Schachtel zwei Streichhölzer zuzuordnen, geht

[3]Erst bei erweiterten Tätigkeiten in Bezug auf Funktionen, etwa bei der Bestimmung einer Stelle, an der ein bestimmter Wert angenommen wird, oder in der Bestimmung der Schnittstelle zweier Funktionen, tritt dieser Aspekt auf, und zwar genau weil hier wiederum Gleichungen aufgestellt werden, die gelöst werden müssen.

dann jedoch dazu über, jeder Schachtel drei Streichhölzer zuzuordnen, eben weil ansonsten Streichhölzer übrig blieben.

Dieses in-Verbindung-bringen von Bestandteilen der Situation unter einer bestimmten Zielsetzung findet auch dann noch statt, wenn die Schülerinnen und Schüler bereits vertrauter mit der algebraischen Struktur sind, auch wenn es weniger häufig geäußert wird. Dies soll an zwei Episoden illustriert werden, in denen Katie beziehungsweise Sabine in der siebten beziehungsweise achten Stunde der Unterrichtseinheit Gleichungen lösen, bei denen auf jeder Seite der Gleichung mehrere Variablen- und Skalarausdrücke auftreten. Katie erklärt Ahmed, wie sie eine Gleichung zu bearbeiten hat, die die Lehrerin an die Tafel geschrieben hat:

$$3x + 4 - 7 + 5x + 10 = 10 - 4 + 6x + 3x - 2x + 3$$

Episode 6.10: 111219_3_LG7_43-45: Orientierung in der Situation bleibt wichtig

18 KTI: (*Ahmed schreibt, Katie lässt gerade ihren Finger sinken, nachdem sie sich gemeldet hatte, um auf die Frage der Lehrerin zu reagieren*) Wir wissen doch jetzt schon ne'
19 AMD: (*schreibt weiter*) Wissen wir'
20 KTI: Ja zusammrechnen das musst ich vorhin auch machen. (*Ahmed schreibt immer noch*) (..) (*zeigt mit dem Stift auf die Tafel, Ahmed schreibt weiterhin*) ,guck man muss einfach die Vari also zum Beispiel wenn (*verdreht den Oberkörper nach rechts*) ,minus zehn Streichhölzer steht ,müssen wir einfach (*tippt mit dem Stift auf die Federmappe vor ihr, dann auf einen Punkt etwas weiter rechts*) das von den andren Zahln abziehn- (.) ,warte mal ,Beispiel vier- Streichhölzer- (*Ahmed hat das Schreiben beendet, kramt an dem Block herum, Katie zeigt hektisch auf die Tafel*) ,guck mal es gibts dreizehn Streichhölzer insgesamt ne' (*bewegt den Stift, weiterhin nach vorne zeigend, leicht hin und her*) ,ohne- (.) Variabel weißt du' (*schaut Ahmed an, der kramt weiterhin an seinem Block herum*)
21 AMD: (*schaut kurz an die Tafel*) Ja-
22 KTI: (*zeigt weiterhin auf die Tafel*) Du ziehst davon vier ab. (*schaut Ahmed an, zeigt weiterhin auf die Tafel, senkt den Stift aber etwas*)
23 AMD: Warum vier' (*schaut an die Tafel, kratzt sich am Hinterkopf*)
24 KTI: (*zeigt weiterhin auf die Tafel*) Von dreizehn- ,das (*bewegt den Stift hin und her*)
25 AMD: Bei wo jenn'
26 KTI: (*zeigt weiterhin auf die Tafel*) Da jetzt rechts-
27 AMD: Oben-
28 KTI: Rechts oben ja- (*schaut Ahmed an, lässt den Stift halb sinken, hebt ihn dann wieder an*) (.) ,du (*Ahmed gähnt ausgiebig*) ,du ziehst jetzt vier ab von dreizehn dann bleiben noch neun übrig da hst du dann-
29 AMD: Warum zieht man vier ab'
30 KTI: (*zeigt jetzt mit dem Zeigefinger*) Da steht doch minus vier' (*schaut Ahmed an*) (...)

31 AMD: Aufa rechten Seite'
32 KTI: (*zeigt wieder mit dem Stift auf die Tafel*) Nee auf der rechten-
33 AMD: Ach so ja'
34 KTI: Ja dann hast (*gestikuliert mit dem Stift, der weiterhin grob auf die Tafel zeigt*) ,ziehst du d ä-h-m- vier ,minus vier ab von dreizehn' (*senkt den Stift auf den Tisch*) ,und dann bleiben ja noch neun übrig' (.) (*Ahmed nickt leicht, Katie zeigt wieder auf die Tafel*) ,und dann haste neun Streichhölzer und das selbe machst du jetzt (*kreist mit dem Stift in der Luft*) mit den - (.) Variabeln. (*lässt den Stift sinken, schaut Ahmed an*)
35 AMD: Variablen.
36 KTI: Ja (*gestikuliert wieder mit dem auf die Tafel gerichteten Stift*) ,also rechnest du einfach zusamm (*lässt den Stift wieder sinken*) weil da gar kein minus steht- ,nein doch- (*richtet den Stift wieder auf die Tafel*) ,verdammt warte. (*zeigt mit dem Stift kurz auf Ahmed, dann wieder auf die Tafel*) ,merk dir mal neun. (..) (*tippt sich mit dem Stift gegen die Stirn*) ,hä' (...) (*zeigt wieder auf die Tafel*) ,sieben- (..) ,sieben- (*lässt den Stift sinken, schaut Ahmed an*) ,wir haben neun- Streichhölzer und sieben- Variablen. (.)
37 AMD: Aufa rechten Seite'
38 KTI: (*gleichzeitig*) Ja.
39 AMD: (*zeigt auf die Tafel*) Aber was is mit der zehn am Anfang' (*fasst sich an den Hinterkopf*)
40 KTI: (*zeigt wie zuvor mit dem Stift an die Tafel*) Ja ich hab das doch zusammgerechnet mit dreiz mit der drei am Ende- (*schaut kurz Ahmed an, dann wieder nach vorne*) ,das sind dreizehn ,insgesamt. ,dann ziehst du jetzt minus vier ab-
41 AMD: J-a-h-okay- (*wendet sich kurz von Katie ab*)
42 KTI: Da bleiben neun übrig und (*zeigt mit dem Stift kreisend auf die Tafel*) dann rechnest du die Variable (unverständlich)
43 L: So ihr Lieben- ,wer is denn zu nem Ergebnis gekomm' (*Ahmed zeigt auf*) (..) ,oah das sind aber nich viele-
44 KTI: (*gleichzeitig*) Oah K (*zeigt mit der linken Hand auf die linke Seite der Tafel*) ,auf der Seite hab ich nichts (*zeigt mit dem Stift auf der rechten Seite noch etwas weiter nach links*) ,oah auf der Seite ham wir nix.
45 AMD: Es ist egal.
46 L: (unverständlich) ah ja doch-
47 KTI: Okay- (*reckt den rechten Arm nach oben*)
48 L: Sehr gut- (.) ,so ,was- (*Ahmed lässt seinen Arm sinken*) könn wir denn jetzt machen.
49 KTI: (*schüttelt den Arm in der Luft, reißt die Augen auf, reckt sich nach vorne*) Oh- (unverständlich) (*Herbert hebt seinen Arm wieder*)
50 L: Kelly-

Fachlich lässt sich konstatieren, dass Katie korrekt vorgeht (20-40). Dabei trennt sie die unterschiedlichen Objekte (Variablen und Skalare beziehungsweise Schachteln und Streichhölzer): „,guck mal es gibts dreizehn Streichhölzer insgesamt ne' (*bewegt den Stift, weiterhin nach vorne zeigend, leicht hin und her*) ,ohne- (.) Variabel weißt du'" (20). In ihren Beschreibungen lässt sich ein Bemühen erkennen, Ahmeds Aufmerksamkeit auf die jeweils von ihr als relevant angesehenen Objekte zu lenken. Dies geschieht durch Zeigen (fast durchgängig in den Zeilen 20-44), das Benennen von Orten an der Tafel (26, 28, 32, 40, 44) und die Verwendung von Begriffen, die die Objekte benennen (Variablen und Streichhölzer: 20, 34, 36, 42). Ahmed folgt den Zeigegesten (21, 23) und übernimmt die von Katie verwendeten sprachlichen Mittel zur Lokalisierung der Objekte, wenn auch nicht in gleichem Ausmaß (27, 31, 37, 39).

Indem Katie deutlich macht, auf welche Objekte sie sich zunächst bezieht – auf die „Streichhölzer“ (20-34) –, kann sie dann formulieren, dass man in Bezug auf die Variablen die gleichen Handlungen durchführt (34-36). Eine Unterstreichung der Wichtigkeit der Bezeichnungen lässt sich darin sehen, dass Ahmed Katie korrigiert, die „Variable“ zunächst falsch ausspricht (35).

Bei Sabine lässt sich ähnliches beobachten, als sie und Herbert sich mit den Gleichungen beschäftigen, die sie sich gegenseitig beim „Einpacken und Auspacken“ gestellt hatten (wobei es auf die konkreten Gleichungen hier nicht ankommt):

Episode 6.11: 111221_2_LG8_10-13: Orientierung in der Situation – ein weiteres Beispiel

3 SBN: (*beendet ihren Schreibprozess, haut auf die Hinterseite des Stiftes, lässt ihn auf den Tisch fallen*) FERTICH- (*legt die Hände auf den Tisch, schaut zu Herbert hinüber*)

4 HBT: (*schaut zu Sabines Unterlagen hinüber, nuschelt*) Willst mjetz verarschen’ (*öffnet seinen Tintenkiller und dreht sich wieder zu seinem Block*)

5 SBN: (*deutet mit der Hand auf das Blatt mit der Gleichung, an der Herbert gerade arbeitet*) Was machst du denn da-

6 HBT: (*hält mit dem Tintenkiller inne, schaut Sabine an, mit zusammengekniffenen Augenbrauen*) Rechnen. (*schaut sie noch kurz an, wendet sich dann wieder seinem Blatt zu*)

7 SBN: (*bewegt den Kopf ruckartig nach vorne*) Wieso’

8 HBT: (*dreht sich wieder zu Sabine, schaut sie wieder grimmig an*) RECHNEN.

9 SBN: (*mit vorgestrecktem Kopf und hoher Stimme*) Nur alles mit Plus und Minus rechnen.

10 HBT: (*schaut auf das Blatt*) MACH ICH DOCH. (*schaut wieder Sabine an*) MINUS. (.)

11 SBN: (*zieht den Kopf leicht zurück*) H-ä-

12 HBT: (*geht mit dem Stift von rechts nach links über eine Zeile auf seinem Blatt, schaut dabei auf das Blatt*) Minus- (*geht in der gleichen Weise über eine Zeile weiter unten, schaut dabei Sabine an*) ,minus- (*schaut weiterhin Sabine an, Sabine schaut auf Herberts Notizen*) (...)

13 SBN: (*zuckt zunächst mit dem Mund, beginnt dann zu Reden*) Du ä (*zeigt mit dem rechten Zeigefinger auf zwei verschiedene Stellen in der ersten Zeile in Herberts Rechnung*) ,rechne doch alles zusamm als erstes. (*legt ihre Hand vor sich auf den Tisch, dreht sie dann mit der Handfläche nach oben und bewegt sie etwas nach rechts*) ,x x zusamm und (*bewegt die Hand nocheinmal von links nach rechts*) dann Zahln zusamm.

14 HBT: (*teilweise gleichzeitig, legt den Kopf in den Nacken, verzieht das Gesicht, greift sich mit der linken Hand an die Nase*) Oah (unverständlich) Alter o-h- (*lässt die Hand*

wieder auf den Tisch fallen)
15 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) So würdest du das (*bewegt die Hand wedelnt nach links, als würde sie etwas zur Seite fegen*) doch alles viel leichter machen. ,weißt du' (*der Forscher macht ein Foto mit Blitz, in der Folge arbeiten die beiden Schüler getrennt weiter*)

Der erste Austausch zwischen Sabine und Herbert zeigt, wie sehr ihre Sicht auf die vorliegende Aufgabe sich unterscheidet: Herbert kann nicht fassen, dass Sabine sie so schnell gelöst hat (4), Sabine hingegen fragt sich, wieso Herbert so lange braucht (5). Sogar, *dass* Herbert rechnet, erscheint ihr merkwürdig – sie fragt, wieso er dies tut (7). Für sie ist das Lösen einer Gleichung kaum noch ein Rechnen, sondern ein einfach durchzuführender Prozess.

Inhaltlich ist in Sabines Beschreibung des vorgeschlagenen Vorgehens (13) vor allem interessant, wie sie die Teilterme benennt, die zusammengefasst werden müssen: „rechne doch alles zusamm als erstes. (*legt ihre Hand vor sich auf den Tisch, dreht sie dann mit der Handfläche nach oben und bewegt sie etwas nach rechts*) ,x x zusamm und (b*ewegt die Hand nocheinmal von links nach rechts*) dann Zahln zusamm." Offenbar scannt sie die Gleichung auf das Auftauchen der Variablen – sie sucht die Gleichung nach „x x" ab – und fasst die entsprechenden Teilterme zusammen, dann fasst sie die Teilterme zusammen, die nur aus Zahlen bestehen. Sie hat also einen Blick für die verschiedenen Objekte, die ihrer Art nach unterschiedlich behandelt werden müssen.

Die angenommene Ausrichtung auf ein Tätigkeitsmotiv kann diskussionsleitend werden, wie folgender Austausch zwischen der Lehrerin und Herbert zeigt. Herbert bittet um Hilfe, als er eine beim „Einpacken und Auspacken" von Sabine erhaltene Gleichung so weit umgeformt hat, dass er nur noch die Gleichung $7x = 0{,}5$ lösen muss.

Episode 6.12: Auszug aus 111221_2_LG8_26: „Ja und x- is was-"

34 HBT: (*dreht sich nach rechts, wo die Lehrerin sich außerhalb des Bildbereichs aufhält*) Frau Koh (*schließt kurz die Augen, schüttelt den Kopf, Kommentar: Herbert nennt zunächst den ähnlichen Namen einer anderen Lehrerin, hier auch pseudonymisiert*) ,äh Frau Kahn- (*die Lehrerin tritt aus Herberts Sicht von links an den Tisch heran, bleibt aber größtenteils außerhalb des Bildbereichs*) ,wie hat Sabine das denn nun gelöst- (*nimmt den Zettel mit der Aufgabe in die Hand, der zuvor vor ihm lag*)
35 L: (*setzt sich auf den freien Platz links von Herbert, greift nach dem Zettel*) Is das so richtich'
36 HBT: (*legt den Zettel in die Mitte des Tisches*) Ja- (*die Lehrerin nimmt den Zettel in beide Hände*) ,bloß sie hat ä-h- (*streckt seine rechte Hand auf Sabines Block aus, die Lehrerin lässt das Blatt mit der rechten Hand los, streicht sich damit durch die Haare, hebt das Blatt nach links hin an, Herbert nimmt den Stift vom Block*) ,da bei minus füm ,äh (*zeigt mit dem Stift auf eine Stelle auf dem Block*) anstatt glaub ich f-plus fünf gerechnet (*zieht den Stift zurück, hält ihn in der Nähe seines Gesichts*) hat sie gesagt. ,äh also sie hat (*zeigt nochmals kurz auf die gleiche Stelle wie zuvor*) da irgnwas falsch

gerechnet. (*die Lehrerin nimmt das Blatt wieder in beide Hände, schaut darauf*) ‚aber meins sollte dann so eigntlich richtich sein.
37 L: (*schaut weiterhin auf das Blatt, sinkt etwas zusammen*) M-h- (*nimmt die Schere in die rechte Hand, die auf Sabines Block liegt*)
38 HBT: Aber ich hab aus Versehn erst- (*zeigt mit dem Stift auf eine Stelle auf dem Blatt*) minus x gerechnet anstatt (*zeigt auf eine Stelle etwas weiter links*) erst die Streichhölzer aber- (*deutet mit dem Stift kurz unbestimmt auf das Blatt*) ‚is ja egal- (..)
39 L: (*schaut weiterhin auf das Blatt, schüttelt den Kopf*) Ja das is egal wie rum. (..) (*streicht mit der Schere von links nach rechts über eine Zeile auf dem Blatt*) ‚hier hast du denn hier richtich zusammgerechnet'
40 HBT: Ja. (*schaut auf das Blatt, legt nach kurzer Zeit die Schere zur Seite und nimmt das Blatt mit beiden Händen, Herbert dreht sich zu einer sehr lauten anderen Gruppe und dann wieder zur Lehrerin*) (6sec)
41 L: (*hält das Blatt mit der linken Hand in die Mitte zwischen sich und Herbert, zeigt mit der rechten Hand auf eine Stelle*) Ja und x- is was-
42 HBT: (*beugt sich vor, schaut auf das Blatt*) Sieben x. (*die Lehrerin bewegt die rechte Hand kurz in Herberts Richtung, lässt sie dann auf den Tisch sinken*)
43 L: Ja (*zeigt kurz auf eine Stelle auf dem Blatt*) wir wolln doch (*schaut Herbert an*) immer ein x ha-ben- ‚nich sieben. (..) (*legt das Blatt mit der rechten Hand vor Herbert auf den Tisch*) ‚hier.
44 HBT: (*folgt dem Blatt mit seinem Blick*) H-ä- (*greift nach dem Blatt und zieht es zu sich, schaut darauf*)
45 L: Wir wolln doch (*stützt ihr Kinn auf beide Arme auf*) wissen wieviel ein x is nich wieviel sieben x is. (.)
46 HBT: (*schnalzt, fährt mit dem Oberkörper zurück*) Ach ja- s-s (*übergibt den Stift von der rechten in die linke Hand*)
47 L: (*gleichzeitig*) Was is denn dein letzter Schritt immer-
48 HBT: Äh durch- ‚durch sieben.
49 L: Ja. (*nickt einmal*) ‚dann mach das mal.
50 HBT: (*führt den Stift in Richtung des Blattes, legt ihn dann aber links auf den Tisch, nimmt dann von rechts seinen Füller und nimmt die Kappe ab*) (.) W-ä ja. (*setzt seinen Stift an*) ‚obwohl ich (*macht eine kurze wegwerfende Handbewegung nach rechts*) hab ich das sogar (unverständlich) (*schreibt, die Lehrerin schaut zwischenzeitig vor sich auf den Tisch, ansonsten auf Herberts Schreibprozess*) (5sec) (*hebt den Stift leicht an, weicht mit dem Kopf zurück*) ‚hö' (.)

Im weiteren Verlauf stellt sich heraus, dass Sabine beim „Einpacken“ der Gleichung ein Fehler unterlaufen ist, der nun dazu führt, dass Herbert nicht auf die Lösung kommt, von der sie ursprünglich ausgegangen war; Herbert muss in der Folge noch einmal eine korrigierte Fassung lösen.

In dem Teil des Austauschs, in dem es um die Unvollständigkeit von Herberts Rechnung geht (41-49), hebt die Lehrerin insbesondere auf das Tätigkeitsmotiv ab, am Ende einen Wert für x zu erhalten (43, 45), wobei sie zweimal die Formulierung „wir wolln doch“ verwendet – sie impliziert also ein gemeinsames Interesse beim Lösen der Gleichungen. Dieses Ziel kontrastiert sie mit der Situation in Herberts Aufzeichnungen: „Wir wolln doch (*stützt ihr Kinn auf beide Arme auf*) wissen wieviel ein x is nich wieviel sieben x is. (.)“ (45) Daraus leitet sie die Frage nach der durchzuführenden Handlung her, die aber nicht in Bezug auf die Zielerfüllug gestellt ist (etwa: „Wie kommt man auf den Wert für x, wenn man den Wert für $7x$ kennt?“), sondern zielt auf das Nennen einer Routine ab, wenn sie fragt: „Was is denn dein letzter Schritt immer-“ (47) Darauf reagiert Herbert wie gewünscht, nennt dabei zuerst die grundsätzliche Art der Rechnung („durch“) und legt sich erst dann (vorläufig) darauf fest, dass durch 7 geteilt werden muss (48).

Routinisierung

Die folgende Episode stammt aus der dritten Unterrichtsstunde. Ahmed wird von mehreren Schülerinnen und Schülern angesprochen, letztlich befasst er sich allerdings nur mit dem Anliegen von Marie, die Aufgabe A von Aufgabenblatt 2 so weit gerechnet hat, dass sich auf der linken Seite zwei Schachteln und auf der rechten Seite ein Streichholz befindet.

Episode 6.13: 111209_3_LG3_14: Routinisierung bei Ahmed

36 RCO: (*sitzt auf seinem Platz links vorne von Ahmed, außerhalb des Bildbereichs*) Ahmed.
37 AMD: (*setzt sich gerade wieder hin*) Mh’
38 RCO: Äh soll- (*zeigt auf Aufgabe C auf Ahmeds Aufgabenblatt 2, Marie stellt sich links hinter Ahmed*)
39 SBN: (*weiter weg außerhalb des Bildbereichs*) Ah-med-
40 RCO: Kommt da jetzt null komma fünf raus oder was-
41 AMD: (*bläst seine Backen kurz auf, hebt beide Arme*) Boah Leute lasst mich mal alle in Ruhe (*dreht sich zu Marie*) außer Marie.
42 MRI: (*teilweise gleichzeitig, weicht einen Schritt zurück*) Du s ‚du sagst ich soll komm (*lacht*) oah Mann. (*beugt sich über den Tisch, legt den Taschenrechner ab*)
43 RCO: (unverständlich)
44 AMD: (*lässt die Hand auf das Aufgabenblatt sinken*) Also- (*wedelt mit der Hand über der linken Seite der Gleichung*) ‚hier s bleiben dann ja zwei St (*lässt die Hand auf das Aufgabenblatt sinken, zeigt dann auf die linke Seite der Gleichung, Marie hockt sich links neben Ahmed auf den Boden*) ‚äh zwei. Schachteln und (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) ein Streichholz über ne’
45 MRI: Ja.
46 AMD: Und da rechtest du (*macht mit dem Zeigefinger eine drehende Bewegung*) wie immer ‚eins geteilt durch zwei. (*gibt etwas in den Taschenrechner ein*)
47 MRI: Ja da sind ‚äh dann is (*steht auf*) ‚is das ja so dass ich dann den (*zeigt mit der rechten Hand auf die rechte Seite der Gleichung*) Streichholz teil- ‚und dann (*macht mit der rechten Hand eine Geste nach rechts, mehr ist im Bildbereich nicht erkennbar*) ein in ein tu und einen Teil tu dann ist das null komma fünf-
48 AMD: (*hat bisher weiterhin etwas in den Taschenrechner eingegeben, zieht jetzt die Hand zurück und macht mit der ausgestreckten Hand eine schnelle Geste in Maries*

Richtung) Ja. (*schaut zu Marie auf*) (.)
49 MRI: Kann ich den Streichholz teiln' (*lacht*)
50 AMD: (*guckt kurz nach vorne, dann wieder zu Marie, bewegt beide Hände auf und ab*) Ich glaub schon- (*legt die rechte Hand auf den Tisch, setzt mit der linken die Bewegung fort und zeigt so auf seinen Block*) ,weil das die einzige Lösung so- (*gestikuliert mit der linken Hand wie zuvor, nimmt mit der rechten den Taschenrechner, schüttelt ihn, Marie entfernt sich*) glaube ich. (*legt den Taschenrechner zwischen Mappe und Federmappe ab, schaut auf seine Unterlagen, bewegt dann beide Hände wie zuvor auf und ab, schaut dabei kurz Katie an, die sich daraufhin wieder ihrem Block zuwendet, schließlich wendet sich auch Ahmed wieder seinen Unterlagen zu*) (7sec)

In seiner Erklärung wendet Ahmed die Struktur in der bekannten Weise an. Er macht die Situation deutlich, von der er ausgeht, benennt dabei klar die relevanten Objekte und unterstützt dies durch eine Zeigegeste (44). Die Bekanntheit des Vorgehens unterstreicht er durch die Formulierung „wie immer“ (46), wobei er freilich durch diesen Einschub auch akzeptiert, dass man (insbesondere Marie) annehmen könnte, etwas sei anders als zuvor.

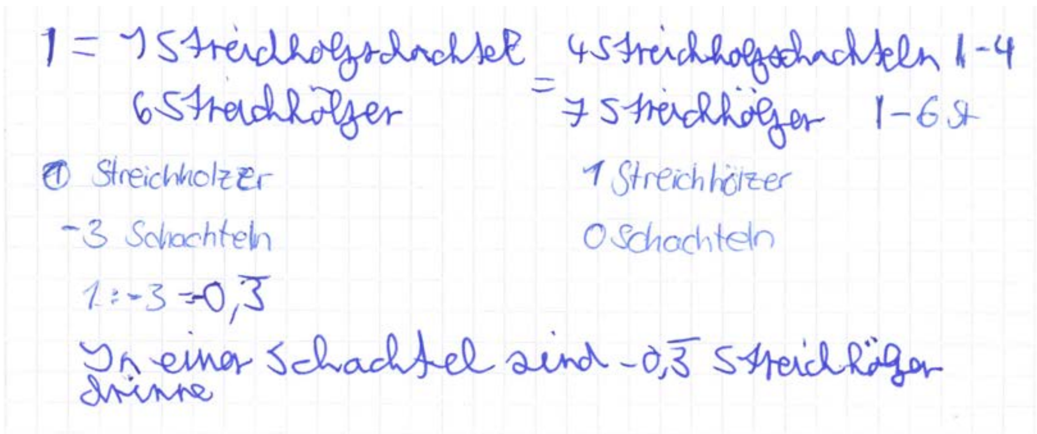


Abbildung 6.6.: Herberts Bearbeitung von Aufgabe I von Aufgabenblatt 2; die von Sabine geschriebenen Anteile haben eine dünnere Stiftdicke.

Bei Sabine zeigt sich die gleiche Routinisierung, als sie Herbert bei der Bearbeitung der Gleichung I von Aufgabenblatt 1 hilft (für die dabei entstehenden Aufzeichnungen siehe Abbildung 6.6):

Episode 6.14: 111212_2_LG4_81-83: Routinisierung bei Sabine

196 HBT: (*gähnt, beugt sich zu Sabine hinüber, schaut auf ihren Block*) Aber wieso is da ,wieso hast (unverständlich) so wie bei I raus- (*schaut wieder auf seinen Block, gähnt ausgiebig*)
197 SBN: (*schreibt weiterhin*) (.) (*dreht ihren Block um*) I'
198 HBT: Ja das find ich so komisch- ,null komma drei Periode ja toll-
199 SBN: (*greift erst nach Herberts Taschenrechner, dann suchend nach seinem Block*) Ja

ähm ,zeima- (.)
200 HBT: Ja ich hab (unverständlich) verrechnet- (*Sabine nimmt Herberts Block und legt ihn vor sich hin, Herbert folgt ihm mit seinem Blick*) ,das is jetzt da so ,was soll ichn jetzt rechnen da-
201 SBN: Streichhölzer-
202 HBT: (*gleichzeitig*) Eins minus vier oder was- (*Sabine schaut auf den Block, hält ihren Stift darüber*) (.) ,oder vier minus eins- (5sec)
203 SBN: Also (*zeigt auf die linke Seite einer Gleichung etwa in der Mitte der Seite*) das is auf einer Seite und (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) das is auf der zweiten ne'
204 HBT: Ja. (*leise*) ,das is auf der-
205 SBN: (*gleichzeitig, nickt einmal, leise*) Okay.
206 HBT: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Das auf der linken Seite (*zeigt erst auf die linke, dann auf die rechte Seite der Gleichung*) das auf der rechten.
207 SBN: (*bewegt den Stift über der rechten Seite der Gleichung*) Ja was is denn daran jetzt so schwer' (*beginnt am rechten Rand der Gleichung zu schreiben*)
208 HBT: Ja ich weiß nich wie ich das jetzt rechnen soll-
209 SBN: Minus sechs Streichhölzer' ,nimmst du (*zeigt mit dem Stift erst auf die linke Seite der Gleichung, dann auf das soeben Geschriebene*) erst minus sechs Streichhölzer. (*setzt den Stift in einer neuen Zeile an, schreibt aber zunächst nicht*) (..) ,dann hast du-
210 HBT: Und oben-
211 SBN: Ein-
212 HBT: Minus drei oder was-
213 SBN: (*macht eine wegwerfende Handbewegung zu Herbert*) Machen wir noch gar n-i-c-h- (*schreibt in der neuen Zeile*) (..)
214 HBT: Wo-wo-wo- (unverständlich) ,wieder minus sechs- Streichhölzer-
215 SBN: Ja. ,minus sechs. ,weil du nimmst (*geht mit dem Stift das soeben Geschriebene von rechts nach links und dann von links nach rechts entlang*) jetzt die ganzen Streichhölzer weg- (*schaut Herbert an, setzt dann den Stift wieder an und schreibt weiter*) (..)
216 HBT: Ja aber da hab ich nur ein übrich-
217 SBN: Ja- (*zeigt mit dem Stift auf die rechte Seite der Gleichung in der vorherigen Zeile*) ,auf der andren Seite- (*schaut Herbert an*)
218 HBT: Ja aber keine sechs-
219 SBN: (*hält ihre Hand mit der Handfläche nach oben*) Is doch egal- (.) Streichhölzer. (*schreibt weiter, Herbert beginnt mit Murat und Arnold Privatgespräche, in die nach kurzer Zeit auch Sabine einsteigt*)

Die Schülerinnen und Schüler führen Privatgespräche.

221 SBN: (*schaut wieder auf Herberts Block, der immer noch vor ihr liegt*) Also Herbert ,komm- (*streicht sich durch's Haar*) ,Herbert-
222 HBT: (*bringt seinen Stuhl aus einer Kippel- in die normale Position, schaut auf seinen Block*) Jo-

223 SBN: (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung, die sie nun vollständig aufgeschrieben hat*) Hier. ‚dann hast du hier ein Streichholz (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) hier null ne' (.)
224 HBT: J-a- ‚glaub ich.
225 SBN: (*gleichzeitig*) Jetzt nimmst du- (*hebt Herberts Block an und schaut auf ihren Block, der darunter liegt*) (...) (*legt Herberts Block wieder auf ihren*) minus vier- (*schreibt etwas am rechten Rand der Zeile, Herbert gähnt*) (...)
226 HBT: (*immer noch gähnend*) (unverständlich)
227 SBN: Weil die ganzen Schachteln müssen ja weg ‚weißt du'
228 HBT: (*neigt den Kopf nach rechts und schaut auf das soeben Geschriebene*) Jo wieso minus vier-
229 SBN: Weil die (*geht mit dem Stift mehrfach die rechte Seite der Gleichung entlang*) g-a-n-zen Schachteln müssen weg hier- (*setzt die Geste noch kurz fort*) (.)
230 HBT: (*nuschelt*) Ah habe ich minus (*nickt einmal*) drei aber nich minus (*nickt einmal*) vier.
231 SBN: (*zeigt auf eine Stelle auf der rechten Seite der Gleichung*) Minus vier.
232 HBT: (*schüttelt den Kopf*) Minus drei.
233 SBN: (*zeigt auf eine Stelle etwas weiter links*) Das sind doch vier.
234 HBT: (*zeigt auf eine Stelle noch etwas weiter links, eventuell auf der linken Seite der Gleichung*) Und da is ja noch eine da drauf.
235 SBN: (*zeigt mit dem Stift auf die Stelle, auf die Herbert gezeigt hat*) Aber das is egal. (*schaut Herbert an, dann wieder auf das Blatt*) (.)
236 HBT: J-o-o-o-o-o-
237 SBN: (*gleichzeitig, zeigt tippend wieder auf eine Stelle weiter rechts in der Gleichung*) Die ganzen Schachteln müssen weg. ‚wenn du (*zeigt auf das Geschriebene am Ende der Zeile*) minus vier (*zeigt wieder auf die gleiche Stelle wie vorher*) weil ja (unverständlich)- (*greift nach dem Taschenrechner und beginnt etwas einzugeben*) ‚eins minus vier hast du- minus drei. (*zeigt kurz auf das Display*)
238 HBT: Ja sag ich doch.
239 SBN: Ja aber jetzt kommt hier- (*setzt in einer neuen Zeile an und beginnt zu schreiben, Herbert schaut mit nach rechts geneigtem Kopf zu*) ‚dhast auf der ein- minu-s-s drei- (.) Schachteln- (*schreibt weiter*) ‚auf der andren null. ‚ne'
240 HBT: Jo. (*Sabine schreibt weiterhin*) (..)
241 SBN: (*zieht den Stift zurück, richtet sich auf*) Und was daran jetzt so schwer'
242 HBT: Ja.
243 SBN: Jetzt rechnest du eins- (*schreibt in einer neuen Zeile*)
244 HBT: (*gleichzeitig, schüttelt den Kopf*) Also-
245 SBN: Geteilt d-durch minus drei (*Herbert nimmt den Taschenrechner und gibt etwas ein*) ‚rechne mal' (*Herbert gibt etwas in den Taschenrechner ein, murmelt dabei etwas unverständliches*) (...)
246 HBT: (*zieht seine Hand zurück*) J-o- (*Sabine greift nach dem Taschenrechner, dreht ihn zu sich, Herbert dreht ihn wieder zurück*) ‚ä-h- (*tippt etwas in den Taschenrechner*) ‚eins geteilt durch minus drei. ‚so. (*zieht seine Hand zurück, Sabine schaut auf den*

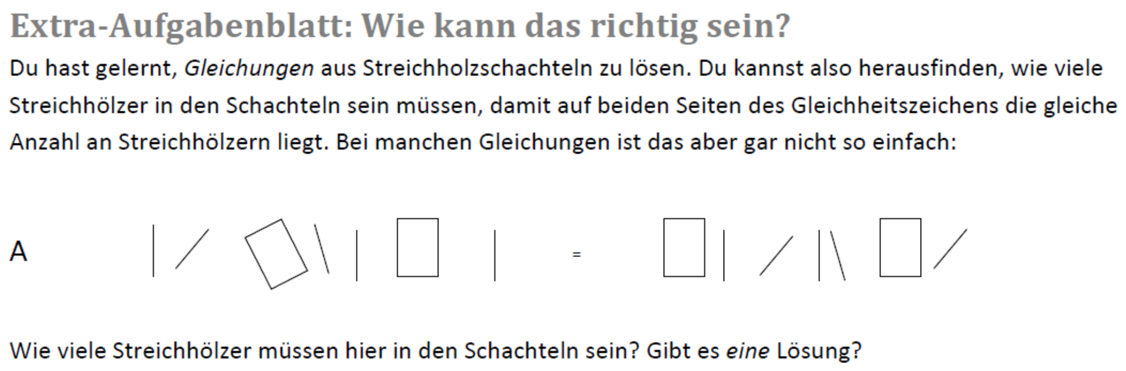
> *Taschenrechner, greift nach ihrem eigenen Taschenrechner, Herbert drückt eine Taste auf dem Taschenrechner und lacht*) (..) (*beide Schüler arbeiten mit ihren jeweiligen Taschenrechnern*) ,oder drei geteilt durch-
> 247 SBN: Eins-
> 248 HBT: Minus eins- (*zieht seine Hand zurück, drückt dann noch einmal zwei Tasten*)
> 249 SBN: Eins (*tippt etwas in ihren Taschenrechner, Herbert schaut dabei zu*) geteilt du-rch minus drei gleich- (*nimmt den Stift und zeigt damit auf das Display*) minus drei. (*hebt zunächst den Taschenrechner, dann Herberts Block an und schaut auf ihren Block*) (.) ,hab ich das nich'
> 250 HBT: (*zieht seinen Block unter Sabines Taschenrechner weg*) E-y-

Als Ausgangspunkt ihrer Erläuterungen verschafft sich Sabine zunächst anhand von Herberts Notizen einen Überblick über die Lage: „Also (*zeigt auf die linke Seite einer Gleichung etwa in der Mitte der Seite*) das is auf einer Seite und (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) das is auf der zweiten ne'" (203, siehe auch 206) Dann besteht sie auf der Einhaltung einer Reihenfolge, die sie vorgibt (213, vgl. auch 225: „Jetzt"). Zwar spräche eigentlich nichts dagegen, zuerst die Streichholzschachteln zu behandeln, es ist aber gerade im gemeinsamen Arbeiten wichtig zu klären, mit den Rechenoperationen nicht durcheinanderzukommen.

Sowohl beim Wegnehmen der Streichhölzer als auch beim Wegnehmen der Schachteln nennt Sabine von sich aus den Grund, warum sie genau diese Rechenoperation ausführt: „,weil du nimmst (*geht mit dem Stift das soeben Geschriebene von rechts nach links und dann von links nach rechts entlang*) jetzt die ganzen Streichhölzer weg-" (215); „Weil die ganzen Schachteln müssen ja weg ,weißt du'" (227), und mit noch stärkerer Betonung, dass alle Schachteln auf der rechten Seite weggenommen werden müssen: „Weil die (*geht mit dem Stift mehrfach die rechte Seite der Gleichung entlang*) g-a-n-zen Schachteln müssen weg hier- (*setzt die Geste noch kurz fort*)" (229). Eine nochmalige Begründung findet sich in Zeile 237. Sabine ist damit präziser als die Lehrerin, weil sie angibt, dass auf der jeweiligen Seite eben *alle* Objekte dieser Art entfernt werden müssen. Schließlich legt Sabine großen Wert darauf, die neue Situation ordentlich aufzuschreiben (239), auch dies kann als ein Ausdruck eines gut ausgebildeten Struktursinns gesehen werden.

Der von Herbert aufgeschriebene Antwortsatz (siehe Abbildung 6.6 auf Seite 210) irritiert freilich. Eigentlich war erwartet worden, dass die Schülerinnen und Schüler hier – gegebenenfalls mit Hilfe durch bereitgestellte Zahlenkarten – zu dem Schluss kommen, dass eine Lösung dieser und vergleichbarer Gleichungen nur noch denkbar sind, wenn man von Zahlen statt von Anzahlen konkreter Objekte ausgeht. Stattdessen nehmen sowohl Sabine als auch Herbert hier unreflektiert an, dass $-0{,}3$ Streichhölzer eine legitime Lösung sei.

Dies deutet bereits darauf hin, dass die Routinisierung im Umgang mit Streichholzschachtelgleichungen auch dazu führen kann, dass Neues nicht als solches wahrgenommen, sondern dem gerade verfolgten Schema untergeordnet wird. Ein Beispiel dafür zeigt sich bereits in der zweiten Unterrichtsstunde zu linearen Gleichungen, als Sabine Ahmed auf die Zusatzaufgabe anspricht, bei der eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen bearbeitet werden soll (siehe Abbildung 6.7).



Extra-Aufgabenblatt: Wie kann das richtig sein?

Du hast gelernt, *Gleichungen* aus Streichholzschachteln zu lösen. Du kannst also herausfinden, wie viele Streichhölzer in den Schachteln sein müssen, damit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl an Streichhölzern liegt. Bei manchen Gleichungen ist das aber gar nicht so einfach:

A

Wie viele Streichhölzer müssen hier in den Schachteln sein? Gibt es *eine* Lösung?

Abbildung 6.7.: Zusatzaufgabe, bei der eine Streichholzschachtelgleichung mit unendlich vielen Lösungen auftritt

Episode 6.15: 111206_3_LG2_24: „wie immer so“

30 SBN: (*steht vor Ahmeds Tisch, aber außerhalb des Bildbereichs, jammernd*) Ich weiß nich wie das g-e-h-t-

31 AMD: Da ‚wie immer so ‚alles (*macht mit der rechten Hand eine Bewegung nach rechts*) wegtun ‚und dann null geteilt durch null sind null. (*Sabine legt ein Blatt auf Ahmeds Mappe, haut mit der flachen Hand darauf*) (.) (*schaut auf das Blatt, zuckt leicht mit den Schultern*) ‚ja.

32 SBN: Ich weiß nich ob da (*haut bei der Nennung der Zahlen jeweils mit dem Handrücken auf das Blatt, beim zweiten Mal weiter links, von Ahmed aus gesehen*) fünf oder zwei reinmüssen-

33 AMD: (*zieht das Blatt etwas zu sich*) N-u-ll- (*schaut kurz zu Sabine auf, dann wieder auf das Blatt*)

34 SBN: (*mit hoher Stimme*) Was für Nulln’

35 AMD: (*zeigt mit dem Stift von rechts nach links auf verschiedene Stellen auf dem Blatt*) Hier komm null rein (*schaut zu Sabine auf*) ‚in den Schachteln- (*hebt den Stift an*)

36 SBN: Wieso null’

37 AMD: (*stützt sich auf den linken Arm auf, zeigt mit dem Stift von links nach rechts auf verschiedene Stellen auf dem Blatt*) Weil du doch eins zwei drei vier fünf- (*bewegt die linke Hand kurz nach vorne*) (.) Striche hast hier auch (*setzt die Bewegung fort, indem er weiter rechts auf weitere Stellen zeigt*) eins zwei drei vier fünf (*setzt die Zeigebewegungen noch fort, sein Mund bleibt geöffnet*)

38 SBN: Aber ich muss trotzdem (*zeigt mit der offenen Hand kurz auf das Blatt, Ahmed zieht seine Hand zurück*) herausfinden wieviel in einer Schachtel sind- (*stemmt sich die Hand in die Hüfte*)

39 AMD: (*schaut kurz zu Sabine auf, dann wieder auf das Blatt, kratzt sich an der Wange*) Ja- ‚du kannst alles- (*macht mit beiden Händen eine wischende Bewegung über dem*

> *Tisch von sich weg*) wegtun das heißt du rechnest dann (*setzt den linken Ellbogen auf dem Tisch auf, formt mit der Hand eine offene Zange*) null geteilt durch (*der linke Arm bleibt unverändert, der rechte Arm wird in gleicher Weise auf dem Tisch aufgesetzt*) null. (*gestikuliert rhythmisch mit beiden Armen, die aber mit den Ellbogen auf dem Tisch bleiben, Sabine zieht das Blatt schnell von Ahmeds Tisch weg, entfernt sich, Ahmed schaut ihr noch redend nach*) ‚und null geteilt durch null sind null- (*schaut Sabine hinterher, die linke Hand als Fläche vor seinem Gesicht*)

Ahmeds erste Antwort verrät ein starkes Vertrauen in die Anwendbarkeit der Struktur: „‚wie immer so ‚alles (*macht mit der rechten Hand eine Bewegung nach rechts*) wegtun ‚und dann null geteilt durch null sind null.“ (31) Es erscheint ihm gar nicht notwendig zuzuhören, was Sabines Problem ist, zur deren Formulierung sie in Zeile 32 ansetzt. Aus Ahmeds Sicht ist der gelernte Ansatz immer anwendbar. Sein Schulterzucken am Ende kann zusammen mit der abschließenden Bestätigung so gedeutet werden, dass es in seinen Augen nichts mehr zu sagen gibt. Dementsprechend wiederholt er auch nach Sabines mehrfacher skeptischer Reaktion immer wieder sein Ergebnis (33, 35) und die Beschreibung seines Vorgehens (37, 39).

Hier ist es freilich so, dass Ahmed einfach davon ausgeht, dass die Gleichung, die Sabine lösen möchte, genau der Situation entspricht, für die sein Verfahren sich bislang bewährt hat. Das eigentliche Problem ist hier, dass bei der abschließenden Division, wenn sie als bloßes Verrechnen der beiden Seiten ausgeführt wird, nicht deutlich ist, welchem Ziel diese Handlung dient. Wäre Ahmed dies klar, würde er Sabines Problem wahrnehmen: Aus der Aussage, dass 0 Streichholzschachteln 0 Streichhölzer enthalten, lässt sich keine sichere Aussage über den Inhalt einer Streichholzschachtel ableiten. Hier gäbe es eine Möglichkeit zu einer Erweiterung der Sicht auf die Struktur. Im Folgenden sollen Fälle betrachtet werden, in denen eine solche Erweiterung realisiert wurde.

Bestehender Struktursinn als Basis von Weiterentwicklungen

Ein Beispiel ist die Anwendung des erarbeiteten Umgangs auf solche Gleichungen, bei denen sich eine negative Lösung ergibt. In der dargestellten Episode geht es um die bereits weiter oben besprochene Aufgabe C vom zweiten Aufgabenblatt, bei der Ahmeds bisheriges Vorgehen an Grenzen stößt (vgl. Abbildung 5.32 auf Seite 166). Die Lehrerin ist zunächst einmal darum bemüht, mit Katie, Ahmed und Marie die Situation zu klären, wobei sie darauf besteht, dass zunächst einmal nur Streichhölzer weggenommen werden sollen (diese Episode geht zeitlich unmittelbar der bereits auf Seite 195 diskutierten Episode 111209_3_LG3_32_2 voran):

Episode 6.16: 111209_3_LG3_32_1: Hineinfinden in die Situation

Die Lehrerin steht links hinter Ahmed, Marie sitzt auf Katies Platz, Katie steht links neben Ahmeds Platz.

62 L: (*wendet sich wieder dem Tisch zu, nachdem sie zuvor noch mit einem anderen*

Schüler geredet hatte, schaut auf Ahmeds Unterlagen) So also hast du'
63 AMD: (*er und die beiden anderen Schülerinnen schauen ebenfalls auf seine Aufzeichnungen*) Ja-
64 L: Was bleibt da noch über'
65 AMD: (*nimmt seinen Stift in die Hand und bewegt ihn über dem Block*) Äh soll ich das aufschreibn'
66 L: Ja schreib mal auf.
67 MRI: (*setzt ihren Stift an, Ahmed beginnt zu schreiben*) Ham wir jetzt auch ein ä-h- (*schaut nach links zu Ahmed*)
68 L: (*Marie schaut zu ihr auf*) Nee ihr habt jetzt erstmal nur drei Streichhölzer weggenomm ne' (*schaut über Ahmeds Kopf hinweg in Maries Aufzeichnungen, Marie beginnt zu schreiben*) (.) ,sonst nichts.
69 KTI: (*legt ihren Finger auf eine Stelle oben auf dem zweiten Aufgabenblatt*) (..) Also die hier oder wie oder von der (unverständlich) (*zeigt auf eine Stelle weiter rechts*)
70 L: Drei Streichhölzer
71 KTI: (*gleichzeitig dazwischen, zieht ihre Hand zurück*) Achso.
72 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter, zeigt auf die linke Seite der angezeigten Gleichung*) Diese drei ,habt ihr weggenomm. (*zieht ihre Hand zurück, kratzt sich am Kopf*)
73 KTI: Ja.
74 AMD: (*kratzt sich an der Nase, schaut zur Lehrerin auf*) Und auf beiden Seiten. (*bewegt den linken Zeigefinger horizontal hin und her*)
75 KTI: (*zeigt wieder auf die Stelle weiter rechts, schaut die Lehrerin an*) Und auf der andren Seite auch.
76 L: (*teilweise gleichzeitig, gestikuliert kurz mit erhobenen Zeigefinger, hält dann die Hände hinter dem Körper*) Genau auf beiden Seiten ,ja. ,dann habt ihr noch (*beugt sich leicht nach vorne und schaut auf Ahmeds Block, Katie beugt sich ebenfalls nach vorne*) was- ,also keine Streichhölzer (*Katie zeigt wieder auf die rechte Seite der Gleichung auf dem Aufgabenblatt*) eine Schachtel' (.) ,und zehn Streichhölzer (*stellt sich wieder aufrecht hin, Katie zeigt weiterhin auf das Aufgabenblatt, Marie ist fertig mit Schreiben und schaut in Richtung von Ahmeds Unterlagen*) auf der andern Seite (*Katie zieht ihren Finger zurück*) und-
77 KTI: (*schaut die Lehrerin an*) Zwei Schachteln.
78 AMD: (*teilweise gleichzeitig*) Nein hier (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung in seinem Block*) ,hier auch keine- Schachteln mehr ,hier keine Schachtel.
79 KTI: (*zeigt mit den Karten, die sie in der Hand hält, auf Ahmeds Block*) Hier sind gar keine Schachteln mehr.
80 L: (*beugt sich nach vorne, nimmt Ahmed den Stift aus der Hand*) Hallo wir ham doch jetzt erstmal nur die Streichhölzer weggenomm (*zeigt auf die linke Seite*) oder nich-
81 AMD:(*gleichzeitig*) Ahso.
82 KTI: Achso'
83 AMD: (*nimmt den Stift wieder von der Lehrerin und schreibt*) Ja das s dann-
84 KTI: (deutet kurz in Richtung von Ahmeds Block) Ne eins.
85 L: Das andre noch nich. ,ersmal nur die drei Streichhölzer weggenomm.

86 KTI: Dann bleibt nur eine- Schachtel übrig oder wie- (*schaut kurz zur Lehrerin, zeigt dann auf die linke Seite der Gleichung auf dem Aufgabenblatt, Ahmed schreibt noch*) (.) ,auf der Seite-
87 L: (*ohne die Zähne auseinanderzubewegen*) Warte doch m-a-l-
88 KTI: M-h' (*wedelt mit der Karte umher*) (..)

Zu Beginn weist die Lehrerin durch direkte Ansprache Ahmed die Verantwortung dafür zu, die aktuelle Lage zu beschreiben (63-65) und fordert dann eine Verschriftlichung (67), die auch in der Folge ihr primäres Ziel bleibt. Als sie jedoch merkt, dass die Schülerinnen und Schüler von anderen Voraussetzungen ausgehen als sie selbst, nimmt sie stärker als bisher Einfluss, indem sie entscheidet, dass zunächst nur Streichhölzer weggenommen werden sollen (69). Grundsätzlich ist aber der Tätigkeitskontext den Beteiligten klar. Die Lehrerin einerseits und die Schülerinnen und Schüler andererseits reden von den gleichen Objekten (Seiten der Gleichung, Schachteln und Streichhölzer als Gruppierungsebene, 69-74) und machen das zugrundeliegende Motiv klar (auf beiden Seiten gleich viel wegnehmen, 75-77). Das bedeutet auch, dass die zugrundeliegende Struktur (erneut) gesehen wird.

Nachdem die Lehrerin in der Folge das Wegnehmen der Streichhölzer und der Schachteln in zwei Handlungen aufteilt – Ahmeds Notation hatte beides als eine Handlung dargestellt – und so das „Wegnehmen ins Negative“ legitimiert, wird relativ rasch die abschließende Division durchgeführt. Hier kommen nun Fragen auf:

Episode 6.17: 111209_3_LG3_32_4: Probleme mit der Rechnung/dem Ergebnis

149 PL: (*gestikuliert heftig mit dem rechten Arm*) Also in einer Schachtel sind minus fünf Streichhölzer.
150 MRI: (*gleichzeitig*) J-a ,aber auf jede (*zeigt mit dem Stift abwechselnd auf die beiden Seiten der Gleichung*) auf beiden Seiten soll ja immer das Gleiche rau (*kratzt sich am Auge*) ,also-
151 L: (*schaut Marie an*) Is ja auch.
152 PL: (*gleichzeitig, macht einen Schritt zurück, breitet die Arme aus*) Hä also sind da keine drinne. ,wie kann in einer Schachtel Strei- (*dreht sich zu Seite weg*)
153 L: (*teilweise gleichzeitig, schaut Marie an, legt ihre Hand mit ausgespreizten Fingern erst auf die vorletzte, dann auf die letzte Zeile*) Wenn ich auf beiden Seiten immer das gleiche wegnehme dann bleibt das ja gleich.
154 MRI: Ja.
155 AMD: Aber man kann doch-
156 L: (*teilweise gleichzeitig, wackelt etwas mit der Hand, weiterhin über der letzten Gleichung*) Kann sich das ja nich verändern. (*schaut über Ahmeds Kopf hinweg Marie an*)
157 AMD: Man kann das (*die Lehrerin hält weiterhin ihre Hand auf der gleichen Stelle, schaut jetzt aber Ahmed an*) ja doch auch bei den Schachteln machen (*zeigt auf die vorletzte Zeile, nicht genauer erkennbar, die Lehrerin zieht ihre Hand zurück*) dass man hier einfach mehr wegnimmt und dann (*nimmt den Stift in die Hand und zeigt auf*

eine andere Stelle weiter links) auch hier minus Schachteln hat.
158 L: Ja das geht auch.
159 AMD: Äh minus Streichhölzer mein ich.
160 L: Du kannst das (*macht vor Ahmeds Gesicht eine drehende Handbewegung*) auch andersrum machen (*zeigt auf die vorletzte oder vorvorletzte Zeile, Paul entfernt sich vom Tisch*) ,du kannst auch dreizehn Streichhölzer wegnehm- (*bewegt die Hand etwas nach links*) ,und eine Schachtel-
161 AMD: Ah okay-
162 L: Das geht auch. ,das is egal wie rum du das machst. (..)
163 AMD: (*schaut auf seinen Block, Marie schaut mit dem Stift in der Hand auf ihren Block*) Mh okay.
164 L: (*schaut zu Marie*) Kannst du Marie das nochmal erklären'
165 AMD: (*nickt*) Glaub schon. (*die Lehrerin geht weg, Ahmed rückt auf seinem Stuhl nach vorne*) (..)

Pauls Deutung des negativen Ergebnisses (152) macht deutlich, wie hier eine Erweiterung der Struktur gefordert ist: Von den Schülerinnen und Schülern wird erwartet, dass sie sich vom Kontext lösen und nicht mehr in Anzahlen von Objekten denken. Wenn dies nicht gelingt, kommt es zu Problemen, wie Paul sie hier hat. Bei anderen Schülern tritt diese Problematik aber nicht auf. Es scheint Schülerinnen und Schüler zu geben, die eine negative Lösung eher akzeptieren. Die Gründe dafür können vielfältig sein. So kann es ein blindes Vertrauen in Rechentechniken sein oder in die verstandene Struktur, oder es hilft, auch im Kontext eine Erweiterung vorzunehmen, wie es durch die Zettelchen geschieht, die auch mit negativen Zahlen beschriftet werden dürfen.

Bei Ahmed äußert sich ein recht weit gehendes Verständnis für die Struktur: Er hat verstanden, dass die Umformungen (zumindest die additiven) in ihrer Reihenfolge beliebig sind (155-161).

Abbildung 6.8.: Aufgabe A von Aufgabenblatt 2

Es lässt sich die allgemeinere Aussage machen, dass im Struktursehen stets eine *allgemeine Sicht* auf eine *spezifische, konkrete Situation* eingenommen wird. Dabei wird Wissen aktualisiert – in beiden Bedeutungen. Die Differenz zwischen dem Ausarbeiten des Wissens über eine bereits bekannte Struktur und dem Sehen einer neuen Struktur als Objectification ist fließend, weil die Anwendung der Struktur in *jeder* Situation etwas Neues, eine Fremdheit enthält. So reagiert Ahmed auf die Gleichungen auf Aufgabenblatt 2 (konkret wahrscheinlich auf Aufgabe A, siehe Abbildung 6.8) folgendermaßen:

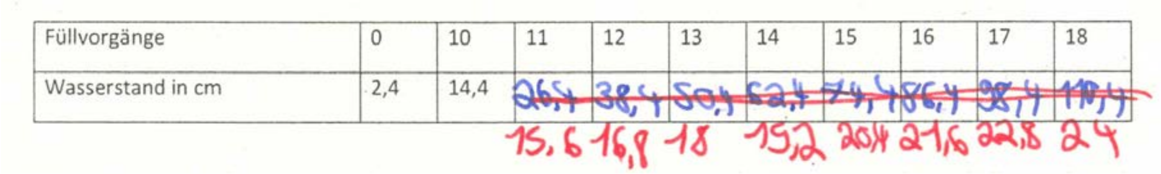
Episode 6.18: 111209_3_LG3_10: „da sind plötzlich mehr Schachteln über-“

6 AMD: (*dreht sich zur Mitte des Klassenraums, von Katie weg*) Hä voll komisch-
7 HBT: Was.
8 AMD: (*schaut kurz auf sein Aufgabenblatt, dann wieder nach links*) Der zweite Aufgabenzettel- ‚da sind plötzlich mehr Schachteln über- (*Ahmed schaut in Richtung des Lehrerpults, auch Katie schaut jetzt auf*) (.) au'
9 L: Das is ja komisch ne'
10 AMD: (*zeigt mit den Handflächen nach vorne*) Null komma fünf. (.) (*wedelt mit der rechten Hand*) Streichhölzer sind dann da drin. (*wedelt weiter mit der Hand*)
11 HBT: Ein halber.
12 AMD: (*wedelt immer noch, schaut zu Herbert*) Ja. (*zieht leicht die Schultern hoch*) (..) ‚ergibt Sinn.
13 SX1: N halbes.
14 AMD: Ja- (*hebt die Hände, Handflächen nach vorne, zieht die Schultern hoch*) (..)
15 L: (*an einem anderen Tisch, Ahmed wendet sich wieder seinen Unterlagen zu*) So- ‚das ham wir ne' (..)
16 AMD: (*streicht sich durch die Haare*) Ich glaub schon. (*schaut wieder auf seinen Block, keine Anhaltspunkte, ob er die Lehrerin oder den Mitschüler meint*)

Ahmed nimmt hier einerseits die strukturelle Gleichheit der Aufgabe wahr, indem er das bekannte Verfahren anwendet (10), andererseits aber auch eine Abweichung, die darin besteht, dass nun auch nicht-ganzzahlige Lösungen auftreten, weil mehr Schachteln als Streichhölzer vorliegen (8). Dass er sich so deutlich und für alle hörbar äußert (6) kann einerseits darauf zurückgeführt werden, dass er sehr überrascht ist, andererseits ist dies auch eine Aufforderung an die Lehrerin und seine Mitschülerinnen und Mitschüler, ihm eine Rückmeldung zu diesem Ergebnis zu geben – diese Wirkung entfaltet die Äußerung jedenfalls perlokutionär. Ahmeds Schlussäußerung (12) lässt sich so deuten, dass er die Erweiterung der Struktur akzeptiert, „schulterzuckend“, weil es „Sinn ergibt“. Es wird nicht deutlich, wie genau der Sinn gestiftet wird (denkbar wäre, dass er im Kopf die Probe rechnet). Es bleibt aber festzuhalten, dass er offenbar den Anspruch hat, dass das Anwenden einer Struktur Sinn ergibt. Absolute Sicherheit gibt aber auch dieses Kriterium nicht – auch nach dieser Feststellung kann Ahmed nur sagen, er glaube, dass er die Aufgabe richtig bearbeitet habe (16).

Routinisierung und Weiterentwicklung in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

Wenn die bis hierhin gemachten Aussagen über Routinisierung im Umgang mit der algebraischen Struktur auf lineare Funktionen angewendet werden sollen, muss bedacht werden, dass es dort zunächst nicht so sehr um das Finden von zunächst unbekannten Lösungen geht, sondern um die Berechnung von Werten, die Bestimmung der Parameter des Funktionsterms oder das Zeichnen eines Graphen aus vorgegebenen Daten. Die Analogie besteht aber darin, dass auch hier sich eine Fokussierung auf die strukturellen Merkmale



Füllvorgänge	0	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Wasserstand in cm	2,4	14,4	~~26,4~~ 15,6	~~38,4~~ 16,8	~~50,4~~ 18	~~62,4~~ 19,2	~~74,4~~ 20,4	~~86,4~~ 21,6	~~98,4~~ 22,8	~~110,4~~ 24

Abbildung 6.9.: Herberts Bearbeitung von Aufgabe 1c) auf dem Übungsblatt in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen: Zuerst nimmt er die Differenz zwischen den beiden vorgegebenen Werten als Schrittweite an.

entwickelt, namentlich auf den jeweiligen Anfangswert und die Veränderung in jedem Schritt (beziehungsweise später die Steigung).

Und auch hier kann dies dazu führen, dass Neues nicht sofort erkannt wird. Abbildung 6.9 auf Seite 220 zeigt die Bearbeitung einer Übungsaufgabe durch Herbert, die ausgegeben wurde, als die Schülerinnen und Schüler schon eine ganze Reihe von Wertetabellen ähnlicher Art behandelt hatten. Dabei waren aber fast immer unmittelbar aufeinander folgende Werte angegeben gewesen, anhand derer die Veränderung pro Schritt direkt abgelesen werden konnte. Genau dies tut Herbert auch hier – er berechnet die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Eintrag der Wertetabelle (12) und nimmt an, dass dieser Wert in jedem weiteren Schritt hinzuzufügen ist.

Man sieht, dass Herbert die Werte letztlich korrigiert. Er hat damit etwas wichtiges gelernt, seine Sicht auf die Struktur erweitert: Es spielt eine entscheidende Rolle, dass die Veränderung in Abhängigkeit von einer anderen Veränderung stattfindet. In diesem Fall nimmt der Wasserstand um 12 Zentimeter *in 10 Füllvorgängen* zu, oder eben um 1,2 Zentimeter *mit jedem einzelnen Füllvorgang*.

Eine andere Erweiterung, die in der Tätigkeit mit der algebraischen Struktur linearer Funktionen bewältigt werden muss, besteht in der Erschließung neuer Möglichkeiten der Darstellung; und in jeder Darstellungsform müssen die strukturellen Merkmale Anfangswert und Veränderung wiedererkannt werden. Eine Besonderheit der Lernprozesse zu linearen Funktionen, die bei linearen Gleichungen so nicht beobachtet werden konnte, besteht darin, dass hier die neue Struktur in einem Gebiet angewendet werden muss, zu dem die Schülerinnen und Schüler schon Vorstellungen haben, nämlich von den bereits zuvor im Unterricht behandelten proportionalen Funktionen her. Die Graphen dieser Funktionen gehen stets durch den Ursprung. Ahmed scheint dies auch bei den nun vorliegenden linearen Funktionen erzwingen zu wollen und beschriftet kurzerhand die Achsen so, dass das erste Wertepaar (0; 2,5) im Schnittpunkt der beiden Achsen liegt (siehe Abbildung 6.10).

6.1.3. Festhalten algebraischen Struktursinns

Kontexte als mentale Anker

Der Kontext, in dem das Tätigkeitsmotiv entdeckt wurde, bleibt für die Schülerinnen und Schüler ein mentaler Anker, anhand dessen sich erlernte Strukturen abrufen lassen. So referenziert Ahmed sein Wissen über Gleichungen in Episode 120109_3_LG10_15,18 (siehe Seite 190) folgendermaßen: „Wie ging denn das noch. (*nimmt die Mappe zu sich*) (..) ‚mit den

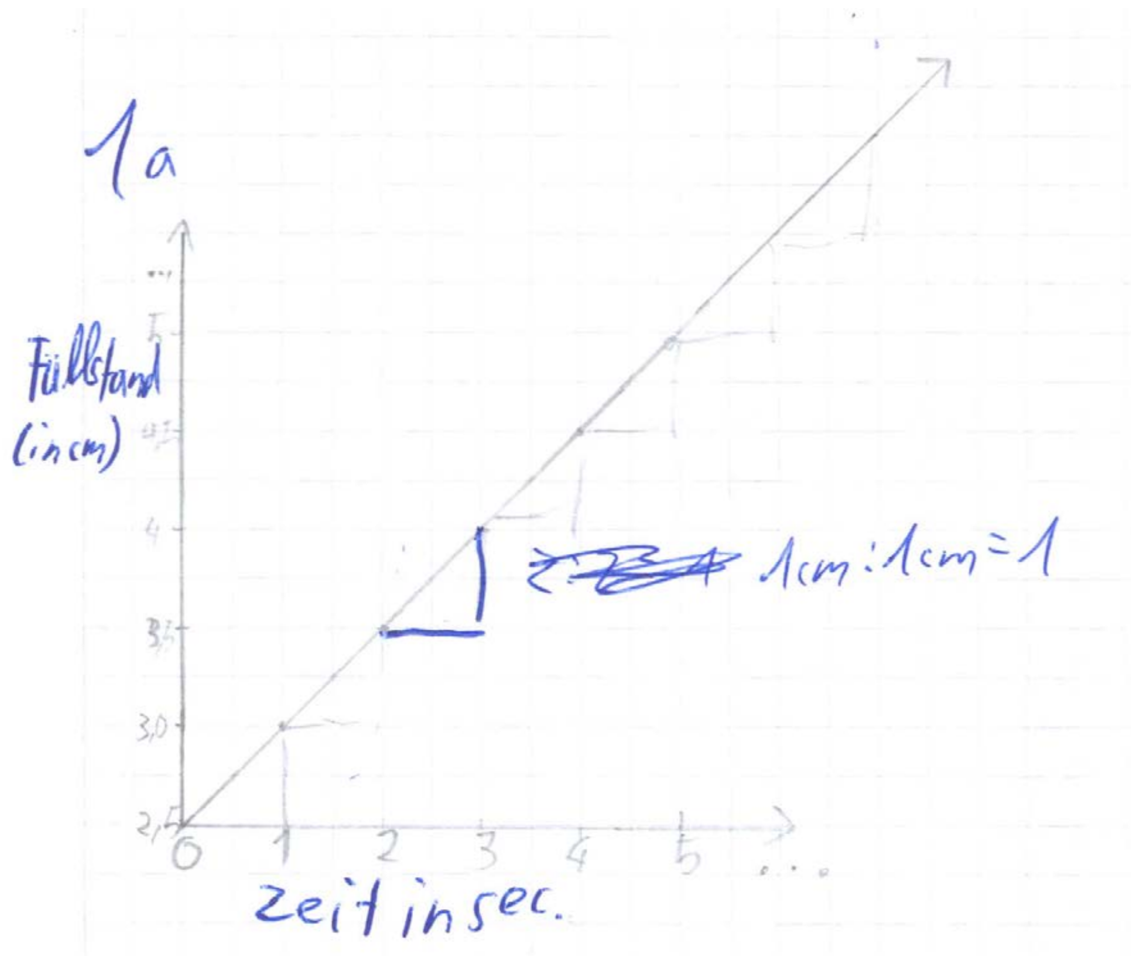


Abbildung 6.10.: Ahmeds Bearbeitung der Aufgabe 1 a) von Aufgabenblatt 5 in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen, bei der mit den Wertepaaren aus einer Wertetabelle ein Graph gezeichnet werden sollte: Der Schüler hat die y-Achse so beschriftet, dass der Graph durch den Schnittpunkt der Achsen läuft, obwohl das erste Wertepaar (0; 2,5) ist. (Ein weiterer Fehler liegt bei der Berechnung der Steigung vor.)

ganzen Streichhölzern und so.“ (83). Hier sind die Streichhölzer nur die erste Erinnerung, die Ahmed in den Sinn kommt, er muss ausgehend davon in seiner Mappe nach weiteren Hinweisen suchen.

Eine deutlichere Wirkung entfaltet die Nennung des Streichholzschachtel-Kontextes in einer Episode aus der Unterrichtseinheit zu linearen Zuordnungen, die bereits weiter oben besprochen wurde (Episode 120504_1_LZ9_20-23, siehe Seite 88). Die Schülerinnen und Schüler des E-Kurses stehen vor der Aufgabe, rechnerisch den Schnittpunkt zweier Graphen zu ermitteln. Die Lehrerin hat an der Tafel die beiden Zuordnungsterme gleichgesetzt und fragt nun: „So was is das denn jetzt hier-“ (8) Sabine bringt sich mit folgender Äußerung ein: „(*meldet sich, zeigt dabei auf die Tafel, redet ohne abzuwarten los*) Ich weiß ich weiß ich weiß mit den Zigarettendingern (*wedelt mit der Hand in der Luft*) ‚Streichhölzern'“ (11) Daraufhin nennt Annegred sofort den Begriff „Gleichungn“ (13).

Auch in Bezug auf die Inhalte der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen wird immer wieder auf die Kontexte zurückgegriffen, mit denen zunächst gearbeitet wurde, und zwar sowohl bezüglich der Steigung, die anhand von Treppen eingeführt wurde, als auch bezüglich der linearen Funktionen selbst, bei denen das gleichmäßige Befüllen von Bechergläsern den Kontext bildeten, auf den sich zuerst bezogen wurde. Als es beispielsweise in der zehnten Stunde der Unterrichtseinheit – bis hierhin wurde eine ganze Reihe verschiedener Kontexte bearbeitet – darum geht, Beispiele für Sachzusammenhänge zu nennen, bei denen der zugehörige Graph die Steigung 0 hat (Aufgabe 1 von Aufgabenblatt 6), nennt Arnold eine Wasserflasche, deren Inhalt unverändert bleibt, und Ahmed das Wasser in einem See, bei dem weder Regen noch Verdunstung eine Rolle spielen. Beide Schüler bleiben also thematisch bei Wasserständen, dem Kontext, anhand dessen die linearen Funktionen ursprünglich eingeführt wurden.

Ein weiteres Beispiel bezieht sich auf den Begriff der Steigung. In der achten Stunde der Unterrichtseinheit werden zunächst die Hausaufgaben besprochen, unter anderem die Bearbeitung der Aufgaben 1 a) und b) von Aufgabenblatt 5, wo ein Graph mit einer positiven Steigung und ein Graph mit einer negativen Steigung gezeichnet werden musste. Der Begriff der Steigung war allerdings seit seiner Einführung nicht verwendet worden, und die Verbindung zu den Parametern einer linearen Funktion muss erst noch erarbeitet werden. Die Lehrerin lässt die beiden Graphen auf einer OHP-Folie einzeichnen und ruft dann den Begriff der Steigung ins Gedächtnis – sofort kommt aus der Klasse das Wort „Treppe“. Nachdem ein Schüler die an den Treppen entwickelte Formel genannt hat, wird die Steigung des ersten Graphen berechnet. Die folgende Episode gibt einen kurzen Austausch zwischen Herbert und seinen Sitznachbarn zu dem Zeitpunkt wieder, als der zweite Graph in den Blick genommen wird:

Episode 6.19: 120427_2_LZ8_17: „Geht die Treppe hinunta.“

1 HBT: Ach (*beschreibt mit der rechten Hand eine Bewegung von links oben nach rechts unten, siehe Abbildung 6.11*) das geht jetzt bergab. ‚das is ss sto (*bewegt die Hand vor sich nach oben*) nach unten so (*bewegt die Hand nach vorne und nach unten, wobei er mit Zeige- und Mittelfinger eine Gehbewegung nachstellt, die er dann auf der vor*

Abbildung 6.11.: Herbert bewegt die Hand von links oben nach rechts unten (aus seiner Perspektive).

Abbildung 6.12.: Herbert beschreibt mit den Fingern eine Gehbewegung.

ihm liegenden Mappe bis auf den vor ihm angrenzenden Tisch von Günter fortsetzt, siehe Abbildung 6.12) ‚bipp depp depp depp depp depp. (*verschränkt die Arme vor sich, schaut kurz zu Günter, dann in Richtung der Projektion des OHP*) (.)
2 GTR: Ja.
3 SBN: Geht die Treppe hinunta.

In Herberts Äußerung (1) erfolgt ein zweifacher Verweis auf den Ausgangskontext, es wirkt, als wolle er das Erlebnis des Hinabsteigens auf einer Treppe greifbar machen: Zuerst zeigt die Neigung einer gedachten Treppe mit der mit der Hand an (siehe Abbildung 6.11), dann ergänzt er die Gehbewegung mit den Fingern (siehe Abbildung 6.12), begleitet von einem lautmalerischen „bipp depp depp depp depp depp", das sich so interpretieren ließe, dass der erste Schritt noch auf der festen Oberfläche des Ausgangsstockwerks stattfindet, alle weiteren auf der Treppe. Sabine benennt schließlich den Kontext, auf den sich Herbert in seinen Äußerungen und Gesten bezieht (3). Auch für Günter ist Herberts Äußerung offenbar nachvollziehbar (2).

Algebraischer Struktursinn in Metaphern und Sprechweisen

Die anfänglichen Tätigkeitskontexte dienen aber nicht bloß als Gedächtnisstütze. Wie das zuletzt angeführte Beispiel zeigt, spielen die aktiven Handlungen eine tragende Rolle. Und sie bleiben als Metaphern erhalten, wie sich im weiteren Verlauf der bereits angesprochenen Episode 120504_1_LZ9_20-23 (siehe Seite 88) zeigt, in der die Schülerinnen und Schüler sich nach langer Zeit auf das Vorgehen beim Lösen linearer Gleichungen besinnen müssen. Marie beschreibt es wie folgt: „Man muss doch da immer ‚also ‚weil die (*macht eine Handbewegung von links nach rechts*) ‚wie bei den Streichhölzern immer- […] (*hält die Hand weiterhin in der Luft*) ähm ‚erstmal (*macht eine leichte Handbewegung von links nach rechts*) minus zweihundert kann ich wegnehm-" Die Lehrerin schreibt an der Tafel „| – 200" (22), notiert also als Äquivalenzumformung die Subtraktion von 200. Gleichzeitig nimmt sie aber das von Marie eingebrachte Verb auf (24). Als Ursprungskontext hat diese Metapher die Tätigkeit mit den Streichholzschachtelgleichungen – hier wurde tatsächlich etwas *weggenommen*. Sie wird nun aber in einem Kontext verwendet, als es schon nicht mehr um das physische Wegnehmen geht, sondern um Rechenhandlungen – in diesem Fall die Subtraktion von 200.

In Episode 111206_3_LG2_21 (siehe Seite 198), in der Ahmed auf die von Katie geäußerte Frustration bei der Bearbeitung von Aufgabe B auf dem ersten Aufgabenblatt reagiert, lässt sich neben der beschriebenen Metapher (12, 14, 18, 22) eine weitere Sprechweise finden, auf die sich in der Folge immer wieder bezogen wird. Ahmed bezieht sich in seiner Beschreibung auf „beide Seiten" (12, 14) (der Gleichung). Auf diese Weise wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler Gleichungen inzwischen in einer bestimmten Weise sehen, in der dem Gleichheitszeichen eine strukturierende Rolle zukommt.

Das Zurückgreifen auf den Tätigkeitskontext, in dem die Gleichungen eingeführt wurden, lässt sich allerdings auch auf einen Mangel an mathematisch korrekten Bezeichnungen zurückführen – bei den Schülerinnen und Schülern wie bei der Lehrerin. In der Episode, in der es der Lehrerin darum geht, der Klasse das Spiel „Einpacken und Auspacken" zu erklären (111221_1/2_LG8_7, siehe Anhang Seite 390), lässt sich dies gut nachvollziehen. Hier wird über die Gleichungen im Ausgangskontext, algebraisch-formal (Variable, Skalare, Zahlen, addieren), algebraisch-konkret (x, 7, „plus rechnen") oder völlig unkonkret („das da") gesprochen. Ahmed greift auf das Wort „Streichhölzer" zurück, um deutlich zu machen, dass er 7 als Skalar meint – der Begriff Skalar steht nicht zur Verfügung (25). Der gleichen Logik folgt die Lehrerin in ihrer Erklärung, dass nur gleichartige Objekte miteinander verrechnet werden dürfen (41); erst in der Konkretisierung spricht sie wieder von „x" (43). Dabei verwendet sie auch Zeigegesten, um deutlicher auf die entsprechenden Objekte hinzuweisen. Dies wiederholt sich, als die Lehrerin deutlich machen will, dass sich die Äquivalenzumformungen auch auf die Variable beziehen dürfen (70-72). Hier bringt Sabine „x" als Synonym für den von der Lehrerin verwendeten Begriff „Schachteln" ins Gespräch (74). Dass die Variable x eigentlich die *Anzahl* der Schachteln angibt, wird hier nicht zum Thema – es geht an dieser Stelle hauptsächlich darum, in den vorliegenden Gleichungen zwischen Skalar- und Variablentermen zu unterscheiden. Diese Begriffe stehen aber eben nicht zur Verfügung. Folglich verwendet auch die Lehrerin an späterer Stelle den Buchstaben „x" so wie Sabine es tut. Sie weist Kizzy darauf hin, dass sie den Skalarausdruck 23 nicht mit dem Variablenausdruck $5x$ verrechnen kann, indem sie in Abgrenzung zur Variable betont: „(*zeigt auf „23"*) Dsind keine x hier." (102)

Die Idee, die sich aus den beiden besprochenen Sprechweisen zusammensetzt – „auf beiden Seiten das Gleiche wegnehmen" – wird so allgemeingültig, dass später sogar impliziert wird, dass auch auf der anderen Seite weggenommen wird, wenn zunächst nur von der einen Seite der Gleichung gesprochen wird. Dies zeigt sich beispielsweise in einer Episode, in der die Lehrerin Katie Hilfestellung bei der Bearbeitung von Aufgabe B von Aufgabenblatt 1 gibt, die nun allerdings nicht mehr als Streichholzschachtelgleichung, sondern in symbolisch-algebraischer Notation ($11x + 7 = 7x + 19$) vorliegt.

Episode 6.20: Auszug aus 111213_3_LG5_22: „„jetzt musst du das aber da ja auch machen ne'"

1 L: Fang wir mit- äh C an vielleicht (*zeigt auf Katies Block*) die-is nich so- (*bewegt den Finger auf dem Blatt etwas nach oben*) ,oder mit B- ,so wir hatten dann ja immer geschrieben ne' (*zeigt weiter rechts in der gleichen Zeile*) wir nehm jetzt auf der ein Seite Streichhölzer weg' (*richtet sich auf, macht mit beiden Händen eine greifende Bewegung von oben nach unten, Katie schaut zu ihr auf*) und auf der andern Seite (*macht fast die gleiche Geste, diesmal aber mit der linken Hand ausgeprägter als mit der rechten*) die Schachteln ne' (*Katie nickt, die Lehrerin hält jetzt beim Sprechen die Hände in Fäusten vor dem Körper und bewegt sie rythmisch*) ,so jetzt ne machen wir das genau so' nur dass wir keine (*formt mit beiden Händen offene Klauen und hält sie vor dem Körper*) Schacht-e-l-n wegnehm sondern ickse' (*entspannt die Finger etwas und bewegt sie leicht nach rechts*) ,und auf der andern Seite nehm wir einfach die Zahln weg. (*Katie dreht sich zu ihrem Block, die Lehrerin beugt sich wieder über den Tisch, bewegt ihren Zeigefinger zunächst in Richtung der Gleichung, zieht dann die Hand wieder etwas zurück und bewegt sie unbestimmt über dem Blatt hin und her*) ,also

wir würden was würdest du jetzt zuerst wegnehm'

2 KTI: Also e-rst (*tippt mit dem Stift unten auf den Block*) würde ich- ä-h- (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) ‚Str Schachteln' oder so' (*zieht den Stift zurück*)

3 L: (*geht mit dem rechten Zeigefinger auf die gleiche Stelle, auf die Katie zuvor gezeigt hat, geht dann mit dem Finger mehrfach auf der Gleichung hin und her*) Die Schachteln okay auf welch (*zeigt erst auf eine Stelle auf der linken Seite der Gleichung, dann auf eine Stelle auf der rechten Seite der Gleichung*) das hier sind ja die Schachteln (*bleibt mit dem rechten Zeigefinger auf der rechten Seite, zeigt zusätzlich mit dem linken Zeigefinger auf die zuvor markierte Stelle auf der linken Seite*) ‚auf welcher Seite würdest du jetzt die Schachteln wegnehm-

4 KTI: (*bewegt den Stift in Richtung der Gleichung, bleibt dabei an der Hand der Lehrerin hängen, der Stift fällt ihr aus der Hand, die Lehrerin zieht die rechte Hand zurück*) Oh Schuldigung (*lacht verlegen, nimmt den Stift mit der rechten Hand wieder auf, zeigt aber mit der linken Hand*) ‚auf der.

5 L: Ja dann schreib das (*zeigt mit der linken Hand weiterhin auf die gleiche Stelle auf der linken Seite, zeigt mit der rechten Hand auf den rechten Rand der Zeile und bewegt ihn dort auf und ab*) ‚mach mal hier son Strich' (*Katie öffnet den Stift und beginnt an der von der Lehrerin angezeigten Stelle zu schreiben*) (..) ‚und jetzt schreiben wir nich minus sieben Schachteln (*bewegt den weiterhin unveränderten linken Finger einmal auf und ab, zeigt dann auf die rechte Seite der Gleichung*) sondern- (..)

6 KTI: x'

7 L: Minus sieben x genau.

8 KTI: (*schreibt*) Minus- sieben- x. (*hält sich den Stift an die Stirn*)

9 L: So. (*zeigt mit beiden Fingern auf die Stelle, auf die sie zuvor nur mit dem linken Zeigefinger gezeigt hat*) elf x minus sieben x- (*schaut Katie an*) (.)

10 KTI: Keine Ahnung. (*lässt die Hand mit dem Stift auf den Block sinken, lacht*) ‚jetzt ähm-

11 L: (*dreht den Kopf weg, verdreht die Augen*) Ach- (*schaut hinüber zu einer Schülerin, die gerufen hat, Katie lacht, schaut Ahmed an, der gerade etwas schreibt*)

12 AMD: (*schaut kurz zu Katie*) Sehr ‚sehr lustich. (*die Lehrerin und Katie schauen ihn an, er schreibt weiter*)

13 KTI: W-a-s- (*schaut wieder auf ihren Block*) ‚is doch so.

14 L: Das is genau das gleiche wie (*zieht die Hände zurück und setzt sie mit allen Fingerspitzen auf den Tisch, Katie fasst sich an den Kopf*) elf Schachteln minus sieben Schachteln-

15 KTI: (*lässt ihre Hand wieder auf den Block sinken*) (.) Wä- (*lächelt*) (.)

16 L: (*hält die Hände unverändert*) Das is genau das gleiche

17 KTI: (*gleichzeitig dazwischen, zeigt mit dem Stift auf die rechte Seite der Gleichung*) Aber wenn hier zum Beispiel-

18 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter, zeigt wie zuvor mit beiden Zeigefingern auf die linke Seite der Gleichung*) Du hast jetzt hier (unverständlich) Schachteln sondern ickse-

19 KTI: (*zeigt weiterhin auf die rechte Seite der Gleichung, eventuell aber auf eine andere*

Stelle, die Lehrerin zeigt weiterhin auf die gleiche Stelle auf der linken Seite der Gleichung) Aber wenn ich zum Beispiel Streichhölzer wegnehme (*leise*) wieviel-

20 L: (*teilweise gleichzeitig, hebt den rechten Zeigefinger und hält ihn zwischen Katies Gesicht und den Block, der linke Zeigefinger bleibt unverändert*) Ja- ,machen wir gleich- (*Katie schaut die Lehrerin an, beide lächeln sich an, Katie schaut wieder auf den Block*) (.) ,erstmal (*zeigt kurz auf die rechte Seite der Gleichung, legt dann den rechten Zeigefinger wieder neben den linken*) jetzt die ickse oke'

21 KTI: (*schaut lächelnd auf den Block vor sich*) (.) (*streckt die Zunge weit heraus*) Ä-h- (*lacht*)

22 L: Also die nimmst (*stützt sich mit den Ellenbogen auf dem Tisch auf und zeigt mit dem Daumen und dem Zeigefinger der linken und dem Zeigefinger der rechten Hand auf die rechte Seite der Gleichung*) jetzt hier sieben ickse weg (*streicht mit dem rechten Zeigefinger kreisend über die zuvor angezeigte Stelle, nimmt die linke Hand weg*) ,dann hast du hier ja keine mehr- (*schaut Katie an*) (.)

23 KTI: (*bewegt den Stift in Richtung des Blocks*) Erst-

24 L: (*teilweise gleichzeitig*) Ne' (*Katie hält mit dem Stift über der Gleichung inne, die Lehrerin zieht den rechten Zeigefinger kurz zurück und zeigt dann wieder auf die gleiche Stelle wie zuvor*) ,wenn du jetzt sieben- sieben x wegnimmst' hast du hie ja keine mehr. (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung und bewegt den Finger dort hin und her*) ,jetzt musst du das aber da ja auch machen ne'

25 KTI: (*leise*) Fü .öh fünf. (*lauter*) ,vier. (*lächelt*)

26 L: (*nickt einmal*) Vier x genau.

27 KTI: (*dazwischen*) Vier x.

28 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Dann haste da noch vier x-

29 KTI: (*schreibt auf der linken Seite in einer neuen Zeile*) (.) Vier x-

30 L: (*zeigt auf die linke Seite vorherigen Zeile, bewegt dann den Finger auf dem Papier nach rechts*) Plus sieben-

31 KTI: (*schreibt weiter*) (.) Ja-

32 L: (*zeigt in die Mitte, unklar ob in der vorherigen oder in der neuen Zeile*) Is gleich-

33 KTI: (*schreibt „=“*) (.) Öh-

34 L: Jetzt haste noch auf (*zeigt mit dem rechten Zeigefinger kurz auf die rechte Seite der vorherigen Gleichung*) dieser Seite-

35 KTI: (*hält sich den Stift an den Kopf*) Neun zehn.

36 L: (*zeigt mit dem linken Zeigefinger von oben auf die neue Zeile*) Neunzehn. ,is gleich neunzehn ,genau. (*zieht die Hand zurück und stützt sich mit beiden Händen auf dem Tisch auf, Katie schreibt „19“*) (.) ,so was machste jetzt (*schaut Katie an, Katie schaut auf den Block*) jetzt müssen wir die Streichhölzer wegnnehm quasi ne'

37 KTI: (*leise*) Ja.

38 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter, zeigt mit dem rechten Zeigefinger kurz auf die linke Seite, wahrscheinlich der Ausgangsgleichung*) Das hier sind ja unsre Streichhölzer-

39 KTI: Ja-

40 L: Wo nimmst du die jetzt weg-

41 KTI: (*zeigt mit dem Stift auf die linke Seite der Gleichung*) Hier.

42 L: Genau ‚also machst du' (*hält die rechte Hand mit der Handfläche nach oben zu Katie*) (.)
43 KTI: (*schreibt am rechten Rand*) Minus-sieben'
44 L: Ja. (*nickt einmal*)
45 KTI: Ja- ‚und äh-
46 L: (*teilweise gleichzeitig*) So was haste dann noch über auf dieser Seite' (*zeigt auf die linke Seite, wahrscheinlich der zweiten Gleichung, klemmt dann ihre Hände zwischen den Knien ein*)
47 KTI: Vier x-
48 L: Is gleich' (*schaut Katie an*) (..) ‚wenn du (*zeigt mit dem rechten Zeigefinger auf die linke Seite, wahrscheinlich der ersten Gleichung*) hier minus sieben rechnest hast du ja nichts mehr ne'
49 KTI: (*bewegt die Hand mit dem Stift in die Nähe des Geschriebenen*) Ja aber dann gleich zwölf-
50 L: Ja- (*zieht die Hand zurück*) ‚schreib das mal das mal auf.
51 KTI: (*dazwischen*) Achso- (*dreht den Block um fast 90° und beginnt zu schreiben*) (..) (*leise*) v-i-e-r x- gleich- zwölf- (*hält sich den Stift an den Kopf*)

Die Lehrerin wiederholt hier als besonderes Merkmal der Tätigkeit mit der Struktur, dass man immer auf beiden Seiten das gleiche wegnehmen muss (24). Auch dabei spielen Gesten wieder eine unterstützende Rolle. An anderen Stellen ist ihre Formulierung aber ungenauer, sie ließe sich jeweils so verstehen, dass das Wegnehmen nur auf einer Seite durchgeführt wird (1, 3, 22, 40-41). Aus dem Kontext wird aber jeweils klar, dass sie meint, auf welcher Seite *alle* entsprechenden Objekte weggenommen werden. Dass die Rechenoperation auf der anderen Seite ebenso durchgeführt werden muss, wird als bekannt vorausgesetzt.

Algebraischer Struktursinn auf dem Papier

Da es den Schülerinnen und Schülern zunächst freigestellt war, wie sie die Lösungen der Streichholzschachtelgleichungen zu Papier brachten, lassen sich einige Aussagen darüber machen, wie sie die ihnen wichtigen strukturellen Aspekte ihrer Tätigkeit dabei festhielten. Es wurde bereits (ab Seite 162) über Ahmeds außergewöhnliche Art berichtet, die Streichholzschachtelgleichungen auf dem Papier zu notieren und zu lösen. Sie soll anhand einer Episode noch einmal vertieft besprochen werden. Darin bittet Katie Ahmed um Hilfe bei Aufgabe A auf dem ersten Aufgabenblatt, die er bereits mit Hilfe seines eigenen Notationssystems gelöst hat (siehe Abbildung 6.13):

Episode 6.21: 111205_3_LG1_70: Anwendung von Ahmeds Notationssystem

207 KTI: (*klopft sich mehrfach auf das Knie*) Aber wenn wir jetzt zwei- (*macht mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand eine greifende Bewegung auf der linken Seite der ersten Gleichung auf dem Aufgabenblatt, dreht dann die Hand und wiederholt die Geste*) Streichhölzer wegnehm dann müssn wir auch (*tippt mit Daumen und Zeigefinger auf eine Stelle auf der rechten Seite der Gleichung*) davon zwei wegnehm

Abbildung 6.13.: Ahmeds Bearbeitung der Aufgabe A von Aufgabenblatt 1

(*legt die Hand wieder auf ihren Oberschenkel, schaut zu Ahmed auf*) oder' (..) ,oder nur eine Schachtel. (.)

208 AMD: (*öffnet kurz den Mund, schließt ihn wieder, bewegt dann den Oberkörper nach rechts*) Ja anderth- (*bewegt den Oberkörper zurück*) ,is doch logisch dass (*zeigt mit dem Stift in der rechten Hand unbestimmt auf die erste Gleichung auf dem Aufgabenblatt*) hier überall- zwei- Streichhölzer drin sind überall is doch logisch.

209 KTI: (*nickt*) Ja.

210 AMD: Weil- (*bewegt den Stift unbestimmt über der Gleichung*) ,drei weg drei weg bleiben (*zeigt wohl auf die linke Seite, nicht genau erkennbar*) hier noch zwei über (*bewegt den Stift über dem Blatt etwas nach rechts*) und hier is noch einer. (*zieht den Stift zurück, atmet tief ein*) ,und ä-h-m- (...)

211 KTI: Das blöde is (*zeigt mit dem kleinen Finger der rechten Hand auf die rechte Seite der Gleichung*) hier sind vier. (*stützt sich auf*)

212 AMD: (*schaut auf seinen eigenen Block*) Muss man jetzt halt (*schaut kurz zu Katie, dann wieder auf seinen Block, legt seine linke Hand rechts neben seinen Block*) hier kummal ,ich hab das so aufgeschrieben- (*zeigt mit dem Stift in der rechten Hand auf seinen Block, recht weit oben, Katie beugt sich vor und schaut auf Ahmeds Block*) ,die sind weg' (*bewegt den Stift etwas hin und her, etwa in der Mitte der Gleichung*)

213 KTI: Ja-

214 AMD: (*geht mit dem Stift etwas nach unten links*) Und dann sind hier noch zwei Streichhölzer (*bewegt den Stift auf die rechte Seite der Gleichung*) und eine Schachtel.

215 KTI: Ja.

216 AMD: Muss ich dnjetzt zwei geteilt durch eins rechnen' (*schaut kurz zu Katie, senkt dann den Blick, hebt den Stift leicht an*) ‚ja. (4sec)
217 KTI: Schon. ‚damit doa eine Schachtel (*tippt mit der rechten Hand kurz auf die rechte Seite der Gleichung in Ahmeds Block*) übrich bleibt.
218 AMD: (*fasst kurz sowohl an den Rand seines Blocks als auch an den Rand seiner Mappe, schiebt dann beides etwas nach links und schaut auf die Streichholzschachtelgleichung in der Mitte des Tisches, bewegt die Hand über die Streichhölzer, die noch in der Nähe des Gleichheitszeichens auf der linken Seite liegen*) Wie wars denn eben-
219 KTI: Da ham wir- (.) irgnwie (*legt die rechte Hand auf die zwei Streichholzschachteln, die auf der rechten Seite der Gleichung übrig geblieben waren und bewegt sie ein bisschen*) nur das da überich gel h-abt- (*Ahmed nimmt eine der beiden Schachteln und zieht sie noch dichter an das Gleichheitszeichen*) (.)
220 AMD: Ja ham wir auch (*bewegt den Stift in der Luft in zwei kleinen Bögen von links nach rechts*) vier geteilt durch zwei gerechnet ne'
221 KTI: (*nimmt wieder beide Streichholzschachteln auf der rechten Seite unter ihre Hand*) J-o-a.
222 AMD: (*schaut wieder auf seinen Block*) (.) Jetzt müssn wir ja zwei geteilt durch eins. (*setzt seinen Stift an und beginnt zu schreiben*)
223 KTI: (*zieht ihre Hand zurück*) Achs-s-o' (*nimmt ihren Stift in die Hand, schiebt ihre Mappe unter ihren Block*) ‚schl-a-u. (*lacht*) (.) ‚muss jetzt aufschreiben' (*Ahmed rückt auf seinem Stuhl hin und her*) (.) ‚toll. (*beginnt zu schreiben*)

Katie geht zunächst davon aus, dass sie auf der linken Seite zwei Streichhölzer wegnehmen muss und fragt Ahmed nun, ob sie auf der rechten Seite dann zwei Schachteln wegnehmen muss oder nur eine (207). Ahmed reagiert, indem er die für ihn direkt sichtbare Lösung, nämlich dass zwei Streichhölzer in jeder Schachtel sind, vorsagt (208), Katie scheint folgen zu können (209). Dann aber setzt Ahmed zu einer Begründung an: Er beschreibt, dass auf beiden Seiten drei Schachteln wegzunehmen sind (210). Nachdem Katie mit dem Argument widerspricht, dass auf der rechten Seite vier Schachteln liegen (211), zeigt er ihr seine Notation, in der er die gleiche Anzahl von Schachteln in einer Wolke in der Nähe des Gleichheitszeichens platziert, so dass der Rest der Gleichung außen stehen bleibt. Dazu erklärt er: „die sind weg'“ (212). Die so begründete neue Situation (214) kann Katie nachvollziehen und akzeptieren (213, 215).

Katies Eingangsfrage (207) deutet darauf hin, dass ihr eine Übergeneralisierung aus dem Einführungsbeispiel unterläuft, nämlich dass zunächst Streichhölzer weggenommen werden müssen. Durch die Formulierung ihrer Frage macht Katie allerdings auch deutlich, dass sie als elementare Regel verstanden hat, dass man auf beiden Seiten die gleiche Anzahl (in diesem Fall Streichhölzer) entfernen muss – wenn wir auf der linken Seite etwas wegnehmen, müssen wir auch auf der rechten Seite das Gleiche wegnehmen. Das Problem, auf das sie gestoßen ist liegt genau darin, dass das Gleiche hier nicht vorliegt (211). Bei diesem Problem hilft Ahmeds Notation. Sie verdeutlicht, dass das weggenommen wird, was auf beiden Seiten vorliegt und ist somit noch zugänglicher als die Regel, dass man die Anzahl wegnimmt, die geringer ist (212-215). Gleichzeitig steht das Wegnehmen gleicher Mengen hier buchstäblich im Zentrum, Ahmed wird von dem Problem befreit, dies verbal deutlich zu machen, was er zuvor durch doppelte Erwähnung versucht hatte (210).

Auch das in der bereits besprochenen Episode 111209_3_LG3_32_4 (siehe Seite 217) von Ahmed geäußerte Verständnis, dass das Wegnehmen in seiner Reihenfolge beliebig ist, lässt sich in Verbindung mit seinem Notationssystem bringen: Hier „verschwinden" alle Streichhölzer und Schachteln gemeinsam in der gleichen Wolke.

Bei Sabine und Herbert entstehen genau in dieser Phase des Unterrichts ebenfalls individuelle Notationssysteme. Dies legt die Vermutung nahe, dass bei individuellem Arbeiten die dazugehörigen Aufzeichnungen eine größere Rolle spielen – nicht nur für die Beobachtung der Lernprozesse, sondern auch für die Schülerinnen und Schüler selbst: Sie bemühen sich, die ihnen relevant erscheinenden Merkmale der Situation und der daraus erwachsenen Tätigkeit schriftlich festzuhalten.

Individuelle Schreibweisen erfordern allerdings (wie bereits im dargestellten Austausch zwischen Ahmed und Katie gesehen) verbale Kommunikation, da sie nicht unmittelbar deutbar sind. Die Beschreibung der Interaktion zwischen Sabine und Herbert in Episode 111212_2_LG4_29 (siehe Seite 122) stützt diese Aussage. Dort führt Sabines eigensinnige Notation dazu, dass die eigentlich Frage in den Hintergrund rückt, weil zunächst Herbert Sabines Verschriftlichung nachvollziehen muss und nicht direkt abgleichen kann, ob seine Rechnung mit ihrer übereinstimmt (20-38). Dabei fehlt allerdings auch beiden eine Sprache, in der sie die Objekte beschreiben könnten, um die es geht. Stattdessen können sie die Verbindungen nur durch Zeigen herstellen – in sämtlichen Äußerungen wird auf Zeigegesten zurückgegriffen. Außerdem wurde in Bezug auf Episode 111209_3_LG3_32_2 (siehe Seite 195) dargelegt, dass Ahmeds Notationssystem mehr noch als das von den meisten anderen Schülerinnen und Schülern verwendete System an Grenzen stößt, wenn von den Streichhölzern und Schachteln abstrahiert wird. Ahmeds sicherer Umgang mit symbolisch-algebraischen Gleichungen im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit deutet aber darauf hin, dass dies kein Handicap für den betreffenden Schüler sein muss.

Letztlich ist das Ziel des Unterrichts genau die Einführung der konventionellen symbolischen Schreibweise. Sie enthält dann für alle verbindlich die intendierte Struktur. In Episode 111213_3_LG5_22, die bereits in Bezug auf die sich etablierenden Sprechweisen besprochen wurde, wird deutlich, dass die Lehrkraft dabei nicht vorschnell annehmen sollte, dass diese intendierte Struktur klar ist, wie die Lehrerin es tut, wenn sie sagt, das Vorgehen sei „genau das gleiche" wie zuvor (14, 16). Für sie ändert sich eigentlich nur eine Schreibweise. Für Katie ist die Tätigkeit des Lösens von Gleichungen aber noch gar nicht klar. Da die Lehrerin letztlich auch nur Merksätze anbietet – „immer durch die An-zahl der Schach-teln" (58) – bleibt Katie eine Erschließung der Tätigkeit weiterhin verwehrt. Es wird eben nicht das Motiv angesprochen, dass man auf eine Aussage über den Inhalt einer Schachtel/den Wert für x kommen möchte. Vor diesem Hintergrund müssen auch die symbolisch-algebraischen Vorstellungen für Katie strukturlos bleiben. Die Beschreibung von Ahmeds diesbezüglichem Lernprozess zeigt, dass es durchaus sein kann, dass Schülerinnen und Schüler irgendwann statt Streichholzschachteln Variablen verwenden und statt Anzahlen von Streichhölzern einfache Zahlen. Sein Vorteil gegenüber Katie ist eben, dass er schon vorher das Motiv der Tätigkeit verstanden hat.

In der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen wurde den Schülerinnen und Schülern insgesamt weniger Freiheit bezüglich eigener Schreibweisen eingeräumt. In den Fällen, in denen sie die dennoch bestehenden Freiräume nutzten, bestätigt sich die Hypothese,

3. Kai hat – wie ihr auch – nach und nach ein Becherglas befüllt. Nach 12 Füllvorgängen maß er einen Wasserstand von 13,6 cm. Er nimmt nun ein anderes Gefäß und füllt es vollständig mit dem Wasser aus dem Becherglas. Der Wasserstand sinkt dadurch um 3,4 cm.
   a) Wie oft muss er den Vorgang wiederholen, bis das Becherglas leer ist? Erkläre, wie du vorgegangen bist.
   b) Bisher gab es stets einen *Anfangsfüllstand* und einen *gleichmäßigen Zuwachs* bei jedem Füllvorgang, und man konnte den Füllstand nach x Füllvorgängen mit Hilfe eines *Terms* bestimmen. Wie verhält es sich hier?
   c) Beschreibe auch hier den Wasserstand des Becherglases mit Hilfe eines Terms.

Abbildung 6.14.: Aufgabe 3 von Aufgabenblatt 3 in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen: Alicia nennt als Antwort zu Teilaufgabe c) den Term $13{,}6 - 3{,}4 \cdot x$.

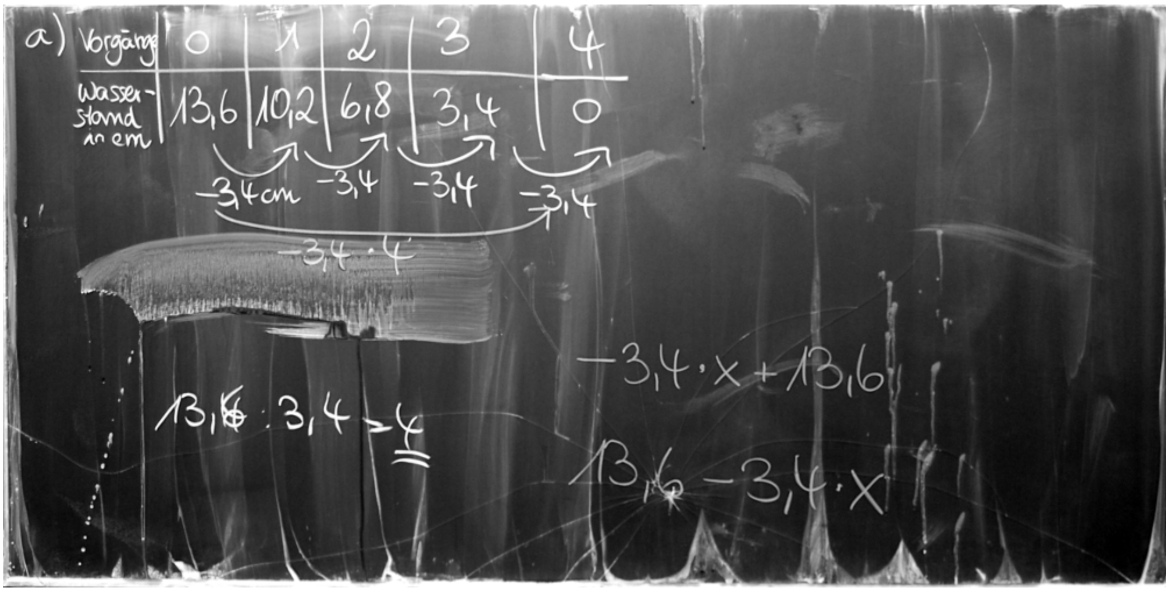


Abbildung 6.15.: Tafelbild, auf das sich in Episode 120423_1_LZ6_18 bezogen wird

dass durch eigene Schreibweisen eigene Sichtweisen unterstrichen werden können. Als ein Beispiel kann Alicias Bearbeitung von Aufgabe 3 c) von Aufgabenblatt 3 (siehe Abbildung 6.14) angeführt werden. Als die Lehrerin bereits den Term $-3{,}4 \cdot x + 13{,}6$ an die Tafel geschrieben hat (siehe Abbildung 6.15), bringt die Schülerin in die Klassendiskussion die Frage ein, ob der Term $13{,}6 - 3{,}4 \cdot x$ ebenfalls korrekt ist. Die Lehrerin schreibt den von der Schülerin vorgeschlagenen Term unter den bereits vorher genannten. Dann fordert die Lehrerin Alicia zu einer Erklärung heraus:

Episode 6.22: 120423_1_LZ6_18: Der Term erzählt seine Geschichte

1 L: (*tritt hinter dem Lehrerpult hervor, geht einige Schritte auf Alicia zu, nickend*) So Alicia warum hast du das sorum geschrieben (*dreht sich zu Tafel*) das is genau richtich.

> 2 ALC: Weil ich das ja abziehn wollte-
> 3 L: (*macht einen Schritt in Richtung der Tafel*) Was wolltest du denn bitte was (*dreht sich zu Alicia*)
> 4 ALC: (*teilweise gleichzeitig*) Ich will ja ähm ‚den Füll(unverständlich)vorgang vom Anfangsfüllstand abziehn deswegen hab ichs sorum geschrieben.
> 5 L: (*zeigt auf den ersten Eintrag in der Wertetabelle, die zuvor an der Tafel angefertigt worden war, oben links in Abbildung 6.15*) Genau du hast vom Anfangsfüllstand (*beschreibt mit der Hand einen Bogen zum letzten Eintrag der Wertetabelle*) was abgezogen- ‚bis de bei null bist- ‚genau. (*zeigt auf den Term an der Tafel, den Alicia zuvor diktiert hatte*) ‚deswegen hastes so rum geschrieben. (*zeigt auf den Term, der zuerst vorgeschlagen wurde*) ‚das is aber auch richtich.

Alicia lässt den Term eine Geschichte erzählen. Gerade wenn der Skalarterm wie im hier angewendeten Unterrichtsdesign als Anfangswert interpretiert wird (weil Werte im negativen Bereich nicht betrachtet werden), ergibt diese Reihenfolge Sinn: Man schreibt die Zahl, von der man ausgeht, an den Anfang, also nach links und zieht dann sukzessive ab. Dieses Narrativ lässt sich direkt an der Wertetabelle nachvollziehen, wie die von Zeigegesten begleitete Erläuterung der Lehrerin zeigt (5).

6.1.4. Struktursinn ist keine Insel: Rückgriff auf Bekanntes

Es wurde bislang nicht vertieft darauf eingegangen, dass sich in der gesamten Unterrichtseinheit auf bereits zuvor behandelte mathematische Zusammenhänge und dazugehörige Grundvorstellungen bezogen wurde. Bezüglich zweier Themenkomplexe konnte genauer herausgearbeitet werden, wie sich unzureichend aufgebautes Vorwissen ungünstig auf die Ausbildung algebraischen Struktursinns zu linearen Gleichungen auswirkt.

Grundvorstellungen zum Dividieren

Die Einführung linearer Gleichungen anhand von Streichholzschachtelgleichungen setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellung zum Dividieren als gleichmäßiges Verteilen (auf die Schachteln) (Padberg und Benz, 2011, S. 154 ff.) geläufig ist. Am Ende der Episode 111205_3_LG1_44-59_5 (siehe Seite 157) erkennen Katie (170) und Ahmed (172) unmittelbar die Gleichheit zwischen den vier Streichhölzern auf der linken Seite der Gleichung und den zwei Schachteln auf der rechten Seite. Ihnen ist aber nicht klar, dass sich das Zuordnen der Streichhölzer zu den Schachteln als Division auffassen lässt. In der Fortsetzung der Situation in Episode 111205_3_LG1_44-59_6 (siehe Seite 160) versucht die Lehrerin durch Nachfragen die letzte Handlung, das Berechnen der Lösung durch Division, herauszufordern. In der Interaktion, die hauptsächlich zwischen der Lehrerin und Ahmed stattfindet und die in der formulierenden Interpretation bereits eingehend beschrieben wurde, werden die grundlegend verschiedenen Vorstellungen zur Division deutlich. Die Lehrerin versucht, die Division als einen Operator mit den Operanden 4 und 2 und dem Resultat 2 zu motivieren (189-191). Für Ahmed und Katie ist dies eine Frage, zu der sie keinen Zugang haben (192-193). Für die Lehrerin ist sie aufgrund der ihr zugänglichen

Vorstellung vom Dividieren – erkennbar im Legen der Streichhölzer in Paaren (191) – nur allzu klar. Letztlich sagt die Lehrerin die gefragte Rechnung vor, indem sie mit „Vier'" (194) beginnt und, nachdem Ahmed mit einem abwartenden „Ja'" (195) reagiert, den Satz mit „geteilt durch'" fortsetzt (196).

Ahmed und Katie reagieren beide mit „A-h-", Ahmed fügt hinzu „Achso ja irgendwie logisch" (203). Das lässt sich insofern nachvollziehen, als dass den beiden Schülern klar ist, dass das Ergebnis 2 ist und dass die angesagte Rechnung diese Anforderung erfüllt. Es ist aber zweifelhaft, ob ihnen auch der Zusammenhang klar ist zwischen ihrem zuvor schon vorhandenen Verständnis (170/172) und der nun geklärten Rechnung. Die Anbindung der Rechenhandlung an die Objekte – genau dies sollen Grundvorstellungen leisten (Vom Hofe, 2003) – wird ausschließlich nonverbal durch das Legen in Paaren geleistet (191) und bleibt somit implizit. Die Lehrerin unternimmt auch keinen Versuch, Ahmeds „irgendwie logisch" zu überprüfen oder davon zu profitieren.

Dementsprechend schlecht verankert ist die Division im Gleichungslösungsprozess bei Ahmed und Katie, als sie in der Folge alleine arbeiten müssen. Ein Beispiel ist bereits mit Episode 111205_3_LG1_70 (siehe Seite 228) dokumentiert worden. Ahmed fragt hier in einer Situation, in der die Lösung eigentlich schon vorliegt – eine Schachtel entspricht zwei Streichhölzern –, ob nun 2 : 1 gerechnet werden muss (216). Katie stimmt verhalten zu (217). Daraufhin wenden sich die Schüler dem Einführungsbeispiel zu (218-219). Aus dem, was sie dort „überich gel h-abt-" (219, expliziert in 220) haben, schließen sie, dass in der Tat 2 : 1 gerechnet werden muss (222-223) und wenden sich wieder ihren individuellen Aufzeichnungen zu.

Die Diskussion über Ahmeds Frage, ob man 2 durch 1 teilen muss (216), wird kaum inhaltlich geführt. Zum einen ist beiden Schülern offenbar nicht klar, dass die Division durch 1 eine identische Operation ist (216-217). Zum anderen benennt nur Katie überhaupt als Argument, dass es darum geht, das Äquivalent einer Schachtel zu finden – aber eben nicht, dass diese Lage schon vorliegt (217). Das letztlich entscheidende Argument (zumindest für Ahmed, doch auch Katie erlebt einen Aha-Moment, 223) ist die Analogie zur zuvor im Eingangsbeispiel durchgeführten Rechnung, welche von der Lehrerin vorgesagt wurde (220-222), wobei auch diese Analogie kaum expliziert wird. Es ist Ahmeds Geste, einen Bogen von links nach rechts nachvollziehend (220), die die Reihenfolge beschreibt. Dabei bleibt offen, ob sie sich auf die *Seiten der Gleichung* bezieht (man teilt das linke durch das rechte) oder auf die *Objekte* (man teilt die Anzahl der Streichhölzer durch die der Schachteln). Diese Ambivalenz schafft eine Basis für spätere Probleme beim Lösen linearer Gleichungen.

Die Grundvorstellung des gleichmäßigen Verteilens wäre hier die Grundlage, um den Gleichungslösungsprozess überhaupt zu erlernen. Später nämlich kann man auf eine solche Vorstellung nicht mehr zugreifen, sondern muss sich auf die Grundvorstellung der Division als Umkehrung der Multiplikation oder der der Division als multiplikativem Vergleich verlassen (Padberg und Benz, 2011, S. 157 bzw. 156). Ahmeds Probleme bei der Ermittlung des Preises für eine CD an späterer Stelle (Episoden 120109_3_LG10_11-12, siehe Seite 186; 120109_3_LG10_15,18, siehe Seite 190; 120109_3_LG10_23, siehe Seite 168) hängen genau hiermit zusammen. Dort geht Ahmed vom Dividieren als sukzessivem Subtrahieren (Padberg und Benz, 2011, S. 156) aus, was freilich bei einer Division durch 2,5 nicht zielführend ist. Es gibt keine Möglichkeit, die Größe der Schritte zu bestimmen: „komm ich dann ja eigntlich auch nich weiter weil ich ja nich weiß- (..) wieviel ne [...] halbe (formt den Ansatz eines P-Lautes) kostet so-“ (Episode 120109_3_LG10_15,18, 58-60) In Episode 120109_3_LG10_23 führt dies dann zu folgender Aussage: „„muss man das (*Katie dreht sich ruckartig zu Ahmed, schlägt dabei mit ihrem Zopf gegen die Uhr*) irgenwie aufteiln’ (...) [. . .] (*leise, hält sich den Stift ans Kinn*) minus die dritte Zahl aba die dritte Zahl is- halb so klein- wie andern beiden.“ (112-114)

Es ist hier zu erkennen, dass Ahmed sich im Klaren darüber ist, dass er den Gesamtbetrag, der für die CDs bezahlt wird, „irgenwie aufteiln“ muss. Es fehlt ihm aber die Möglichkeit, durch eine nichtganze Zahl zu teilen, weil er die Division als eine mehrfach durchgeführte Subtraktion interpretiert, wie aus seiner zweiten Aussage deutlich wird (114). Ihm fehlt an dieser Stelle die multiplikative Darstellung $2{,}5x = 34{,}75$, anhand derer die Division als Umkehrung ins Blickfeld käme.

Probleme im Umgang mit Brüchen

Auch Probleme im Umgang mit Brüchen stehen einer sicheren Anwendung des Wissens um lineare Gleichungen im Wege. In der folgenden Episode leistet die Lehrerin Sabine Hilfestellung bei der Bearbeitung von Aufgabe 18 a) auf Seite 28 im Schulbuch (Böer et al., 2008). Es geht zunächst (62-71) darum, die Gleichung $\frac{x}{2} = 10$ zu lösen.

Episode 6.23: 111216_2_LG6_18-19: Sabines Probleme im Umgang mit Brüchen

62 L: (*tritt von hinten rechts an Sabine heran, legt ihre Hand auf die rechte Seite des Buchs*) Ä-hm- ,okay ,du hast- (*nimmt einen Stift in die Hand, schiebt das Buch zur Tischkante, sodass der Block darunter zum Vorschein kommt*) x halbe- (*schreibt oben auf dem Block „$\frac{x}{2}$“*) (...) ,so x halbe. und (*bewegt dem Stift über „x“*) die Zahl wissen wir ja nich das könn- (*bewegt den Stift an den rechten Rand des Blattes und schreibt dort*) drei halbe sein das könn-
63 SBN: Könn vier- ja-
64 L: (*redet gleichzeitig ohne Unterbrechung weiter, schreibt weiterhin*) Fünf halbe sein- (*zeigt mit dem Stift auf das soeben Geschriebene auf der rechten Seite, nicht genauer erkennbar*) ,so mit was e würdest du denn hier malnehm um auf diese Zahl hier oben zu komm- (.)
65 SBN: Mal zwei-
66 L: Mal zwei. (*bewegt den Stift wieder auf die linke Seite*) ,und das machst du hier auch. ,also du nimmst- (*schreibt*) mal zwei- ,und dann hast du (*schreibt in einer neuen Zeile weiter „x =“*) hier das x und da hast du- (*hört auf zu schreiben, zeigt kurz auf die vorherige Zeile, hält den Stift über dem Papier*)
67 SBN: (.) Zwanzig.
68 L: Ja. (*schreibt weiter „20“*) ,fertig. (*lässt den Stift auf den Block fallen*)
69 SBN: (*wandert mit dem Zeige- und Mittelfinger der linken Hand über das gerade Geschriebene*) Also ein x is zwanzig-
70 L: (*richtet sich auf*) Ja.

71 SBN: Oh mein Gott ist das leischt- (*nimmt den Stift in die Hand, die Lehrerin entfernt sich*)

Sabine arbeitet, unterbrochen von Ablenkungen, an Aufgabe 18 b). Hier ist die Gleichung $2 = x : 10$ zu lösen.

73 SBN: (*dreht sich nach hinten um, wo die Lehrerin in etwa drei Meter Entfernung steht*) Frau Kahn' ,wenn da x geteilt durch zehn steht (*bewegt den Stift in der rechten Hand in Richtung der Lehrerin*) geteilt durch zehn nehm'
74 L: (*schaut Sabine mit verschränkten Armen an, Sabine hält den Stift weiterhin in der Luft*) (5sec) (*raunend*) Was'
75 SBN: (*dreht sich nach vorne, nimmt das Buch und stellt es auf*) Hier steht- (.) (*zeigt auf eine Stelle im Buch, nicht genauer zu erkennen, die Lehrerin stützt sich auf dem Tisch auf, an dem sie gerade steht*) ,zwei gleich x geteilt durch zehn- (*dreht ihren Kopf wieder zur Lehrerin*)
76 L: Ja und wie kommst du dann wieder auf ein x'
77 SBN: (*zuckt mit den Schultern*) Zehn- ,geteilt durch zehn. ,zehn geteilt durch zehn sind doch eins'
78 L: (*schüttelt den Kopf*) (..) (*geht mit dem Kopf ruckartig nach vorne*) Das is das gleiche wie bei a.
79 SBN: (*lässt das Buch wieder auf den Tisch sinken, schaut in das Buch*) (...) (*dreht sich wieder zur Lehrerin, die unverändert aufgestützt auf den Tisch steht*) Mal zehn-
80 L: Ja. (*schaut auf den Tisch, an dem sie gerade steht, Sabine dreht sich wieder nach vorne und schreibt*)

In der Besprechung der ersten Aufgabe gibt die Lehrerin die Rechenoperation vor, sodass Sabine nur noch erkennen oder raten muss, mit welchem Wert sie multiplizieren muss. Außerdem übernimmt die Lehrerin auch Teile der Durchführung der Rechenhandlung, indem sie das Schreiben übernimmt und die linke Seite der Gleichung („$x =$“) ohne Sabines Zutun notiert. Sabines eigene Aktivität besteht im ersten Durchgang also zusammengefasst darin, eine richtige Zahl zu nennen, die ihr nahegelegt wird, und die Rechnung $10 \cdot 2$ durchzuführen. So ist sie sich auch am Ende noch unsicher, ob 20 nun der Wert für x ist, sodass sie nachfragen muss (69).

Die Besprechung der zweiten Aufgabe zeigt, dass eine Klärung der Tatsache, dass und warum multipliziert werden muss, durchaus nötig gewesen wäre. Weil diese Klärung nicht stattgefunden hat, entscheidet sich Sabine in einer strukturgleichen Situation dazu zu dividieren (73, 77). Ihr Versuch einer Begründung – „(*zuckt mit den Schultern*) Zehn- ,geteilt durch zehn. ,zehn geteilt durch zehn sind doch eins'“ (77) – macht deutlich, dass ihr in der vorherigen Aufgabe nicht deutlich geworden ist, welche Äquivalenzumformung eigentlich durchgeführt wurde. Für die Lehrerin ist klar, dass der Bruchstrich als Division aufgefasst wurde und somit die Situation bei Aufgabe b) die „gleiche wie bei a“ (78) ist. Doch eine Diskussion darüber hatte es nicht gegeben, weil die Lehrerin im ersten Durchgang die Multiplikation schon vorausgesetzt hatte. Letztlich bleibt sie auch hier aus, weil Sabine die korrekte Rechenoperation nennt (79).

Doch auch wenn in der Aufgabe gar nicht unmittelbar Brüche vorliegen, könnte eine gewisse Vertrautheit mit ihnen bei der Ausbildung algebraischen Struktursinns zu linearen

Gleichungen behilflich sein. Weil die Schülerinnen und Schüler es nicht gewohnt sind, mit Brüchen zu arbeiten und sich daher eher auf die Dezimalbruchdarstellung verlassen, entgehen ihnen Anknüpfungspunkte für das neue Wissen über lineare Gleichungen, wie sich anhand folgender Episode argumentieren lässt. Herbert bittet Sabine um die Bestätigung seiner Lösung einer Gleichung, die sie „eingepackt“ hatte. Die korrekte Lösung ist 1,5, Herbert hat aber eine andere Lösung:

Episode 6.24: 111221_2_LG8_27: Nicht-Erkennen von Kehrwerten

Herbert und Sabine bearbeiten unabhängig voneinander Aufgaben, Herbert gibt etwas in den Taschenrechner ein, Sabine schreibt, Khanh steht hinter den beiden.

85 HBT: (*dreht sich zu Sabine*) Null komma sieben. (*schaut wieder auf den Taschenrechner, Sabine richtet sich auf, schaut zu Herbert hinüber*) (.)
86 SBN: Am Ende’ (*Khanh beugt sich nach vorne und schaut auf Herberts Taschenrechner*)
87 HBT: (*bewegt den Kopf nach vorne*) Oh schuldigung ‚warte. (*Sabine wendet sich wieder ihren Unterlagen zu, Khanh schaut weiterhin auf Herberts Taschenrechner*) (.) (*Herbert gibt etwas in den Taschenrechner ein*) ‚sieben sechs und ‚ä-h- (*gibt weiterhin etwas in den Taschenrechner ein, Khanh schaut zu, Sabine arbeitet für sich*) (...) ‚null komma sechs Periode hab ich raus. (*Sabine richtet sich auf und schaut auf den kleinen Zettel, den sie am Rande ihres Blocks liegen hat*) (.)
88 SBN: Wieso null komma sechs ich hab eins komma fünf- (*schaut auf einen weiteren Zettel, der auf ihrer Mappe liegt, Herbert folgt ihrem Blick*) (.) (*schaut zu Herbert, Herbert beginnt, etwas in den Taschenrechner einzugeben*)
89 KNH: Zeig mal deins. (*greift nach dem Zettel, der auf Sabines Block liegt*)
90 SBN: (*Herbert arbeitet weiter am Taschenrechner, murmelt dabei vor sich hin*) Das is nich meins das is meins. (*legt den Zettel, der zuvor auf dem Block lag, in die Mitte*) (.) (*Khanh greift nach dem Zettel, Sabine legt ihre Hand darauf, korrigiert etwas auf der rechten Seite*) ‚aber hier muss n Plus hin.
91 HBT: (*schaut vom Taschenrechner auf und zu Sabine, Khanh schaut auf Herberts Taschenrechner*) Eins komma fünf.
92 SBN: (*zieht ihre linke Hand von dem Zettel zurück, ihre rechte Hand bleibt aber liegen*) Ja’
93 KNH: Wie hast gemacht.
94 SBN: (*Herbert legt den Taschenrechner auf den Tisch, nimmt den Stift in die Hand*) Wie kommst (*beugt sich nach vorne*) du denn jetzt auf eins komma fünf’
95 KNH: Er hat falschrum gerechnet. (*Herbert schaut kurz zu Sabine und dann auf seinen Taschenrechner, hebt ihn leicht an und neigt ihn zu Sabine*) (.) (*zeigt auf das Display des Taschenrechners, Herbert schaut Sabine an*) ‚er hat erst die sieben hingeschrieben.
96 HBT: Ja. (*schaut wieder auf den Taschenrechner*)
97 SBN: (*wendet sich ab und arbeitet an ihrer Aufgabe weiter*) A-ch so. (*Herbert schreibt auf seinem Blatt*)

Dass Herbert hier nicht unmittelbar sieht, dass er die Division falsch herum durchgeführt hat, lässt sich direkt darauf zurückführen, dass er Sabines Ergebnis 1,5 (88) nicht als

Kehrwert seines Ergebnisses identifiziert. Diesen Zusammenhang sieht auch Sabine nicht, zu erkennen an ihrer Frage danach, wie Herbert im zweiten Anlauf auf 1,5 kommt (94). So haftet an den durchgeführten Rechenoperationen eine gewisse Willkürlichkeit.

Zusammenwirken verschiedener elementarer arithmetischer Probleme

Wenn eine Schülerin wie Katie dann nicht nur bezüglich *eines* mathematischen Inhalts Probleme hat, wird ein sicherer Umgang mit einer algebraischen Struktur fast unmöglich, wie folgende längere Episode aus der letzten Stunde der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen zeigt. Darin bittet Katie den Forscher bei einer der Aufgaben[4] um Hilfe. Die letztlich erfolgreiche Lösung ist in Abbildung 6.16 dargestellt, zu Beginn dieser Episode hat Katie allerdings nur die zu lösende Gleichung (also $-18 = 4 - x$) vom Übungsblatt kopiert.

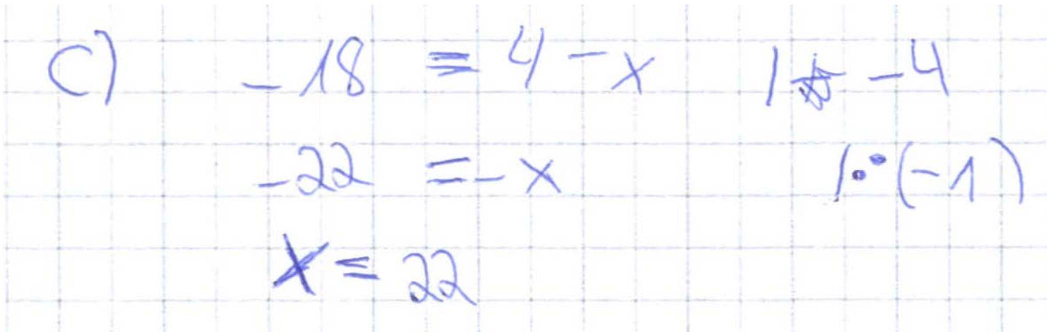


Abbildung 6.16.: Katies letztlich erfolgreiche Bearbeitung der in Episode 120119_3_LG14_54 besprochenen Aufgabe. Der Aufgabentext zu der gegebenen Gleichung, die Katie in der ersten Zeile kopiert hat,qq lautete: „Löse die Gleichungen schriftlich."

Episode 6.25: 120119_3_LG14_54: Eine Reihe arithmetischer Probleme

56 KTI: (*lässt ihren Arm sinken, mit dem sie sich zuvor gemeldet hatte, der Forscher nähert sich von hinten und stützt sich links neben Katie auf dem Tisch auf, Katie dreht das Aufgabenblatt etwas, sodass es mehr in Richtung des Forschers zeigt*) Ich weiß jetzt nich wie ich- (*zeigt kurz auf eine Stelle im linken oberen Viertel ihres Karoblattes*) weiterrechnen soll. ‚das versteh- (*legt ihre Federmappe etwas zur Seite, die das Aufgabenblatt teilweise verdeckt*) ‚minus achtzehn- (*zeigt auf eine Stelle oben links auf dem Aufgabenblatt, zieht die Hand kurz zurück, zeigt dann auf eine andere Stelle, wahrscheinlich rechts davon*) ‚und auf der andern Seite sind vier- minus x.
57 F: M-hm.

[4]Die Aufgabe entstammt dem Übungsblatt K24 „Gleichungsmenü" aus dem Lehrerband zu mathe live 8 (Böer et al., 2008), das den Schülerinnen und Schülern als Vorbereitung auf die Klassenarbeit ausgegeben wurde. Da es nicht als Teil des Unterrichtsdesigns erarbeitet wurde und zudem urheberrechtlich geschützt ist, wurde es nicht in dieser Arbeit eingebunden.

58 KTI: (*schaut kurz zum Forscher auf, dann wieder auf das Aufgabenblatt*) Ich weiß nich ob ich minus oder plus jetzt- (*bewegt den Stift über dem Karoblatt hin und her*) rechnen soll hier.
59 F: Was willst du denn weg- kriegen- (*streicht sich mit der rechten Hand über den rechten Arm*) (.)
60 KTI: (*fasst sich kurz an den Kopf und zeigt dann mit dem Stift auf eine Stelle auf dem Karoblatt*) Vier- (*tippt mehrfach auf die gleich Stelle*)
61 F: Ja'
62 KTI: (*tippt weiterhin mit dem Stift auf das Blatt, jetzt aber immer hin und her zwischen zwei Stellen in der gleichen Zeile*) Auf beidn Seiten. (*hält den Stift an, bewegt ihn leicht nach oben*)
63 F: (*zeigt von unten auf die Zeile, auf die Katie zuvor gezeigt hat*) So und wenn da vorher- (.)
64 KTI: Aber da-
65 F: (*gleichzeitig*) Plus vier steht' (..)
66 KTI: (*zeigt auf eine Stelle relativ weit links in der Zeile*) Da steht aber minus- a-achtzehn- (*zieht die Hand mit dem Stift zurück und streicht sich über die rechte Augenbraue, schaut den Forscher an*) (.)
67 F: (*bewegt den Finger nach links zu der Stelle, auf die Katie gezeigt hat, und bewegt ihn dort kreisend*) Ja das is ja nich weiter schlimm- (*bewegt den Zeigefinger wieder nach rechts*) ‚du willst die vier wegkriegen.
68 KTI: Ja.
69 F: Das find ich in Ordnung. (*zeigt unverändert auf die gleiche Stelle*) (.) (*Katie schreibt oder korrigiert etwas unmittelbar neben dem Finger des Forschers*) ‚so und um die vier wegzukriegen rechnest du-
70 KTI: (*hält sich den Stift an den Mund*) Minus vier.
71 F: Genau. ‚mach das mal' (.) (*zieht seine Hand zurück*)
72 KTI: (*dreht den Stift und zeigt mit dem hinteren Ende auf eine Stelle relativ weit links auf dem Karoblatt*) Wieso isenn hier überhaupt- (.) (*atmet tief ein*) ‚rechne ich jetzt (*tippt mit der linken Hand auf die Stelle, auf die sie bereits mit dem Stift zeigt*) dazu oder- (*tippt nochmals auf die gleiche Stelle*) weniger. (*schaut kurz zum Forscher auf, zieht sich die Jacke zurecht*) ‚weil ich ja- im Minusbereich-
73 F: (*zeigt auf die Stelle, auf die Katie zuvor gezeigt hat*) Du rechnest das also du ‚du rechnest im Prinzip genauso (*bewegt den Finger kurz nach oben, zeigt dann wieder auf die gleiche Stelle*) wie vorher auch immer. (*dreht den Finger etwas, zeigt aber weiter auf die gleiche Stelle*) (.) ‚du rechnest das was vorher (*bewegt den Finger über der gleichen Stelle rhythmisch auf und ab*) da is (*wiederholt die Geste, aber ausladender*) ‚also minus achtzinn' (*bewegt den Finger nach rechts und zeigt auf das Ende der Zeile*) ‚minus vier.
74 KTI: Ja. (.)
75 F: (*zeigt weiterhin auf die gleiche Stelle*) Was kommt raus'
76 KTI: Minus vitzehn- (*schaut zum Forscher auf, grinst ihn an, hebt den rechten Daumen*)
77 F: (*schüttelt den Kopf, zeigt weiterhin auf die gleiche Stelle*) Nein-

78 KTI: (*lässt die Hand sinken*) Hä- ‚ich rechne- (*nimmt den Stift in die Hand, der auf dem Tisch liegt*) ‚also dazu oder nich- (.)
79 F: (*hockt sich auf den Boden, zeigt auf eine Stelle weiter rechts*) Ich weiß nich ob das jetzt- hilft ‚also- ‚vorhin hatten wir- (*stützt sich mit dem linken Arm auf dem Tisch auf*)
80 KTI: (*teilweise gleichzeitig*) Minus zweiunzwanzich oder'
81 F: (*teilweise gleichzeitig, nickt*) Ja- (*nickt Katie zu*) ‚wieso- (.)
82 KTI: (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) Weil ich ja mehr in den Minusbereich geh.
83 F: Genau du bist schon (*legt seine Handkante auf den Tisch und bewegt sie dann nach links, wiederholt die Geste dann nochmal, nickt dabei*) ‚genau du gehst noch mehr in den Minusbereich. ‚ja-
84 KTI: (*leise*) Okay. (*dreht das Blatt wieder zu sich*)
85 F: Is richtich. (*Katie schreibt in einer neuen Zeile*) (...) ‚und- auf der rechten Seite steht noch-
86 KTI: (*schreibt „x“*) x. (*hebt den Stift an*) (.) (*ergänzt das „–“*) ‚minus x.
87 F: Genau. (*nickt einmal*) das minus nich vergessen' (*atmet tief ein*) (.) ‚so. (...) ‚und jetzt- (...)
88 KTI: Ä-h- (*lässt ihren rechten Arm auf den Tisch fallen*)
89 F: Noch ein Schritt.
90 KTI: Geteilt durch. (*der Forscher schaut Katie an*) ‚minus x oder wie-
91 F: (*verzieht das Gesicht*) J-a- (*Katie schaut den Forscher an, er schaut wieder auf das Blatt*) ‚ich glaube du a-hnst das richtige was- (*bewegt den rechten Zeigefinger in der Luft hin und her*) ‚was würdest du jetzt machen' ‚auf beiden Seiten' (..) (*lässt erneut ihren Arm auf den Tisch fallen*) ‚um auf das x zu komm' (.)
92 KTI: Geteilt rechnen. ‚oder nich hä'
93 F: (*teilweise gleichzeitig*) Ja durch was- (.)
94 KTI: (*tippt mit dem Stift auf eine Stelle in der Gleichung*) Durch dieses minus x' (*der Forscher presst die Lippen zusammen, neigt den Kopf etwas nach rechts*) ‚oder- (*schwenkt den Stift kurz zum Forscher, schaut ihn kurz an*)
95 F: Naja du hast- (*zeigt auf Katies Bearbeitung von Aufgabe b), siehe Abbildung 6.17 auf Seite 242*) ‚kumma durch was hast du hier geteilt gerechnet. (*Katie tippt mit dem Stift zweimal auf eine Stelle rechts von der, auf die der Forscher zeigt*) (..)
96 KTI: Minus fünf'
97 F: (*zeigt tippend auf eine Stelle rechts von der, auf die Katie zeigt, Katie zieht ihren Arm zurück*) Das solltest du übrigens auch hier nebn schreibn. (*Katie beginnt an der Stelle zu schreiben, auf die der Forscher gezeigt hat*) (..) ‚geteilt durch-
98 KTI: (*schreibt*) Minus fünf x.
99 F: Nee nich durch (*zeigt auf eine Stelle links von dem, was Katie gerade geschrieben hat*) das x.
100 KTI: (*mit hoher Stimme*) A-h-
101 F: (*gleichzeitig, zieht seinen Finger zurück, richtig sich auf, Katie streicht "x"durch*) Ansonsten wär das x weg. (*der Forscher zeigt auf die Stelle, an der sie streicht*) ‚einfach

nur durch minus fünf. ‚ne (*zeigt auf eine Stelle etwas weiter links oben*) hier hast du durch- (*geht mit dem Finger nach rechts*) vier geteilt'

102 KTI: (*hält sich die Hand an die Stirn*) Ä hn'

103 F: (*bewegt seine Hand zurück nach links, zeigt auf eine Stelle weiter rechts unten*) Hier haste durch minus fünf geteilt (*hält seine geöffnete Hand vor Katie hin, sie legt den Stift hinein*) und da muss man- (*nimmt den Stift und schreibt*) (.) wenn mans ganz richtich machen will das noch in Klammern setzen' (*legt den Stift so auf den Tisch, dass die Spitze auf das Geschriebene zeigt*) (..) (*zeigt mit dem Zeigefinger auf das Geschriebene*) ‚ansonsten- ‚durch minus ‚das is son- (*bewegt die Finger in der Luft, schaut Katie an*) (.) nich klar ne' (*zieht das Blatt etwas zu sich, atmet tief ein*) (.) ‚gut. (*zeigt wieder auf die eigentlich behandelte Gleichung*) ‚so hier steht jetzt nur minus x-

104 KTI: Ja-

105 F: Da könnte man- (*geht mit dem Finger wieder weiter nach oben*) ‚und hier stand minus fünf x ne' (*zeigt wieder auf die gleiche Stelle wie vorher*) ‚aber da könnte man jetzt auch sagen das is durch (*schüttelt den Kopf*) ‚äh das ist minus- ein x. (*schaut Katie an*) (.) ‚ne'

106 KTI: (*leise*) Ja.

107 F: (*schaut wieder auf das Blatt*) Also' ‚durch was muss ich teiln um auf x zu komm'

108 KTI: Minus (*nickt einmal*) eins.

109 F: (*nickt einmal*) Durch minus eins ‚genau. (*Katie schreibt etwas am Ende der Zeile*) (4sec) (*deutet kurz mit dem Zeigefinger auf das Geschriebene*) ‚mach mal noch in Klammern- (*Katie ergänzt die Klammern*) (..) (*der Forscher richtet sich auf*) ‚so.

110 KTI: Und das wars- (*legt den Stift auf den Tisch, schaut zum Forscher auf*)

111 F: Und jetzt' (*stemmt sich die Arme in die Hüften*)

112 KTI: (*nimmt den Taschenrechner und gibt etwas ein*) Muss ich-e-s s-o ein-geben- (..) (*hält den Taschenrechner mit beiden Händen, zieht die Arme an, mit hoher Stimme*) ‚verdammt- (*in normaler Tonhöhe, tippt etwas in den Taschenrechner, der Forscher schaut ihr über die Schulter*) ‚warte- (...) (*schaut zum Forscher auf, hebt den Daumen*)

113 F: Genau-

114 KTI: (*gleichzeitig*) Das is zweiunzwanzich'

115 F: (*beugt sich etwas nach vorne, stützt sich mit einer Hand auf dem Tisch auf, dreht das Blatt etwas zu sich*) Is zweiunzwanzich also ins ‚insofern kannst du auch- (*zeigt auf die Gleichung*) ‚wenn du sowas hast ‚dass auf beiden Seiten- (*bewegt den Finger etwas nach rechts*) ‚also dass- (*Katie schaut kurz zum Forscher auf, dann wieder auf das Blatt*) hier minus x steht- (.) (*zeigt wieder auf eine Stelle weiter links*) ‚dann ändert sich hier auch einfach nur das Vorzeichen. (*Katie schaut kurz zum Forscher auf, der Forscher zeigt auf das Ende der Zeile*) ‚durch dieses durch minus eins teiln ‚ist das der Grund ne' (.) (*zeigt wieder weiter links, Katie nimmt den Stift in die Hand*) ‚also steht hier jetzt- (*Katie dreht das Blatt zu sich und beginnt zu schreiben*) (.)

116 KTI: x gleich zweiun-zwanzich- (*schaut zum Forscher auf*)

117 F: (*nickt einmal*) Ja. ‚super.

118 KTI: (*gleichzeitig*) Okay. (*der Forscher entfernt sich*)

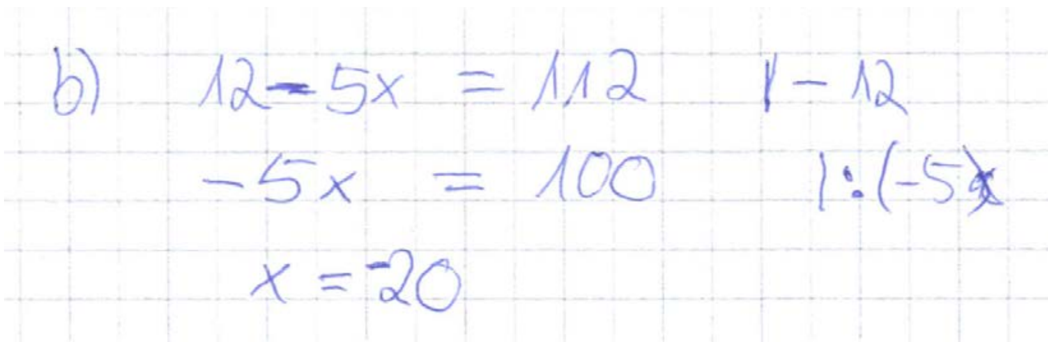


Abbildung 6.17.: Katies Bearbeitung von Aufgabe b), auf die der Forscher verweist (95)

Katie kann durchaus benennen, welches Ziel sie bezüglich der Gleichung verfolgt (59-61, 67-68) und welche strukturellen Regeln dabei einzuhalten sind (62), sie kann sogar das „wegkriegen“ von 4 als die Subtraktion von 4 auffassen (69-70). Katies Probleme liegen aber in der Arithmetik: Von den ersten Äußerungen an wird deutlich, dass sie nicht weiß, wie sie ausgehend von −18, dem Wert auf der linken Seite der Gleichung, rechnen kann. Ihr Haupteinwand ist: „(*zeigt auf eine Stelle relativ weit links in der Zeile*) Da steht aber minus-a-achtzehn- (*zieht die Hand mit dem Stift zurück und streicht sich über die rechte Augenbraue, schaut den Forscher an*) (.)“ (66, vgl. auch schon 64). Erst nachdem klar ist, dass sowohl Katie als auch der Forscher davon ausgehen, dass −4 gerechnet werden soll (69-70), kann Katie ihr Problem explizit machen: „,rechne ich jetzt (*tippt mit der linken Hand auf die Stelle, auf die sie bereits mit dem Stift zeigt*) dazu oder- (*tippt nochmals auf die gleiche Stelle*) weniger. (*schaut kurz zum Forscher auf, zieht sich die Jacke zurecht*) ,weil ich ja- im Minusbereich-“ (72) Auch die zitierte Frage ganz zu Beginn lässt sich in diesem Sinne interpretieren: Es geht hierbei nicht um die Äquivalenzumformung an sich, sondern um ihre arithmetische Umsetzung auf der linken Seite der Gleichung. Die Frage beantwortet sich für Katie letztlich erst, nachdem sich die eine Variante als falsch herausstellt (75-77): Aus der Ablehnung des Forschers rekonstruiert sie, dass sie „dazu“ rechnen muss (78) und nennt dann das korrekte Ergebnis (80). Sie kann sogar eine Begründung dafür nennen: „Weil ich ja mehr in den Minusbereich geh.“ (82) Katies Angewiesenheit auf die Vorstellung, in einem „Bereich“ zu „gehen“ (mehr oder weniger in den Bereich hinein) steht der vom Forscher implizit gemachten Anforderung entgegen, −18 − 4 kalkülhaft, „im Prinzip genauso (*bewegt den Finger kurz nach oben, zeigt dann wieder auf die gleiche Stelle*) wie vorher auch immer“ (73) zu rechnen. Der Forscher erkennt dies letztlich, übernimmt Katies Formulierung, betont das „an einem Ort sein“ und das „gehen“ noch stärker und illustriert es durch eine Geste: „Genau du bist schon (*legt seine Handkante auf den Tisch und bewegt sie dann nach links, wiederholt die Geste dann nochmal, nickt dabei*) ,genau du gehst noch mehr in den Minusbereich. ,ja-“ (83).

Nach der Lösung dieses ersten Problems bestünde Gelegenheit, auf die Tätigkeit des Lösens von Gleichungen zurückzukommen (ab 87). Doch auch hier steht zunächst ein unzureichendes Verständnis auf der Ebene der Zahlen im Weg: Katie kann durchaus das Dividieren als die nächste Äquivalenzumformung nennen (89-90), möchte allerdings durch „minus x oder wie“ teilen (90, nochmals 94). Als der Forscher sie auf die bereits richtig durchgeführte Rechnung bei Aufgabe b) hinweist, behauptet sie, sie habe auch dort durch

$-5x$ geteilt (95-98). Die diesbezügliche Korrektur durch den Forscher (99) nimmt Katie an (100-101).

Dass es ihr daraufhin immer noch nicht gelingt, die in der nun zu lösenden Aufgabe c) erforderliche Rechnung zu nennen – der Forscher gibt ihr zweimal Gelegenheit dazu (101, 103) – deutet auf ein weiteres Problem hin. Der Forscher identifiziert als solches, dass der Faktor vor der Variablen in dieser Aufgabe nicht sichtbar ist: Er erklärt Katie, dass $-x$ sich auch als $-1x$ schreiben lässt (105). Katie gelingt jedoch auch nach diesem Hinweis erst auf explizite Frage die Benennung der korrekten Rechenoperation (107-109).

Die mühsame Durchführung der Division durch -1 mit Hilfe des Taschenrechners (111-114) und der Monolog des Forschers, in dem er beschreibt, wie diese Rechnung auch ohne Taschenrechner zu bewältigen wäre (115), unterstreichen die Deutung dieser Episode, dass bei Katie ein wenig ausgeprägter Zahlenblick und schwache arithmetische Fähigkeiten einer Routinisierung des Umgangs mit Gleichungen im Wege stehen. Letztlich steht sowohl für Katie als auch für den Forscher im Vordergrund, dass sie die korrekte Lösung der Gleichung aufschreiben kann (115-118).

Elementare arithmetische Probleme können also den Weg zu einem strukturellen Verständnis weitgehend verstellen. Nicht nur, weil dann Verfahren fehlen, sondern weil nur sie einen sinnstiftenden Umgang mit den Strukturen ermöglichen. Das Ziel von Struktursinn ist eben nicht sinnloses Manipulieren, vielmehr ginge es um sinnstiftendes, vorstellungshaftes, zielorientiertes und zielstiftendes Verständnis.

Zur Rolle von Vorwissen in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

Die im letzten Absatz gemachten Aussagen gelten wohl auch bezüglich anderer algebraischer Strukturen. Um die spezifischen Zusammenhänge zwischen vorausgesetztem Vorwissen und der Ausbildung algebraischen Struktursinns für lineare Funktionen herauszuarbeiten, wäre allerdings eine eingehendere Analyse der Daten notwendig gewesen. Dennoch ist auch so die Benennung und Beschreibung zweier Gebieten möglich, in denen die Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen Vorwissen erforderte:

- Die Auffassung der Steigung als Quotient (von Veränderung in der abhängigen und Veränderung in der unabhängigen Variablen) erfordert Vorwissen in Bezug auf Bruchzahlen, auf die Division und die Verbindung zwischen beiden Konzepten. Insbesondere hilfreich sind Vorstellungen über größer/kleiner-Relationen zwischen Brüchen beziehungsweise Quotienten sowie das Wissen, dass eine Bruchzahl durch verschiedene Brüche dargestellt werden kann und wie man sie ineinander überführt (Erweitern/Kürzen). Es fällt auf, dass keine der von Malle (2004) benannten Grundvorstellungen zu Bruchzahlen den Kern dessen trifft, was die Steigung ausmacht. Es kann daher gemutmaßt werden, dass hier (aufbauend auf der von Malle beschriebenen Grundvorstellung der Bruchzahl als Verhältnis) eine erweiterte Grundvorstellung zu Bruchzahlen aufgebaut wird. Als Neuheit wird nun eine Größe in ein Verhältnis zu einer *qualitativ anderen* Größe gesetzt. Man könnte von einer „pro-Vorstellung“ sprechen: Pro Veränderung um b in der unabhängigen Variable beobachten wir eine Veränderung um a in der abhängigen Variable – die Steigung beträgt $\frac{a}{b}$. Nur wenn den

Schülerinnen und Schülern außerdem die Gleichheit $\frac{a}{b} = \frac{a/b}{1}$ klar ist, können sie verstehen, dass die Bruchzahl außerdem die Veränderung pro Einheit in der unabhängigen Variable angibt.

- Um mit dem Wissen über eine schrittweise, gleichförmige Veränderung einen Funktionsterm zu bilden, muss (wie bereits in der a priori-Analyse bemerkt) die Vorstellung der Multiplikation als mehrfache Addition gleicher Summanden (Padberg und Benz, 2011, S. 127 ff.) aktiviert werden.

6.2. Ausbildung algebraischen Struktursinns als emotional-sozialer Prozess

In Abschnitt 6.1 ist ausführlich diskutiert worden, wie die Schülerinnen und Schüler sich den auf algebraische Strukturen bezogenen Tätigkeiten annähern – im Fokus stand damit Lernen als Objectification, als ein Hineinwachsen in eine kulturell bestimmte Tätigkeit. Im Folgenden soll herausgearbeitet werden, wie dieser Lernprozess mit den individuellen Einstellungen der Schülerinnen und Schüler interagiert. Dies geschieht in zwei Blöcken: Zum einen geht es um die Motivation und das Interesse, das die Schülerinnen und Schüler in der Situation unmittelbar entwickeln. Zum anderen können Aussagen über längerfristige Rollenfestlegungen und ihren Zusammenhang mit der Ausbildung algebraischen Struktursinns gemacht werden.

6.2.1. Unmittelbare Reaktionen auf (ausbleibende) Struktursinnentwicklung

Ausbleiben von Struktursinnentwicklung

Es kann frustrierend sein kann, etwas nicht zu verstehen – das ist ein Allgemeinplatz. Dennoch lohnt es, die emotionale Reaktion auf ausbleibende Lernerfolge mit besonderer Bezugnahme auf den Lerngegenstand in den Blick zu nehmen. Dass Lernerfolge ausbleiben, zeigt sich im Klassenunterricht im Vergleich mit anderen Schülerinnen und Schülern. Der Umgang mit den jeweiligen algebraischen Strukturen, der bei anderen beobachtet wird, wirkt für einen Schüler, der (noch) nicht gelernt hat, beliebig. In der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen lässt sich dieser Eindruck von Beliebigkeit bei Herbert rekonstruieren, als er in Episode 111212_2_LG4_81-83 (siehe Seite 210) Sabines Rechnungen betrachtet. Seine Einstiegsäußerung (198) drückt Befremden und Misstrauen gegenüber dem Ergebnis aus, das er bei Sabine sieht. Herbert stellt die beiden Optionen, die Anzahlen der Streichholzschachteln voneinander abzuziehen, als gleichwertig dar (202) – beide sind für ihn gleichermaßen (un)plausibel, er hat keine sinnhafte Begründung für ein Vorgehen. Er scheint auch keine inhaltliche Begründung oder einen Verweis auf ein Ziel dieser Rechnung zu erwarten, er erwartet vielmehr eine normative Antwort darauf, was er rechnen „soll“ (200).

Mit der Zeit führen deutliches Zurückbleiben und die Ablösung von der in der Klasse durchgeführten Tätigkeit zu Frustration und anderen negativen Emotionen. Dies zeigt sich sehr deutlich in Episode 111221_2_LG8_10-13 (siehe Seite 206). Herbert reagiert hier auf Sabines Fragen kaum mehr auf der inhaltlichen Ebene, wenn er angibt, er würde rechnen (6, 8). Vielmehr lassen sich deutliche Zeichen von Gereiztheit und Frustration erkennen: Er wird laut (8, 10) und antwortet flapsig (10, 12). Dies lässt sich so deuten, dass bei Herbert das Zurückbleiben im Lernprozess, das gefühlte Abgeschnittensein, zu einer starken emotionalen Reaktion führt. Diese macht ihn letztlich auch taub für gut gemeinte Ratschläge (14).

Motivationsschub durch Struktursehen

Das Gegenmittel scheint Struktursehen zu sein: Es ist fast immer begleitet von spontanen Äußerungen von Freude und Stolz. In der Folge wirken die Schülerinnen und Schüler häufig angeregt und motiviert. Dies wurde bereits in Episode 111205_2_LG1_40-41 (siehe Seite 101, Zeile 125 und 130) sowie ausführlicher in Episode 111205_2_LG1_43 (siehe Seite 118) dokumentiert. Nachdem Sabine und Herbert der Lehrerin erklärt haben, wie sie die Streichholzschachtelgleichung lösen können und ihnen die Richtigkeit ihres Vorgehens bestätigt wird, brechen beide in Jubel aus (183, 189-193), der als Ausdruck von Freude und Stolz gedeutet werden kann. Bei Herbert kehrt im Gegensatz zu Sabine jedoch schnell wieder Lethargie ein, als es darum geht, das erarbeitete Verfahren aufzuschreiben (192), Sabine ist auch diesbezüglich euphorisch (191). Ebenso ist in Episode 120109_2_LG10_36 (siehe Seite 146) deutlich zu erkennen, dass Sabine Stolz darüber empfindet, dass sie ihre eigene Lösung der Anwendungsaufgabe mit der Musterlösung in Verbindung bringen kann, und ihre neue Sicht daher mit Herbert (239-241) und eventuell auch mit Murat (245) teilen möchte. Dass Struktursehen Interesse und Motivation fördert, steht im Einklang mit den Beschreibungen von Bikner-Ahsbahs (2005). Unter der Zielsetzung, Entstehungsbedingungen interessendichter Situationen zu beschreiben, stellt sie fest, dass „das Auftreten von Struktursehen für die Entstehung situativen kollektiven Interesses zentral“ (S. 267) ist.

Da Struktursehen sich durchaus auch auf Strukturen beziehen kann, die aus mathematischer Sicht nicht korrekt sind, gilt diese Beobachtung auch für diese Fälle. So lassen sich auch in Episode 111205_3_LG1_20 (siehe Seite 149), noch bevor Ahmed sein (ideosynkratisches) Vorgehen erklärt, Anzeichen von Erregung bei ihm erkennen (11). Seine Erklärung leitet er schließlich mit einem tiefen Durchatmen ein (13), als stünde Großes bevor.

Die Erschließung des Umgangs mit einer algebraischen Struktur mitsamt den sich ergebenen Handlungsmöglichkeiten ist also mit positiven Emotionen und einem gesteigerten Interesse verbunden. Das kann für Schülerinnen und Schüler wie eine Verheißung wirken, auf die sie ihr Handeln ausrichten. In Episode 120109_3_LG10_11-12 (siehe Seite 186) besteht für Katie offenbar ein Ziel darin, die von Ahmed durchgeführte Rechnung aufzuschreiben (18). Dahinter könnte auch die Intention stehen, an seinem Erfolg teilzuhaben, das Ergebnis als kollektives Produkt wahrzunehmen. So spricht sie auch von „unserer Rechnung“ (18), obwohl sämtliche Rechenschritte von Ahmed bestimmt und ausgeführt wurden.

Abbildung 6.18.: Die Lehrerin streicht Sabine eine Strähne aus dem Gesicht.

Emotionale Einbindung und die Lehrkraft

Dieser Zug zur Erkenntnis kann durch die Lehrkraft aufgegriffen und unterstützt werden. Am Ende der Episode 111205_2_LG1_43 (siehe Seite 118) fällt diesbezüglich die Zärtlichkeit auf, mit der die Lehrerin Sabine und Herbert gegenübertritt: Sie streicht Sabine eine Strähne aus dem Gesicht (182, siehe Abbildung 6.18) und legt ihre Hand auf Herberts Schulter (188). So trägt sie (wahrscheinlich unbewusst) zu einem angenehmen Gesamterlebnis für die Schülerinnen und Schüler bei, das mit dem hier vorliegenden Ergebnis verbunden wird.

Andererseits kann eine Reaktion der Lehrerin auch negativ aufgefasst werden, wobei dies individuell verschieden sein kann. In Episode 111205_3_LG1_21-23 (siehe Seite 150) äußert sich die hinzugerufene Lehrerin hauptsächlich nonverbal. Sie beantwortet Ahmeds Frage „könnte so der Lösungsweg sein-“ (13) nur implizit und entfernt sich daraufhin (16). Die Reaktion der Lehrerin ist nicht eindeutig zu interpretieren – sie könnte Belustigung (grinsen) oder Ratlosigkeit (sie entzieht sich der Situation) ausdrücken, aber auch klarer als Ablehnung verstanden werden, vor allem durch das Wort „nich“, das als einziges verständlich ist (16). Perlokutionär fühlt Katie sich lächerlich gemacht („Die lacht jetzt schon“, 18), ihre überschlagene Stimme könnte Wut oder Frustration ausdrücken. Insgesamt nimmt sie wieder eine passive Haltung ein. Ahmed hingegen ist zwar irritiert („Okay-“, 17), lässt sich aber nicht beirren und wendet sich wieder den Streichhölzern zu (17) und bewegt sie auf dem Tisch (18), handelt also mit ihnen.

Auswirkungen nicht vorhandener Motivation

Lernerlebnisse bezüglich algebraischer Strukturen können also motivierend wirken, ihr Ausbleiben ist für die betroffenen Schülerinnen und Schüler frustrierend. Davon ausgehend ist die Entwicklung selbstverstärkend. Das leuchtet für den ersten Fall sofort ein, auch wenn sich schwer nachweisen lässt, welche Rolle Motivation und Interesse jeweils konkret spielen. Es lässt sich aber in der Interaktion der Schülerinnen und Schüler klar nachweisen, dass nicht vorhandene Motivation und negative Emotionen zur Nichtverwertung eigentlich hilfreicher Hinweise führen. So ist in Episode 111205_3_LG1_44-59_3 (siehe Seite 386) der in der Klasse aufgeschnappte Hinweis, man könne die Schachteln „einfach wegtun" (131) wohl auch deshalb nicht verwertbar, weil Katie und Ahmed mittlerweile recht demotiviert sind, wie an den Unlustbekundungen und langen Pausen (107-108) deutlich wird und sich in der folgenden Phase der Abgelenktheit (118-127) manifestiert. In ähnlicher Weise kommen auch Sabine und Herbert nicht auf die noch vor Beginn der ersten Unterrichtsstunde von Sabine formulierte Sicht auf die Gleichung auf dem Tisch zurück. Herbert hatte eine vermeintliche Ungerechtigkeit erkannt, weil auf seinem Tisch – der rechten Seite der in Abbildung 4.4 auf Seite 84 dargestellten Streichholzschachtelgleichung – mehr Streichhölzer offen lagen:

Episode 6.26: 111205_2_LG1_7: „ich hab da viel mehr drinne-"

1 HBT: (*flüstert, deutet mit beiden Händen auf die Streichhölzer vor sich, schaut rüber zu Sabine*) Wieso hab ich eigentlich mehr als du- (*bewegt die Hände vor sich hin und her*) (.)
2 SBN: (*flüstert, umkreist mit der Hand die Schachteln vor sich*) Was laberst du ich hab da viel mehr drinne- (.)
3 HBT: (*mit weit offenem Mund*) O-h- (*Sabine nickt, hebt den Zeigefinger und hält ihn vor ihr Gesicht, zeigt dann auf das Gleichheitszeichen*) (.) ‚lass tauschen- (*beide Schüler lachen, Herbert verstaut sein Buch unter dem Tisch*) (5sec)
4 SBN: (*ihre Hand liegt weiterhin auf dem Gleichheitszeichen*) Äh ich kann nich mehr-
5 HBT: (*führt seine Hand zum Gleichheitszeichen, Sabine zieht ihre zurück, Herbert bewegt das Gleichheitszeichen etwas zu sich*) Psch psch psch Finger weg-
6 SBN: (*zieht das Gleichheitszeichen wieder zu sich*) Nein- (*Sabine zieht das Gleichheitszeichen ganz zu sich*)
7 L: Guten Morgen-

Die hier bereits vorhandene korrekte Sicht auf die Situation, dass die überzähligen Streichhölzer auf der rechten Seite der Gleichung auch auf der linken Seite vorhanden sind – dort als Inhalt der überzähligen Schachteln, wird nicht für weitere Erkenntnisse genutzt, weil sie nicht Ausdruck eines positiven Erkenntnisinteresses ist, sondern im Kontext der durch Herberts Frage (1) initiierten und durch Sabines Reaktion („Was laberst du", 2) aufgenommenen Konkurrenzsituation steht. Hinzu kommt die von Sabine geäußerte Kraftlosigkeit (4).

Insgesamt auffällig bei Sabine ist, dass sie immer wieder dann ins Stocken gerät, wenn sie keine neuerliche Bestätigung für die Richtigkeit ihres Vorgehens erhält. Zu Beginn der im Folgenden dargestellten Episode hat sie in ihren Aufzeichnungen (siehe Abbildung 6.19) die Gleichung „$56 = 2x + 2x + x$" notiert und verlangt nun nach der Lehrerin:

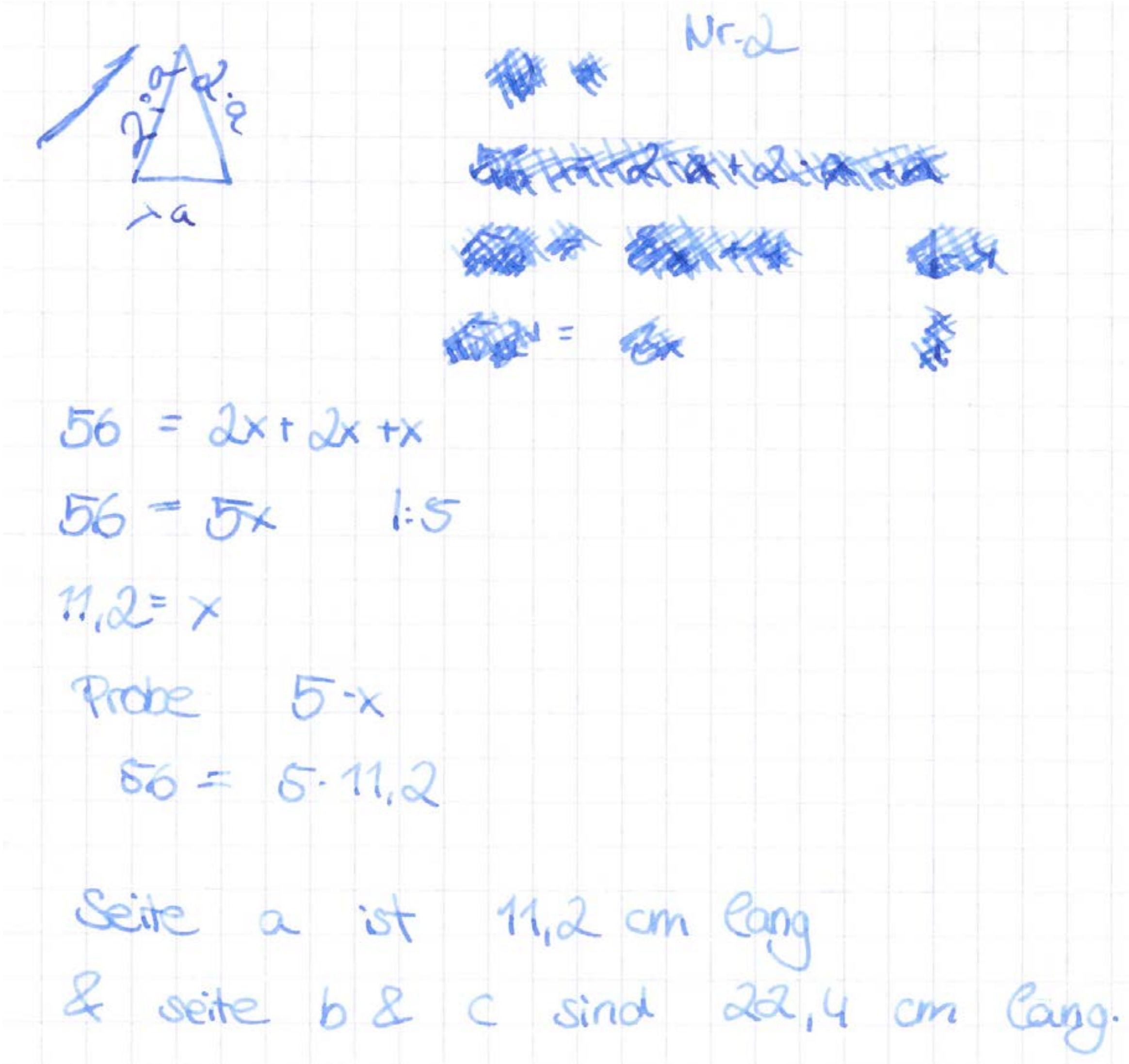


Abbildung 6.19.: Sabines Aufzeichnungen zu Aufgabe 2 von Seite 33 im Buch (Böer et al., 2008)

Episode 6.27: 120116_2_LG12_55: Sabine braucht Bestätigung

Sabine führt Privatgespräche. Die Lehrerin kommt, Sabine dreht sich zu ihr.

63 SBN: (*dreht den Block leicht in Richtung der Lehrerin*) Frau Kahn ich check das imma no ni (*haut mit dem Stift auf den Block, relativ weit oben*) ‚ichab das jetzt nochmal- (*zieht den Stift zurück*) besser aufgeschrieben bei-a- (*deutet auf das Geschriebene oberhalb der Stelle, auf die sie zuvor gezeigt hatte*) (unverständlich) da-
64 L: (*teilweise gleichzeitig*) Ja- ‚und jetzt' ‚was machst du jetzt' ‚zwei x plus zwei x plus x sind'
65 SBN: Fünf x-
66 L: Aha.
67 SBN: Ja- (*notiert mit dem Stift etwas im Bereich des bereits Geschriebenen*) (...) ‚fünf x (*mit hoher Stimme*) ‚jetzt einfach geteilt nehm'
68 L: (*schaut zu Sabine auf, nickt, flüstert*) Ja.
69 SBN: (*schreibt weiter*) A-h- ‚geteilt durch fünf- (*atmet tief ein*) (..) (*zieht den Stift zurück*) ‚ja rechne ich aus okay okay. ‚dankeschön. (*setzt die Kappe auf den Stift, die Lehrerin richtet sich auf und geht weg, Sabine nimmt sich einen Taschenrechner vom Nachbartisch und gibt etwas ein*) (8sec) (*nimmt den Stift in die Hand*) ‚AH (*singt, wackelt mit dem Oberkörper*) ditditdadadadadadadam-
70 RCO: (*teilweise gleichzeitig*) Hast du jetzt'
71 SBN: (*direkt übergehend aus dem Gesang*) Ja. (*beginnt zu schreiben*)

Eigentlich kann Sabine hier alle Schritte selbst ausführen. Die Bestätigung der Lehrerin scheint aber elementar: Zunächst arbeitet sie gar nicht weiter (vor der dargestellten Episode). Die Lehrerin gibt Sabine Bestätigung für die durchzuführenden Schritte (64, 66, 68) und die Gelegenheit, ihr Handeln darzustellen: „geteilt durch fünf- (*atmet tief ein*) (..) (*zieht den Stift zurück*) ‚ja rechne ich aus okay okay." (69) Am Ende steht wieder Freude über den Abschluss der Rechnung (69-71), die offenbar nicht durch die geringe Eigenständigkeit beeinträchtigt ist.

Ein Beispiel aus der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

Es erscheint wahrscheinlich, dass die gegenseitige Beeinflussung von Emotionen und Lernen, die in diesem Abschnitt beschrieben wurden, nicht auf das Lernen in Bezug auf lineare Gleichungen beschränkt ist, sondern dass auch bezüglich anderer algebraischer Strukturen das Erlebnis, eine neue Sicht zu gewinnen – oder eben nicht – mit emotionalen Reaktionen verknüpft ist, die sich ihrerseits wiederum auf das Interesse an einer weiteren Beschäftigung mit dem Thema auswirken. Tatsächlich finden sich in den Daten aus der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen an mehreren Stellen Belege, dass dieser Zusammenhang auch hier gilt. In der folgenden Episode, die als ein Beispiel dienen soll, liegt folgende Situation vor: Es wurde ausgehend von einer Wertetabelle ein Graph in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Aus diesem soll jetzt der Term der Funktion hergeleitet werden, und Katie nennt, nachdem sie von der Lehrerin aufgerufen wurde, $2 \cdot x + 2$ als Lösung (2). Es besteht aber Uneinigkeit unter den Schülerinnen und Schülern – viele sind (richtigerweise) der Ansicht, dass die von Katie angenommene Steigung nicht korrekt ist:

Episode 6.28: 120424_3_LZ7_26: „ach ich check gar nix mehr.“

1 L: Katie-
2 KTI: (*legt sich den rechten Arm, mit dem sie sich vorher gemeldet hatte, auf ihre linke Schulter*) Zwei mal x ä-h-m ähm m (*stützt sich mit beiden Armen auf, lächelt*) ,zwei mal x plus zwei' ,oder-
3 SX1: Ja.
4 SX2: Vier mal x hab ich.
5 SX3: (*gleichzeitig*) Vier. (*es entsteht Unruhe in der Klasse, mehrere Schülerinnen und Schüler äußern sich für und wider die beiden genannten Optionen*)
6 KTI: Achs v- (*hält die Hände offen vor sich*) ,hä was'
7 SX3: (*gleichzeitig*) Is vier oder nich'
8 L: Ja. ,zwei mal oder vier mal. (*Katie führt die Hände wieder zusammen, lässt die Arme aufgestützt*)
9 SX4: Viermal.
10 KLY: Keine Ahnung ,einmal.
11 SX4: (*gleichzeitig weitere Äußerungen, lauter als vorher*) Viermal.
12 SX5: ZWEI MAL.
13 SX3: Zwei mal.
14 MRI: Mann warum- zwei mal da steht doch pro Sekunde da unten. (*allgemeine Unruhe, keine einzelnen Äußerungen mehr unterscheidbar*)
15 HBT: Du musst ,du machst doch zwei daz-u-
16 KTI: Hä aber Frau Kahn (*lässt die Arme auf den Tisch sinken, es wird noch unruhiger in der Klasse, keine einzelnen Äußerungen unterscheidbar*) hä' (unverständlich) (*deutet mit der rechten Hand nach vorne, lacht, lässt die Schultern sinken, lässt dann den Arm auf den Tisch fallen*) ,ach ich check gar nix mehr. (*macht ein trauriges Gesicht, greift nach dem (geschlossenen) Buch, dreht es auf dem Tisch, schaut noch einmal kurz auf, dann wieder auf das Buch, gleichzeitig rufen Schülerinnen und Schüler „zwei“ und „vier“*)
17 L: (*sehr langgezogen*) Ps-c-h-
18 SX6: FÜNF- (*Katie lacht auf, weiter große Unruhe*)
19 L: So jetzt mal mit der Ruhe.
20 KTI: (*gleichzeitig, hebt den Buchdeckel an und lässt ihn wieder fallen, dreht sich zu Kelly*) Was hast du als (*schaut kurz nach vorne, dann wieder zu Kelly*) ,was hast du als Beruf genomm'

Katies Frage bezieht sich auf eine Hausaufgabe in einem anderen Unterrichtsfach. Als die Ruhe in der Klasse wieder hergestellt ist, endet dieses Gespräch aber auch wieder. Katie verfolgt die folgende Erklärung der Lehrerin, hält dabei das Buch vor sich. Letztlich äußert sie noch einmal "Hä-ünd kopiert dann die korrekte Lösung von der Tafel.

Die Tatsache, dass der von Katie vorgetragene Term offenbar nicht von allen Mitschülerinnen und Mitschülern als korrekt angesehen wird (ab Zeile 4) und ihr Versuch, ihre Sichtweise darzulegen letztlich in der Unruhe der Klasse untergeht (16), führt bei Katie zu deutlich sichtbarer Resignation: In ihrem Gesicht lässt sich Traurtigkeit erkennen, sie lässt ihre Arme sinken und ihre Schultern hängen. In diesem Kontext kann auch ihr Lachen so gedeutet werden, dass es eigentlich negative Emotionen überspielen soll. Die verbale Äußerung verbindet die sichtbare emotionale Reaktion mit dem Gefühl, dass Katie bezüglich des mathematischen Inhalts hat: „ach ich check gar nix mehr." (16) Die folgenden Handlungen der Schülerin lassen sich als ein Ausstieg deuten: Sie bewegt das Buch mit der Hand und richtet ihre Augen auf dieses (16), lacht über die die chaotische Situation persiflierende Äußerung eines Mitschülers (18) und beginnt mit ihrer Sitznachbarin ein Gespräch über ein anderes Unterrichtsfach (20). Auch nachdem sich die Klasse beruhigt hat, wird sie nicht wieder aktive Teilnehmerin, sondern nimmt lediglich die Information entgegen, dass der von ihr genannte Term in der Tat nicht korrekt war. Es deutet nichts darauf hin, dass sie versteht, warum dies so ist.

Auch hier führt also die Erfahrung, etwas an der algebraischen Struktur nicht so gut zu sehen wie andere zu Frustration, die ihrerseits wiederum dazu führt, dass eine weitere Beschäftigung mit der Problematik ausbleibt.

6.2.2. Längerfristige Rollenfestlegungen und die Ausbildung von Struktursinn

Von den bisher besprochenen, situativen emotionalen Äußerungen im Zusammenhang mit der Ausbildung von algebraischem Struktursinn sind längerfristige Rollenfestlegungen zu unterscheiden, die bei den beobachteten Schülerinnen und Schülern in der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen rekonstruiert werden konnten. Sie haben sichtbare Auswirkungen darauf, welchen Raum die Erkenntnisse der jeweiligen Schülerinnen und Schüler in der Interaktion einnehmen.

Rollenverständnis bei Sabine und Herbert

Schon in der ersten Unterrichtsstunde, nachdem die Schülerinnen und Schüler das Verfahren zum Lösen der Streichholzschachtelgleichungen erschlossen haben und sie sich den Aufgaben von Aufgabenblatt 1 zuwenden, lässt sich ein deutlicher Unterschied zwischen der Arbeitshaltung von Sabine und der von Herbert beschreiben. In Episode 111205_2_LG1_54,57 (siehe Seite 199) unterstützt Sabine willig ihren Sitznachbarn, beim zweiten Mal sogar ohne seine explizite Aufforderung (209). Sie ist selbstbewusst, vielleicht sogar stolz (besonders augenfällig in 211 und erkennbar am langen Monolog in 223, aber auch anhand der allgemeinen Körperhaltung). Herbert hingegen wirkt müde (gähnt, 210) und unmotiviert (195, 205, 207, 210, 220). Immer wieder schaut er Sabine an (197, 199, 201-203, 207, 218, 220) und übergibt ihr so die Verantwortung für das weitere Vorgehen. Bemerkenswert ist

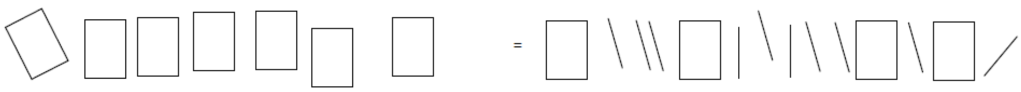


Abbildung 6.20.: Aufgabe D von Aufgabenblatt 2: Auf der linken Seite befinden sich 7 Schachteln, auf der rechten Seite 4 Schachteln und 10 Streichhölzer.

Sabines Endmonolog (223), in dem sie zwei komplette Sätze ausformuliert. Dies kann als ein Anzeichen für eine hohe Sicherheit gewertet werden.

Diese Rollenverteilung setzt sich in späteren Stunden fort. Sabine ist in Klassengesprächen häufig präsent und bringt sich auch ohne Aufforderung ein. Herbert hingegen bleibt nicht nur gegenüber seiner Sitznachbarin, sondern auch gegenüber anderen Mitschülern häufig ungehört, etwa in der bereits dargestellten Episode 111209_2_LG3_28 (siehe Seite 180). Hier bemüht er sich, an der Situation teilzuhaben, wird aber in der Interaktion als nichtwissend konstruiert. Er mischt sich hier in eine Situation ein, in der Ahmed zunächst Paul als Gesprächspartner auswählt (48). Als Ahmed seine Frage an die umliegenden Schülerinnen und Schüler richtet (52), antwortet Herbert, obwohl er gar nicht zum gesuchten Kreis derer gehört, die die Aufgabe C bereits bearbeiten (53). Er fragt zweimal nach, worum es ginge (53, 56), wird aber weiter ignoriert (57-58). Erst als Ahmed die Problematik der Lehrerin kurz schildert (59), kann Herbert eine Äußerung einbringen (61), die von Ahmed mit einer Reaktion gewürdigt wird (62).

Rollenverständnis bei Ahmed und Katie

Bei Ahmed und Katie lässt sich ebenso eine Ungleichheit der Rollen feststellen: Hier gilt Ahmed als der kompetentere Schüler.[5] Ein Beispiel liefert die folgende kurze Episode, in der Katie und Ahmed sich bezüglich Gleichung D von Aufgabenblatt 2 (siehe Abbildung 6.20) austauschen:

Episode 6.29: 111212_3_LG4_26: Katies und Ahmeds Rollen

1 AMD: (*schaut Katie an, die schaut noch auf ihr Blatt*) Ich check nich wie man das aufschreibt' ,ey' (*Katie schaut Ahmed an*) ,chab
2 KTI: Ich weiß auch nich wie i aufschreiben soll ich frag mich grad (*zeigt mit dem Stift auf Ahmeds Aufzeichnungen*) ob ich hier unten minus sieben hinschreiben muss. (*zieht den Stift zurück, schaut Ahmed an*) ,minus sieben (*tippt mit dem Stift nochmals auf die gleiche Stelle*) Streichhölzer-
3 AMD: Quatsch-
4 KTI: Ja wo soll ich das sonst hinschreiben'
5 AMD: Gar nich minus Streichhölzer-
6 KTI: Aber was machst du denn (*zeigt mit dem Stift auf Ahmeds Aufzeichnungen*) da bei den- ,minus vier Schachteln.
7 AMD: (*synchron*) Minus vier Schachteln. (....)

[5] In diesem Fall wird die Rollenkonstruktion durch die Einteilung in E-Kurs und G-Kurs gestützt.

> 8 KTI: Aber dann sind ja (*umkreist mit dem Stift etwas in ihren Aufzeichnungen*) diese ganzen Schachteln weg' (*schaut Ahmed an*)
> 9 AMD: Ja und' (.) ‚man hat doch noch die- ‚die Zahl die ‚die die (*deutet mit der linken Hand Anführungszeichen an*) ‚Streich-höl-zer- (*klopft mehrfach auf den Tisch, Katie beginnt in ihren Aufzeichnungen zu schreiben*) (...) ‚und jetzt müssen wir einfach zehn geteilt durch drei aber ich weiß nich ob man das so aufschreiben soll- (*beide Schüler beginnen zu schreiben*)

Es handelt sich hier um eine Episode, in der die Schülerinnen und Schüler kaum auf ihre jeweils unterschiedlichen Situationen eingehen. Beide haben ihr eigenes Problem, für das sie eine Lösung verlangen: Während Katie nicht weiß, wie sie die Gleichung vereinfachen kann (2), ist Ahmed bereits einen Schritt weiter und möchte eigentlich klären, wie er die Lösung notieren soll, die ihm bereits bekannt ist (1, 9). Ahmed tut Katies Vorschlag schlichtweg als „Quatsch" ab (3) und nennt ihr direkt sein Vorgehen (5-7). Dann kommt er wieder zu seiner Frage (9). Dass er dabei die abschließende Rechnung als „einfach" bezeichnet, obwohl klar ist, dass Katie noch nicht so weit ist, lässt ihn ihr gegenüber als fachlich überlegen erscheinen.

Ahmeds pflegt seine Rolle als kompetenter Schüler nicht nur gegenüber Katie, sondern auch gegenüber anderen Mitschülerinnen und Mitschülern. So lässt sich zu Beginn der bereits dargestellten Episode 111209_3_LG3_14 (siehe Seite 209) beobachten, wie sich gleich mehrere Mitschülerinnen und Mitschüler gleichzeitig an ihn wenden (36-43). Er wehrt sich dagegen; indem er die zwei Fragenden Sabine und Rico als „alle" anspricht (41) lässt er allerdings selbst den Eindruck entstehen, sein Rat sei sehr gefragt.

Weil Katie anders als Herbert immer wieder ein deutliches Interesse zeigt, mit ihrem Nachbarn zusammenzuarbeiten, das von Ahmed kaum aufgenommen wird, kommt es zu Konflikten, etwa in Episode 120109_3_LG10_11-12 (siehe Seite 186). Katie versucht hier mehrmals, sich einzubringen (18, 27-29). Dies scheitert aber zum einen daran, dass Ahmed die direkt an ihn gerichteten Fragen entweder direkt ablehnend beantwortet, ohne Katie mehr einzubinden (20), oder gar nicht darauf eingeht (28-30). Zum anderen hat Katie aber auch inhaltlich Probleme, Ahmeds Vorgehen zu folgen, das zumindest in der ersten Phase (3-12) aus durchaus nachvollziehbaren Rechnungen besteht. Auf ihren fachlichen und sozialen Ausschluss reagiert Katie mit Äußerungen, die lokutionär eine Bewunderung für Ahmeds Können ausdrücken (15, 23, 31, 33), illokutionär aber eher als Ausdruck von Frustration zu deuten sind. Katies Frage „Wieso kannst du gut im Kopf rechnen'" (15, ganz ähnlich 33) ließe sich fortsetzen: „und ich nicht?". Perlokutionär sorgt dies bei Ahmed für Verlegenheit, die er durch wegwerfende Entgegnungen (17, 24) überspielt beziehungsweise komplett übergeht (32, 34). So trägt auch die Interaktion in dieser Episode zur Verfestigung von Rollenkonstruktionen bei. Auch außerhalb der Interaktion mit Katie vermittelt Ahmed eine hohe Selbstsicherheit. Er teilt dem Forscher mit, dass er fertig sei, bevor dies wirklich der Fall ist (32) und setzt sich so dem Risiko aus, dass seine Rechnungen am Ende doch nicht zum gewünschten Ergebnis führen. Auf die Aufforderung, eine Probe zu machen (37), reagiert er irritiert (38) – die Möglichkeit, einen Fehler gemacht zu haben, hatte er bisher wohl nicht in Betracht gezogen.

Die Rollenverteilung ist aber nicht nur unangenehm für Katie. Indem Ahmed sich als kompetent inszeniert, wird sie durchaus in ihrer Entwicklung gehemmt. In der ersten Unterrichtsstunde, als er diverse Lösungsansätze behauptet (Episode 111205_3_LG1_20, siehe Seite 149, sowie Episode 111205_3_LG1_21-23, siehe Seite 150), ist Katie für ihren Sitznachbarn offenbar keine Partnerin, von deren Mitarbeit er sich etwas verspricht; er arbeitet an ihr vorbei. Zentral ist vielmehr die Lehrerin, nach der er ruft (15). Auf Katies Nachfrage nach der exakten Anzahl der Streichhölzer in den einzelnen Schachteln antwortet Ahmed: „Is doch eg-a-l- ‚darum gehts gar nich-“ (27). Für Katie wäre dies zu Recht eine interessante Frage: Katie versteht nicht, wieso Ahmed hier so undeutlich bleibt, sie interessiert sich für die Logik, die dem Verteilen zugrunde liegt und gibt sich große Mühe, ihre Gedanken deutlich zu machen (mehrere Formulierungsversuche, 26). Auf Ahmeds harsche Ablehnung hin verfällt sie in Untätigkeit. Sie beißt die Lippen zusammen, schaut Ahmed an, greift nach der Tischkante (27), stützt sich auf und stöhnt auf (28) – zusammengenommen Anzeichen von Frustration, Ratlosigkeit, Verlegenheit, Erschöpfung und Unbehagen.

Rollenwahrnehmung durch die Lehrkraft

Die Rolle, in der die Schülerinnen und Schüler sich selbst sehen und von der Lehrkraft gesehen werden, nimmt Einfluss auf ihre Chancen zu Lernsituationen. Dies lässt sich in der Kontrastierung zweier Episoden aus der gleichen Unterrichtsstunde nachweisen, in der die Lehrerin einmal von Sabine und einmal von Katie um Hilfe gebeten wird. Bei Katie geht es um die Bearbeitung von Aufgabe 13 b) auf Seite 28 im Schulbuch (Böer et al., 2008). Die Schülerin hat die zu lösende Gleichung $4x - 20 - 24 = 9x - 2 - -3x$ bereits zu $4 = 2x - 2$ vereinfacht.

Episode 6.30: 111219_3_LG7_30: „Nee. ‚du musst ja-“

1 KTI: (*schaut zur Lehrerin auf, die bislang unbeteiligt hinter Katie stand, dann auf ihr Blatt, die Lehrerin wendet sich Katie zu*) Ich versteh ‚ich komm nich mehr weiter- (*zeigt mit dem Stift auf ihren Block, etwa in der Mitte, die Lehrerin stützt sich auf Katies Stuhl auf und schaut auf den Block*) (...) (*zeigt auf mehrere Stellen auf dem Blatt, wieder ungefähr in der Mitte*) ‚wenn i jetz wegnehme-
2 L: Nee. (*zeigt mit dem rechten Zeigefinger auf eine Stelle in der Gegend, in der Katie zuvor gezeigt hat, wahrscheinlich auf die linke Seite der entsprechenden Gleichung*) ‚du musst ja- ‚du hast hier jetzt minus zwei stehn ne-
3 KTI: (*gleichzeitig, hält sich den Stift an den Kopf*) Ja.
4 L: Genau. ‚du musst jetzt- um- ‚du musst ja (*schaut Katie an, zeigt weiterhin auf die gleiche Stelle*) hier auf null komm- ‚was musst du dann rechnen- (*Katie hält sich weiterhin den Stift an den Kopf, summt leise*) (...) ‚um auf null zu komm.
5 KTI: (*zeigt mit dem Stift kurz auf eine Stelle knapp neben dem Finger der Lehrerin*) Vier oder wie- (*schaut kurz zur Lehrerin auf, dann wieder auf den Block*)
6 L: Nee- (*Katie hält sich wieder den Stift an die Stirn*) ‚du bist bei minus zwei (*geht mit der rechten Hand in einem Bogen nach links und setzt dort alle Finger auf dem Tisch auf*) und (*bewegt die Hand einen halben Bogen zurück zur Mitte, macht dort eine wischende Bewegung, Katie schaut wieder kurz zur Lehrerin auf*) die willst du ja

weghaben-
7 KTI: Ja.
8 L: Ja. ,wenn du jetzt minus zwei (*zeigt relativ weit rechts, bewegt dann den Finger weiter nach links*) rechnen würdest wärst du hier bei minus vier (*schaut Katie an, Katie schaut auf den Block*) dann wär die ja nich weg- (.) ,du willst sie ja weghaben das heißt wir müssen (*setzt den Zeige- und Mittelfinger auf die Kante des Tisches auf*) da auf null komm- (*lässt die Finger zusammenklappen*) ,wie kommst du (*setzt nun die Fingerknöchel auf den Tisch auf und lässt sie so nach vorne klappen, dass die ganze Faust auf dem Tisch liegt*) von minus zwei auf null- (*lässt die Hand unverändert auf dem Tisch liegen, schaut Katie an, Katie schaut weiterhin auf den Block*) (...) (*kratzt sich am Kopf*) ,indem du (*Katie schaut kurz zur Lehrerin auf*) was rechnest'
9 KTI: Plus' (*wendet die Handfläche nach oben*) ,oder wie-
10 L: (*teilweise gleichzeitig, nickt*) Plus zwei- ,genau. (.) ,das heißt du musst (*zeigt auf die Gleichung, relativ weit rechts*) hier plus zwei rechnen- (*Katie öffnet ihren Stift und setzt ihn an*) (..) (*Katie schreibt rechts weiter*) ,dann hast du (*zeigt weiter links*) hier' diese zwei weg das wolln wir ja- ne'
11 KTI: (*gleichzeitig, stützt sich wieder auf*) Ja-
12 L: (*zeigt noch weiter links*) Dann hast du hier nur noch zwei x stehn und (*zeigt noch weiter nach links*) hier hast du dann- (..)
13 KTI: Zwei' (*entfernt ihre Hand leicht vom Kopf, Handfläche nach oben*)
14 L: (*bewegt den Zeigefinger kurz an das Ende der Zeile, dann wieder zurück auf die linke Seite*) Nee vier plus zwei'
15 KTI: Achso' ,sechs.
16 L: Ja sechs (*bewegt den Finger leicht nach rechts, zieht dann die Hand zurück und richtet sich auf*) is gleich zwei x hast du dann da stehn ne' (*Katie dreht den Block um 90° und beginnt zu schreiben, die Lehrerin wendet sich dem Nachbartisch zu*)

Auffällig ist, wie schnell die Lehrerin Katies Schilderung ihres Problems unterbricht. Das Verb „wegnehmen“, das Katie verwendet (1), ist für sie bereits Anlass genug, zu intervenieren. Dabei spricht die Lehrerin davon, Katie wolle die „minus zwei“ „weghaben“ (6). Es hätte also durchaus die Möglichkeit bestanden, Katies persönliche Situation zu würdigen und daran anzuknüpfen, stattdessen beschreibt die Lehrerin die Situation aus ihrer Sicht (2-6). Sie übernimmt die Aufgabe, das Handlungsziel zu formulieren („auf null kommen“, 4; „die minus zwei weghaben“, 6, 8). Katie fragt daraufhin nur noch, welche Rechnung nun durchzuführen sei (4). Auf Katies erste Antwort (5) reagiert sie mit einem nochmaligen Durchlauf (bereits beschrieben, 6-8), geht also auch hier nicht auf die möglichen Vorstellungen ein, die mit Katies Äußerungen verbunden sind. Nachdem Katie schließlich die gewünschte Rechenoperation nennt (9), übernimmt wieder die Lehrerin die eigentliche Formulierung nebst der Erklärung, inwiefern das Ziel durch diese Handlung erreicht wird (10). Schließlich leistet die Lehrerin auch die Formulierung der Gleichung nach der nun durchgeführten Umformung (12-16), Katie nennt dabei lediglich Teilergebnisse.

Es lässt sich also sagen, dass hier eigentlich die Lehrerin das Handeln übernimmt, zu dem sie die Schülerin anregen will. Keine von Katies Äußerungen bildet einen vollständigen Satz. Ihre erste Äußerung wird wie beschrieben sofort unterbrochen (1-2). In den meisten

Äußerungen danach bestätigt sie lediglich das von der Lehrerin Gesagte (3, 7, 11), in zwei Fällen antwortet sie fragend auf auffordernde Fragen der Lehrerin, wobei ihre Antworten jeweils nur aus einem Wort bestehen und von einem „oder wie-“ begleitet werden (5, 9). In einer weiteren Äußerung geht einer solchen Ein-Wort-Antwort die Phrase „Achso’“ voraus (15).

Da die Lehrerin Katies erwartungswidrige Äußerungen (5, 13) nicht aufgreift, bleiben die dahinter stehenden Vorstellungen der Schülerin undeutlich. Bei der ersten fraglichen Äußerung (5) lässt sich vermuten, dass Katie annimmt, sie müsse von der linken Seite der Gleichung her denken. Die zweite Äußerung (13), in der Katie vermeintlich als Resultat der Rechnung 4 + 2 (12) die Zahl 2 nennt, ist aber sicher nicht auf arithmetische Probleme zurückzuführen: Als die Lehrerin die zu rechnende Aufgabe expliziert, kann Katie das korrekte Ergebnis nennen (14-15). Es ist wohl vielmehr so, dass Katie den von der Lehrerin gedanklich durchgeführten Handlungen (unter dem Druck sich sofort zu äußern) nicht folgen konnte und daher weiterhin von einer Subtraktion (4 − 2) ausgeht. Die in dieser Episode beobachtete Handlungsstruktur ist damit nicht nur sozial unbefriedigend, sondern erzielt auch nicht die erwünschte Lernwirkung bei Katie.

Das unmittelbare Unterbrechen der Schülerin (2) steht in einem Gegensatz zu dem ansonsten beobachteten abwartenden Verhalten der Lehrerin. Die folgende Episode zeigt, dass die Lehrerin Sabine in ihrer individuellen Handlungssituation deutlich mehr Raum gibt. Sabine beschäftigt sich hier mit einer Gleichung mit leerer Lösungsmenge. Sie hatte sie bereits zuvor als Streichholzschachtelgleichung (siehe „Extra-Aufgabenblatt: Wie kann das richtig sein?“) bearbeitet, geht sie nun aber noch einmal in symbolisch-algebraischer Form ($3x + 3 = 3x + 5$) an.

Episode 6.31: 111219_2_LG7_19: Sabine darf ausführlicher erklären

1 SBN: (*legt den Block auf den Tisch, nachdem sie ihn umgedreht hat*) Ja ähm- (*zeigt auf die untere Zeile*) ‚hier. ‚jetzt hab ich da zwei (*zeigt zusätzlich mit dem Stift auf die gleiche Stelle*) und da (*bewegt den Zeigefinger etwas nach links*) drei- und das is- (*hält beide Hände mit den Handflächen nach oben*) ‚ich muss ja noch (*zeigt mit dem linken Zeigefinger kurz nochmals auf die gleiche Stelle*) drei wegnehm- (*hält beide Hände unter dem Tisch*) ‚aber dann hab ich doch (*schlägt mit dem Stift in der rechten Hand auf das Blatt, auf der linken Seite der Gleichung, bewegt dann die Hand wieder unter den Tisch*) auf einer Seite nich mehr- (*Sabine und die Lehrerin schauen auf das Blatt, nach einiger Zeit dreht die Lehrerin den Block etwas zu sich, stützt sich auf dem Tisch auf*) (7sec)

2 HBT: (*arbeitet an einer anderen Aufgabe*) Hä’ (*die Lehrerin legt ihre Hand auf die Stelle, auf die Sabine zuvor gezeigt hatte*) (..) ‚äh- (*kratzt sich am Kopf*)

3 SBN: (*teilweise gleichzeitig, zeigt mit dem Stift auf die Zeile, auf die sie zuvor gezeigt hatte, die Lehrerin zieht ihre Hand zurück, zeigt jetzt wieder auf die untere Zeile*) E-y-wir sind da da- (*Sabine und die Lehrerin schauen auf das Blatt, Herbert äußert, dass er jetzt Hilfe braucht, beginnt dann Privatgespräche mit Khanh, Sabine dreht sich zu ihnen um*) (10sec)

4 L: Ja dann ähm- (*Sabine dreht sich wieder zur Lehrerin, schaut auf das Blatt*) ‚was hast du denn hier geschrieben- (*hebt den Block halb an, zieht die Mappe darunter hervor*) (.)
5 SBN: Was'
6 L: Was hattest du denn hier' (*zeigt unten auf das Aufgabenblatt*)
7 SBN: (*bewegt die Hand über das Aufgabenblatt, keine eindeutige Zeigegeste*) Das is-
8 L: Fürn Ergebnis-
9 SBN: (*zeigt mit der ganzen Hand, Handfläche nach oben, auf den unteren Teil des Aufgabenblattes*) Ja das Er ‚ich musste das doch noch gar nich ausrechnen- (*Sabine und die Lehrerin schauen auf das Aufgabenblatt*) (..) ‚achso verdammt. das hab ich gar nich gemacht.
10 L: (*hält die Mappe so, dass ihr linker Daumen an der unteren linken Ecke liegt*) Wenn man alle weg- (...) (*zeigt mit dem Zeigefinger auf das Geschriebene, nicht genauer erkennbar*) ‚weg- (*immer leiser, undeutlicher*) legen kann (wird unverständlich) (...) (*zeigt weiterhin mit dem Zeigefinger auf das Geschriebene*) ‚du kannst das nich ausrechnen (*zieht den Finger zurück, schaut Sabine an, Sabine schaut auf das Aufgabenblatt*) hast du geschrieben ne'
11 SBN: (*dazwischen*) Ja-
12 L: (*schaut wieder auf Sabines Block*) Joa- ‚genau- ‚also im Prinzip würde (*zeigt wieder im Block auf die gleiche Stelle wie zuvor*) hier dann ja (*geht die Zeile mit dem Zeigefinger von links nach rechts entlang*) null stehn gleich zwei ne'
13 SBN: (*dazwischen*) Ja.
14 L: Und das is ja- (*wedelt mit der Hand zu sich hin*)
15 SBN: Das geht ja nich-
16 L: (*gestikuliert unbestimmt über dem Block*) Dann mach ‚genau dann (*zeigt wieder auf die letzte Zeile*) schreib das mal hin'
17 SBN: (*nimmt den Block und dreht ihn zu sich*) (.) Was- soll ich denn jetzt hinschreiben-
18 L: (*beginnt eine Geste, bricht sie ab, kratzt sich an der Nase*) Also das- (*zeigt auf das Ende der Zeile*) ‚schreib mal minus drei x' (*Sabine schreibt am Ende der Zeile*) (..) ‚dann schreibst null gleich zwei' (*Sabine schreibt in einer neuen Zeile „0 = 2“*) (.)
19 SBN: Ja-
20 L: (*gleichzeitig*) So und weil das nich g-e-h-t- (*nimmt den Stift aus Sabines Hand*) (.)
21 SBN: (*lässt den Stift mit einer ausladenen Handbewegung gehen*) Wu'
22 L: (*gleichzeitig*) Streicht man einfach das Gleichheitszeichen (*streicht „=“ durch*) durch-
23 SBN: Ah da sind null zwei-
24 L: (*lässt den Stift auf den Tisch fallen, richtet sich auf, relativ leise*) Is ungleich- also is- nich lösbar-
25 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Ah a-h- (*nimmt den Stift auf, streicht sich durch die Haare*) ‚okay' ‚und jetzt. (*legt den Stift auf den Tisch, schaut zur Lehrerin auf*) ‚was soll ich jetzt machen' (...)
26 L: Ähm-

Die Lehrerin lässt Sabine zunächst die von ihr erkannte Problematik ausführen (1) und nimmt sich ausführlich Zeit, sich in ihre Situation hineinzuversetzen (2-3), statt der Schülerin ein Standard-Lösungsverfahren aufzudrängen. Offenbar nimmt die Lehrerin Sabine als eine Schülerin wahr, deren eigene Wege in der Regel ihre Berechtigung haben und auf die sie als Lehrkraft eingehen kann und soll.

Letztlich sind die Unterschiede zwischen der Behandlung von Katie und der von Sabine in diesem Fall irrelevant – auch bei Sabine kommt es letztlich wieder zu einem Dozieren und Diktieren durch die Lehrerin, bei dem Sabine nur eine rezipierende Rolle bleibt (16-19), schließlich übernimmt die Lehrerin sogar den Stift (20-24). Sabine nimmt an den Handlungen nicht mehr Teil, was eine Erklärung dafür sein kann, dass sie ihre Aufmerksamkeit recht schnell der Frage zuwendet, was sie als nächstes tun soll (25) – in der bisherigen Aufgabe gibt es für sie nichts mehr zu tun. Sabines Situation aufzunehmen bestünde hier darin, ihren aktuell vorliegenden Weg zur unerfüllbaren Gleichung $0 = 2$ aufzunehmen und zu klären, dass 0 etwas anderes als „nichts“ ist, hier also durchaus eine Bedeutung hat. So könnte man zu der Erkenntnis kommen, dass die unwahre Aussage die Nichtlösbarkeit der Ausgangsgleichung belegt. Noch interessanter wäre es gewesen, die Ausgangsgleichung $3x + 3 = 3x + 5$ zu betrachten: Schon hier wäre sichtbar, dass es sich um eine unwahre Aussage handelt, unabhängig davon, welchen Wert x annimmt. Dass die Lehrerin stattdessen auf eine vorherige Bearbeitung einer Gleichung mit leerer Lösungsmenge zurückgreift, mag auf Zeitdruck oder mangelnde Übersicht zurückzuführen sein, war aber auch in der Unterrichtsplanung angelegt: Dort wurde die Struktur von Gleichungen als etwas einmal zu Lernendes angenommen hatte, auf das dann immer wieder zurückgegriffen werden könnte. Es zeigt sich jedoch, dass Strukturen mehrfach gesehen werden müssen – die Gelegenheit dazu wird hier verpasst.

Dennoch bleibt festzuhalten, dass Sabines Chancen, ihre eigene Sicht auf die algebraische Struktur einzubringen, höher sind als die von Katie, weil sie eben erst einmal gehört wird. Diese Beobachtung ist äußerst relevant für die im folgenden Abschnitt beschriebene Ausbildung algebraischen Struktursinns als einer gegenseitigen Anpassung zwischen den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Unterrichts.

6.3. Ausbildung algebraischen Struktursinns als Tuning

Die Erkenntnisse des vorherigen Abschnitts mögen auch außerhalb des Faches gelten und somit eher pädagogischer als mathematikdidaktischer Art sein. Es soll nun aber deutlich werden, dass sie mehr noch als bisher herausgestellt direkte Bedeutung für die fachlichen Lernprozesse haben, die im ersten Abschnitt im Mittelpunkt standen. Die fachliche und emotional-soziale Seite der Ausbildung algebraischen Struktursinns sind eng miteinander verwoben und lassen sich zusammen als *Tuning* beschreiben. Gemeint ist damit, dass sich die Schülerinnen und Schüler untereinander und mit der Lehrkraft auf die Tätigkeit *einstellen.*

6.3.1. Beispiele für Tuning

Als Musterbeispiel für diesen Prozess lässt sich die bereits mehrfach referenzierte Episode 111205_2_LG1_43 (siehe Seite 118) heranziehen: Hier ist zu sehen, wie sehr das Verstehen der Situation und die Ausrichtung auf das Tätigkeitsmotiv eben auch ein sozialer und von Emotionen begleiteter Prozess ist. Das Bindeglied ist die Sprache; die Interaktion zwischen Sabine und Herbert einerseits und der Lehrerin andererseits steht unter der Überschrift: „Wie reden wir über diese algebraische Struktur?“ Im Beispiel orientiert sich die Lehrerin bereits früh auf das „weg packen“ (151). Dies wird von Sabine und Herbert zunächst scheinbar ignoriert. Sabine nimmt das Wort nicht auf (152), und auch die zweite Intervention, in der die Lehrerin das Wort sogar zweimal sagt (153) übergeht Sabine und springt zur Division (154). Im dritten Durchgang jedoch sprechen sowohl Sabine (173, 177) als auch Herbert (176) von weglegen bzw. wegpacken. Dies wiederum ermöglicht der Lehrerin, auf weitere Details einzugehen und von Herbert die korrektere Formulierung ("gleichviele ah- Kästchen"(176) statt wie bei Sabine "die gleichen Kästchen"(177)) zu übernehmen (178).

Ein ähnlicher Vorgang lässt sich in Bezug auf das schrittweise Vorgehen beobachten, für das sich die Lehrerin stark macht. In Zeile 161 wird dieses von Sabine antizipiert, ihre Formulierung „Ja und dann-“ gleicht fast der der Lehrerin („So und dann-“, 162). Das Verwenden solcher strukturierender Wörter taucht auch in den weiteren Beschreibungen auf (175, 181). Dies stellt einen Kontrast zu den ersten Beschreibungen dar, wo die einzelnen Handlungen unverbunden nebeneinander standen (143, 148) – hier kommt der nächste Schritt jeweils unvermittelt, nicht zeitlich getrennt von der vorherigen Handlung.

Bereits diskutiert wurde die Zärtlichkeit, mit der die Lehrerin den Prozess abschließt (182, 188, siehe Seite 246). Dieses Verhalten lässt sich als dem Tuning zugehörig verstehen.

Dafür, dass Tuning auch unter Schülerinnen und Schülern stattfindet, gibt es in den Daten nur wenige Belege. Episode 111205_3_LG1_44-59_2 (siehe Seite 152) könnte man so deuten: Hier ist Sabine in der Rolle, die sonst die Lehrerin einnimmt. Doch gleichzeitig ist sie weiterhin in die Erkundung der Tätigkeit eingebunden, es ist nicht ihre primäre Aufgabe, ihren Mitschülerinnen und Mitschülern das Erkunden zu ermöglichen. Dazu kommt, dass Sabines Äußerungen weniger Vertrauen entgegengebracht wird als denen der Lehrerin: Ahmed möchte letztlich lieber die Lehrerin fragen (93). Dennoch hat Sabine einen Vorsprung, den die anderen anerkennen, indem sie ihr zuhören und versuchen, ihr Vorgehen nachzuvollziehen (siehe insbesondere Zeile 84-90).

Die Hypothese, dass auch hier Tuning stattgefunden hat, wird gestützt durch Episode 111205_3_LG1_44-59_4 (siehe Seite 156), in der Ahmed und Katie der Lehrerin gegenüber das von Sabine vorgeschlagene Vorgehen wiedergeben. Ahmed reproduziert bereits in seiner ersten inhaltlichen Äußerung (137) Sabines Gesten, die auf die beiden Seiten der Gleichung verweisen und die Anzahl der zu entfernenden Streichhölzer begründen helfen; in seinem zweiten Erklärungsansatz (151) wiederholen diese sich. In beiden Durchgängen deutet Ahmed zuerst auf die Streichhölzer auf der linken Seite, die entfernt werden sollen (was er hier noch nicht ausspricht), und dann auf die Streichhölzer auf der rechten Seite. Die Aufmerksamkeit wird hier auf ein strukturelles Merkmal gelegt, nämlich die Anzahl der Streichhölzer auf der rechten Seite. Es fällt Ahmed jedoch schwer zu artikulieren, wieso diese Anzahl wichtig ist, er weist in beiden Fällen nur auf die Anzahl 5 hin – und somit auf einen *Zustand*. Die Lehrerin möchte aber eine *Handlung* genannt bekommen („Was macht ihr mit denen-“, 152), daraufhin nennt Ahmed diese, führt sie aus und nennt die Begründung: „Diet (*schiebt die beiden Stapel parallel in Richtung der oberen Tischkante*)

‚könn wir erstmal wegtun weil das ja gleichviel sind.“ (153) Es ist für Ahmed also hilfreich, in die Sprache des Tuns zu kommen, während er vorher in einer Sprache verharrte, die lediglich Zustände beschrieb.

Gleichzeitig lässt sich hier auch wieder Tuning zwischen Ahmed und der Lehrerin feststellen. Die Lehrerin geht auf Ahmeds Schilderungen ein, fordert aber auch die Explizierung von Handlungszielen und Tätigkeitsmotiven heraus: Neben der bereits benannten expliziten Aufforderung lässt sich auch das „J-a.“ (156) als eine Bestätigung und eine Herausforderung zum Fortfahren interpretieren. Wie schon vorher bei Sabine und Herbert reformuliert die Lehrerin die zentrale Handlung („Achso die macht ihr auf beiden Seiten weg.“, 154), nennt dabei wieder das Schlüsselwort „weg“ und betont, dass die Handlung auf beiden Seiten ausgeführt wird.

Ahmeds Vorgehen, bei dem er die Anzahl der Streichhölzer als bekannt voraussetzt, lässt sich auf Sabines vorherige Erklärung zurückführen, in der sie die Lösung sieht und die dahinter stehende Argumentation nicht explizit macht. Ahmed ist zu dem Schluss gekommen, dass sich die Lösung lediglich verifizieren lässt, wenn man sie durch Raten oder durch Hineinschauen in die Schachteln bereits kennt. Aufgrund dieser Fehlannahme ist eine weitere Klärung zwischen der Lehrerin und Ahmed über Handlungen, Ziele, Regeln, Gesten notwendig – sie erfolgt in Episode 111205_3_LG1_44-59_5 (siehe Seite 157). Weiterhin lässt sich das Zusammenspiel zwischen der Lehrerin einerseits und Ahmed und Katie (wird ab 164 durch die Lehrerin eingebunden) andererseits als Tuning beschreiben. Die Lehrerin rekapituliert zunächst die Situation: Ausgehend davon, dass eben noch nicht bekannt ist, wie viele Streichhölzer in den Schachteln sind (158), initiiert sie die Überlegung, was stattdessen getan werden kann, wobei sie durch den unvollendeten Satz suggeriert, dass weiterhin weggenommen werden muss (162). Hier kommt also wiederum das Schlüsselwort „wegnehmen“ vor. Die Lehrerin macht deutlich, in welchem Rahmen, unter welchen Regeln gehandelt werden kann, und auf welche Objekte sich die Handlungen beziehen. So werden jetzt die Streichholzschachteln („Kisten“) zu Objekten, auf die sich Handlungen beziehen können, und es ist unmittelbar klar, dass auch hier „wegnehmen“ angesagt ist. Die Anschlussfrage „Wie viele- kann ich wegnehm’“ (162) setzt diese Objektorientierung fort und macht deutlich, dass auch die Anzahl der Objekte relevant ist.

Besonders interessant ist die Verwendung des Wortes „gleich“ in dieser Episode:[6] Ahmed leitet diesen Diskurs ein, indem er für beide Seiten separat angibt, dass jeweils zwei Streichhölzer weggenommen werden müssen (163) – die Lehrerin bringt daraufhin „gleich“ in einer ersten Bedeutung ein: „Und da zwei. ‚also immer gleich viele ne’“ (164) Hier geht es darum, dass die *Umformung auf beiden Seiten gleich ausgeführt* werden muss. In der Begründung wird auf eine weitere Bedeutung von „gleich“ zugegriffen. Sie bezieht sich auf die *Erhaltung der Äquivalenz der Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens unter der Umformung*: „Weil das muss ja gleich bleiben“ (167). Dass dies dazu führt, dass dann in der nun erhaltenen Gleichung *Äquivalenz der Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gilt* (eine dritte mögliche Bedeutung des Wortes „gleich“), macht Katie explizit. Sie erkennt, dass in den zwei verbleibenden Streichholzschachteln „hier da auch vier drin

[6]Die in diesem Absatz dargestellten Erkenntnisse wurden in gemeinsamen Analysen mit Luis Radford gewonnen.

sind-“ (170). Die Lehrerin unterstützt diese Einsicht, indem sie die beiden Seiten gestisch und in ihrer Wortwahl als Objekte identifiziert, die zueinander gleich sind beziehungsweise gleich sein müssen (175). Dies geschieht zu einem Zeitpunkt, zu dem Ahmed schon eine vierte Bedeutung von Gleichheit in diesem Kontext aufgreift. Diese ist notwendig, um zu begründen, wie viele Streichhölzer in den einzelnen Schachteln sind. Dazu muss man wissen, dass *in jeder Schachteln die gleiche Anzahl an Streichhölzern* enthalten ist – Ahmed zeigt dieses Verständnis in Zeile 174. Dies ist die Basis für die abschließende Division.[7]

Das Beispiel der vielfältigen Bedeutung von Gleichheit in diesem Kontext illustriert, wieso Tuning notwendig ist und worin es besteht: Die Tätigkeit mit einer bisher unbekannten algebraischen Struktur konfrontiert die Schülerinnen und Schüler mit einer neuen, unübersichtlichen Situation, in der es schnell zu Frustration kommen kann, die eine weitere Beschäftigung verhindert. Aufgabe der Lehrkraft (und manchmal von Mitschülerinnen und Mitschülern, die bereits weiter fortgeschritten sind) ist es nun, Orientierung zu geben. Dies geschieht aber nicht von oben herab, sondern aus der Situation der Schülerinnen und Schüler heraus: Präzisierungen werden eingefordert, Formulierungen und Gesten angeboten und aufeinander abgestimmt. Ziel ist eine gemeinsame, fachlich angemessene Sicht auf die vorliegende Situation und eine Ermöglichung der intendierten Tätigkeit. Dies ist freilich eine sehr anspruchsvolle Aufgabe, und die Empirie zeigt, dass Tuning äußerst fragil ist.

6.3.2. Fragilität von Tuning

Die Fragilität von Tuning wird anhand eines erneuten Blicks auf die unmittelbar anschließende Episode 111205_3_LG1_44-59_6 (siehe Seite 160) deutlich. Die vierte Aufforderung, eine Rechnung zu nennen, die die Lehrerin im Gegensatz zu den vorherigen dreien (171, 173, 177) nicht mehr als Frage formuliert, sondern als Aussage über ihren Wunsch („„die Rechnung will ich einmal hörn-“, 183), führt zu zwei Versuchen von Ahmed, in denen er Rechnungen nennt. Es gibt hier keine geteilte Aufmerksamkeit mehr – Ahmed kann nur raten. Seine Begründung für seinen ersten Versuch lässt die Lehrerin ihn nicht ausführen, sie unterbricht ihn und nennt als Gegenargument das Ergebnis der von ihm vorgeschlagenen Rechnung und die Tatsache, dass in der vorliegenden Situation die Zahl 1 nicht enthalten ist (184-185). Die Lehrerin ist hier anders als in der vorherigen Episode nur noch auf die vorliegenden Zahlen fixiert. Was die gesuchte Rechenoperation in Bezug auf die Objekte bedeutet, dass es hier eigentlich um einen Fall gleichmäßigen Verteilens geht, spielt keine Rolle mehr. Die beschriebene Reaktion der Lehrerin wiederholt sich in Zeile 186-187 (dort nur noch mit dem Hinweis auf das Ergebnis), woraufhin Ahmed sich ratlos, resigniert zeigt (188). Dies wiederum führt zu Mitgefühl auf Seiten der Lehrerin – sie legt ihre Hand auf seinen Arm und bestätigt ihm, dass 2 die Lösung der Gleichung ist (189). Es zeigt sich insgesamt eine Dynamik, in der eine Situation des Tunings sich auflöst. Die Tätigkeit, die von der Lehrkraft gesehen wird, lässt sich von ihr nicht mehr in Verbindung bringen mit der Sicht von Ahmed und Katie. Es kommt zu keiner gemeinsamen Ausrichtung auf *eine* Tätigkeit; unter Rückbezug auf die Methodologie der dokumentarischen Methode lässt sich

[7] Sie müsste allerdings in einen Zusammenhang mit der Grundvorstellung der Division als gleichmäßiges Verteilen gebracht werden – es wurde in Abschnitt 6.1.4 gezeigt, dass hier für Katie und Ahmed Probleme entstehen.

konstatierten, dass der konjunktive Erfahrungsraum zerfällt (vgl. die Ausführungen zur reflektierenden Interpretation ab Seite 99, dort insbesondere die zitierten Überlegungen von Bonnet (2009)).

Doch auch wenn sich von einer Seite – in der Regel der Lehrkraft – um den Aufbau einer Situation des Tunings bemüht wird, kann die Interessenlage der betreffenden Schülerin eine andere sein und es letztlich lediglich zu einem Auswendiglernen von Regeln kommen. In der folgenden Episode, in der Sabine die Lehrerin um Hilfe bei Aufgabe D auf Aufgabenblatt 2 (siehe Abbildung 6.20 auf Seite 252) bittet, zeigt die Lehrerin großes Interesse, sich in die Situation der Schülerin hineinzuversetzen:

Episode 6.32: 111212_2_LG4_33_1: Begründung von Divisor und Divident

47 L: (*kommt zusammen mit Sabine zurück an den Tisch, trägt dabei Sabines Block, Sabine setzt sich, Herbert kommt aus dem Hintergrund ebenfalls zurück*) Welche is das denn-

48 SBN: (*zeigt auf Aufgabe D auf Aufgabenblatt 2*) D-

49 L: (*synchron*) D ne' (*legt den Block auf Sabines Tisch*) (..)

50 HBT: D ja- ,brauch ich jetzt auch- (*stützt sich auf den rechten Arm auf, stößt dabei gegen seine Federmappe und weitere Gegenstände auf dem Tisch und sammelt diese wieder ein, danach schaut er der Unterhaltung zwischen der Lehrerin und Sabine zu*)

51 L: (*teilweise gleichzeitig, geht das Geschriebene in Sabines Block entlang*) Ah das sind Schachteln-

52 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Ja- (*zeigt mit dem Daumen der linken Hand auf zwei Stellen in der gleichen Zeile wie die Lehrerin, diese hält ihren Zeigefinger unverändert*) ,und das sind auch Schachteln und das sind Streichhölzer so wie da- (*zeigt nach rechts auf die Tafel, bewegt dann den Arm weiter nach links*)

53 L: Ja-

54 SBN: (*redet ohne Unterbrechung weiter, Herbert folgt ihren Gesten, die Lehrerin schaut auf den Block*) Links Schachteln (*zeigt weiter nach rechts*) rechts Streichhölzer.

55 L: (*teilweise gleichzeitig, zeigt auf die linke Seite*) Gut. ,dann haste jetzt- (*geht mit dem Finger weiter nach rechts*)

56 SBN: Drei Schachteln'

57 L: (*teilweise gleichzeitig*) Du hast jetzt minus vier gerechnet ne' (*nimmt einen Stift und schreibt rechts*) ,minus vier- Schachteln.

58 SBN: Ja.

59 L: (*geht mit dem Stift von links nach rechts die Gleichung entlang*) So dann hast du hier noch drei Schachteln und zehn Streichhölzer ja.

60 SBN: Ja.

61 L: So und du willst ja wissen (*schreibt etwas oder zieht einzelne Striche nach, nicht genauer zu erkennen*) was in einer Schachtel is ne'

62 SBN: (*gleichzeitig*) Ja.

63 L: (*bewegt den Stift von rechts nach links zurück über das Geschriebene*) Durch was teilste das dann' (*zeigt mit dem Stift auf die linke Seite der Gleichung*) ,wenn du hier

auf eins willst- (*bewegt den Stift an das Ende der Zeile*)
64 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Drei geteilt durch zehn'
65 L: (*bewegt den Stift wieder an den Anfang der Zeile*) Nee wenn du-
66 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Nein geteilt durch drei. (*streicht sich durch die Haare und spielt mit ihrem Zopf*)
67 L: Genau.
68 SBN: A-a-h-
69 L: (*legt den Stift auf Sabines Block*) So-
70 SBN: Also zehn geteilt durch drei. (*tippt etwas in ihren Taschenrechner, die Lehrerin stützt sich auf ihre Knie auf*) (..) (*leise*) gteilt durch drei gleich-
71 L: (*teilweise gleichzeitig*) Also da komm komische Zahln raus. (*schaut kurz zu Herbert*)
72 SBN: (*nimmt den Stift in die Hand*) Kann ich einfach ‚dann kann ich ja so schreiben- (*schreibt in einer neuen Zeile*) ‚gleich drei komma drei Periode.

Die Lehrerin beginnt mit einer Klärung der Ausgangssituation (47-60) und geht dann direkt zu einer Bestimmung des Ziels über, das sie Sabine unterstellt: „So und du willst ja wissen (*schreibt etwas oder zieht einzelne Striche nach, nicht genauer zu erkennen*) was in einer Schachtel is ne'" (61) Bei der folgenden Frage, durch welche Zahl man nun teilen müsse, um auf eine Schachtel zu kommen (63), interpretiert Sabine das Zeigen der Lehrerin (erst auf die 3, dann auf die 10) als einen Hinweis darauf, dass man von der 3 ausgeht und diese entsprechend teilen muss (64). Dazu trägt unter Umständen auch bei, dass sie die Lehrerin nicht ausreden lässt. Es ist nicht auszumachen, ob Sabine nach der Ablehnung ihres ersten Vorschlags (65) die Argumentation der Lehrerin nachvollzieht, oder ob sie sich einfach für die andere der zwei Alternativen entscheidet. In jedem Fall löst hier Sabine von sich aus die Interaktionsstruktur, die zunächst durch relativ ausführliche Äußerungen und gegenseitiges Verstehen gekennzeichnet war. An ihre Stelle tritt ab Zeile 61/62 ein bloßes Abgleichen des Vorgehens, in dem die Beweggründe dafür keine Rolle spielen.

Eine weitere Episode, die zwar zunächst eine Abstimmung unter Schülerinnen und Schülern enthält, aber letztlich ohne eine Klärung endet, verdeutlicht, wie zentral der emotionale Aspekt für Tuning ist. Die Situation schließt unmittelbar an die bereits dargestellte Episode 111209_3_LG3_32_4 (siehe Seite 217) an, in der die Lehrerin Ahmed, Marie und Paul geholfen hatte, Aufgabe C von Aufgabenblatt 2 zu bearbeiten, bei der es zu einer negativen Lösung kommt. Nun soll Ahmed „Marie das nochmal erklären" (165). Nachdem Marie zunächst ein Problem damit hat, wie die von der Lehrerin betonte Gleichheit in Bezug auf die letztlich vorliegende Konstellation -2 Sch = 10 St (siehe Abbildung 5.32 auf Seite 166) zu verstehen ist (166-171), kommt sie zu einer konkreteren Frage:

Episode 6.33: Auszug aus 111209_3_LG3_33: „ich will lieber mein Kopf behalten"

172 MRI: (*Katie wendet sich wieder dem Tisch von Ahmed und Marie zu*) Aber ich weiß nich (*gestikuliert mit der rechten Hand*) wie wir auf minus- zwei komm- ‚check ich

nich. (*Katie dreht sich wieder weg*)

173 AMD: (*dreht seinen Block wieder um*) Wie minus zwei- (*Marie deutet mit der linken Hand kurz unbestimmt auf Ahmeds Block*) ‚ach so- ‚ja gumal- (*geht mit dem Oberkörper zurück, fasst kurz seine Mappe an, geht dann wieder nach vorne*) (...) (*deutet unbestimmt auf seinen Block*) ‚oah ich hasse ihre Aufschreibdingens- ‚und zwar- ‚man muss doch auf beiden Seiten das selbe wegnehm oder' (*zeigt auf eine Stelle relativ weit oben auf dem Block*)

174 MRI: Ja.

175 AMD: Hier is is ja noch- ‚eine Schachtel nur noch- (*macht mit beiden Händen eine wegwischende Bewegung*) ‚gar sonst gar nichts mehr-

176 MRI: Warde-

177 AMD: (*zeigt auf die rechte Seite*) Hier noch zehn St-

178 MRI: Sie hat das so aufgeschriebn erstmal (*zeigt auf ihren Block*) das hier hat sie aufgeschrieben dann- (*zeigt eine Zeile weiter in ihrem Block, Ahmed beugt sich herüber*) ‚eine S-c-h-a-c–h-t-e-l- (*schreibt etwas*) (..) ein S H S- (*schaut hinüber auf Ahmeds Block, schreibt weiter*) gleich- (..)

179 AMD: Äh und zehn Streichhölzer' (*Marie schaut kurz auf Ahmeds Block und schreibt dann weiter*) (...)

180 MRI: (*leise, schreibt weiter*) Minus zehn Streichhölzer- (*schaut wieder auf Ahmeds Block, Ahmed schaut auf Maries Geschriebenes*) (..) (*weiterhin leise*) ‚und zehn- S H. (*wieder in normaler Lautstärke*) ‚und (*zeigt auf eine Stelle auf Ahmeds Block, relativ weit rechts*) diese drei was is das'

181 AMD: Drei Schachteln-

182 MRI: Die werden weggenomm ne'

183 AMD: (unverständlich) drei Schachteln sind aber noch da- (*beide Schüler schauen auf den Tisch*) (5sec)

184 MRI: Boah das doch kompliziert mein Kopf platzt gleich-

185 AMD: J-a- ‚also jetzt muss man auf beiden Seiten ja erst (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) Schachteln wegnehm ne' (*schaut Marie an*)

186 MRI: Mh-

187 AMD: (*bewegt den Stift leicht, zeigt aber weiterhin auf die gleiche Stelle*) Hier also ‚man muss ja drei Schachteln wegnehm. ‚damit hier auch keine mehr sind. ‚und wenn man (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) hier halt- (*nimmt den Taschenrechner in die Hand*) (.) eine Schachtel- (*beginnt etwas in den Taschenrechner einzugeben*)

188 MRI: Und warum kann ich keine- (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung in ihrem Block*) Streichhölzer wegnehm' (*schaut Ahmed an*)

189 AMD: (*teilweise gleichzeitig, zeigt mit der ganzen Hand nochmals auf die linke Seite der Gleichung in seinem Block*) Ja eine Schach- ‚weil ma ‚weil man ja keine mehr hat hier. (*zeigt jetzt mit dem Zeigefinger auf die gleiche Stelle wie zuvor*)

190 MRI: Ja dann kann das ja auch in den Minusbereich laufen.

191 AMD: (*Katie schaut jetzt wieder von hinten zu*) Kann man auch machen das geht auch andersrum (*bewegt den Arm ruckartig nach hinten*) hat sie ja eben erzählt- (*schaut*

kurz Marie an, dann wieder auf die Blöcke) (.) ‚das kann man auch andersrum machen. ‚wolln wir das andersrum mal machen'
192 MRI: J-a.
193 AMD: (*korrigiert seine Aufzeichnungen*) Dann machen wir mal null- (..) Streichhölzer-
194 MRI: Also dann wärn das (*beide Schüler schreiben*) minus zehn Streichhölzer- (.)
195 AMD: Genau minus zehn'
196 MRI: U-n-d- (*zeigt auf Ahmeds Block, wahrscheinlich auf die rechte Seite der Ausgangsgleichung*) ‚das wärn dann- einfach die andere Seite wär dann- (*beide Schüler schreiben wieder*) (.) plus drei- (*setzt den Stift ab, schaut zu Ahmed, Ahmed schreibt weiter*) Streichhölzer ne' (..)
197 AMD: Ähm- ‚nein. ‚plus drei Schachteln.
198 MRI: (*schaut wieder auf ihren Block*) Ja. ‚meint ich ja- (*lacht kurz auf, beugt sich nach vorne, schreibt*) ‚ich bin jetz voll durchnander- (*legt die rechte Hand mit dem Stift auf den Tisch, Ahmed schreibt weiterhin*) (.) ‚ja ‚genau. (*streicht sich mit der linken Hand durch die Haare*) ‚jetzt hab ich verstanden. (.)
199 AMD: (*schreibt weiterhin*) Und dann kommt man- am End-e' (*schreibt weiterhin*) (..)
200 MRI: Auf das Er-gebnis' (*Ahmed legt seinen Stift auf den Block, nimmt den Taschenrechner und hält ihn in die Mitte zwischen sich und Marie*) ‚wäre was muss denn immer am Ende rechnen- (.)
201 AMD: (*tippt etwas in den Taschenrechner, nuschelt leise*) (unverständlich) ich hasse das e-y- (*schiebt mit der linken Hand den Stift zur Seite, arbeitet dann weiterhin am Taschenrechner, Marie klopft mit ihrem Stift zweimal auf ihren Block*) (..) (*weiterhin leise*) ‚minus- (*tippt weiter, Marie beugt sich nach links und schaut auf den Taschenrechner*) (..) ‚hä' (..) (unverständlich) (.) ‚mal einfach- (.) zehn- (*Marie gähnt*) minus zwanzich- (.) ‚damit ich auf minus zehn bin. (*bewegt die linke Hand vom Taschenrechner weg, hebt kurz den Zeigefinger*) ‚minus zehn- (.) ‚geteilt durch (*bewegt den rechten Zeigefinger etwas nach vorne*) drei- (*tippt weiter etwas in den Taschenrechner, Marie schaut kurz auf ihren Block, dann wieder zu Ahmed*) (...)
202 MRI: (*beugt sich nach vorne und schaut auf den Taschenrechner, schaut dann Ahmed an*) Minus drei komma (*spricht die ersten beiden Buchstaben jeweils sehr stark aus, fast wie „trr"*) drei drei (*neigt den Kopf nach rechts*) drei drei drei drei drei' (..)
203 AMD: (*wirft den Taschenrechner mit Wucht auf seinen Block, so dass er nochmal hochspringt, Marie zuckt zusammen und atmet tief ein*) Laber den ganzen T-a-g- (*Marie grinst, Ahmed drückt eine Taste auf dem Taschenrechner, nimmt ihn wieder wieder in die Hand, schaut auf seinen Block*) (..) (*schaut in die Klasse, dann auf den Taschenrechner, dann auf den Block*) ‚ohwarum kommt jetzt was andres r-a-u-s-
204 MRI: (*reibt ihren Stift auf dem Tisch*) (unverständlich) (*greift nach ihrem Block*) ‚ah ich lass C einfach aus ich hab kein Bock mehr mit (*steht auf*) (unverständlich)
205 AMD: (*schaut zu Marie auf, die jetzt rechts hinter ihm steht, hebt die Arme etwas an und lässt sie wieder sinken*) Aba das brauchst du (*schüttelt den Kopf*) ‚das kannst nich einfach auslassen.
206 MRI: (*ist jetzt links hinter Ahmed, geht weiter nach links, Ahmed folgt ihr mit seinem*

> *Blick, gleichzeitig setzt sich Katie wieder auf ihren Platz*) Ja- ,ich will lieber mein Kopf behalten als diese (unverständlich) Aufgabe (unverständlich)
>
> Ahmed holt in der Folge die Lehrerin zur Hilfe und erkennt dabei seinen Rechenfehler und korrigiert ihn.

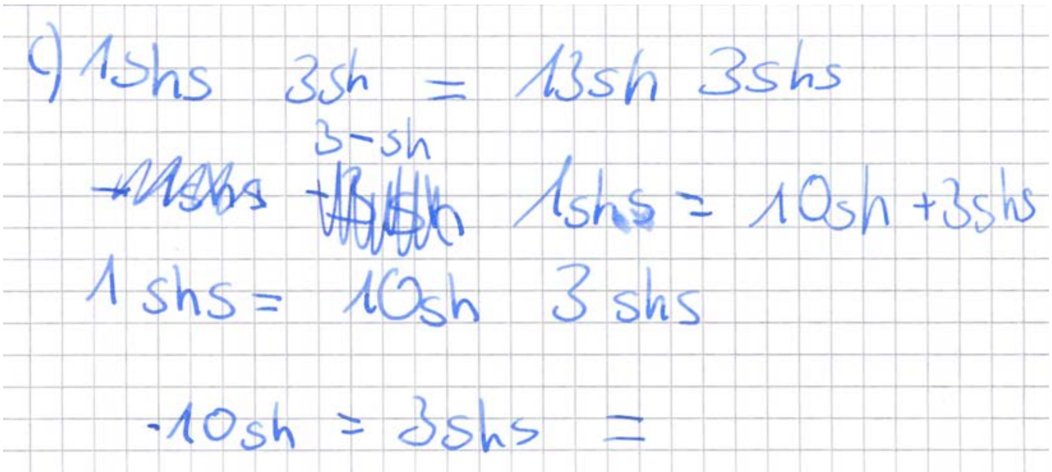


Abbildung 6.21.: Maries Aufzeichnungen zu Aufgabe C von Aufgabenblatt 2

Ahmed beginnt seine Erklärung der Umformungen mit einer Rekapitulation der vorliegenden Situation (175-183). Bereits vorher nennt er als zentrale Handlung, dass man „auf beiden Seiten das selbe“ wegnimmt (173). Diese Beschreibung wiederholt er (185) und nennt dazu auch das Ziel, das dahinter steht: „„damit hier auch keine mehr sind.“ (187). Auf Maries Wunsch, doch lieber zuerst Streichhölzer wegzunehmen (188), kann er rasch reagieren und in das alternative Vorgehen wechseln (191), wobei ihm und Marie allerdings ein Rechenfehler unterläuft: Statt auf -10 shs = 2 sh kommen sie auf -10 sh = 3 shs (siehe Abbildung 6.21).

Im Umgang mit Marie versucht Ahmed auf ihre Situation einzugehen und sie mitzunehmen, es könnte hier also zu Tuning kommen. Doch Marie gibt angesichts des unerwarteten Ergebnisses sofort auf. Ihr ist das Lösen von Gleichungen so fremd, dass sie sich gegen ihre „Verdrehung“ wehrt: „„ich will lieber mein Kopf behalten als diese (unverständlich) Aufgabe (unverständlich)“ (206) Hier wäre ein Eingreifen der in dieser Situation nicht anwesenden Lehrerin hilfreich, in dem sie Maries Bedenken aufgreifen könnte, ihr bestätigen könnte, dass negative Anzahlen in der Tat nicht sinnvoll sind, man die Aufgabe aber als Suche nach einer Zahl reinterpretieren kann. Ahmed ist zwar auch frustriert und wütend (203), nimmt die Aufgabe aber dennoch sehr ernst; er glaubt daran, dass es bei dieser Aufgabe etwas zu lernen gibt: „das brauchst du (*schüttelt den Kopf*) ,das kannst nich einfach auslassen.“ (205).

Ahmeds Hartnäckigkeit wird letztlich belohnt, er kann seinen Fehler (im Gegensatz zu Marie, siehe Abbildung 6.21) mit Hilfe der Lehrerin korrigieren. Auch schwierige, frustrierende Aufgaben als Lerngelegenheiten zu sehen, mit denen zu beschäftigen sich lohnt, ist sicher eine wichtige Voraussetzung für das Eintreten in Lernprozesse. Es lässt sich die Überlegung anstellen, dass eine Hürde bei der Ausbildung algebraischen Struktursinns darin besteht, dass man dabei gezwungen ist, sich ganz auf eine von mehreren konkurrierenden Sichtweisen einzulassen, andererseits aber doch flexibel zu sein, um ergänzende Aspekte zu integrieren. Diese Einstellung steht im Widerspruch zu einem Bild von Mathematik, in der es immer genau eine korrekte Lösung und ein korrektes Vorgehen gibt, das man einfach kennen muss.

6.3.3. Tuning aus Sicht der Lehrkraft

Tuning scheitert allerdings in den meisten Fällen nicht daran, dass die Schülerinnen und Schüler sich aus individuellen Gründen nicht darauf einlassen. Vielmehr lassen sich Faktoren benennen, auf die die Lehrkraft (in unterschiedlichem Maße) Einfluss hat.

Problematische Aspekte des praxeologischen Equipments

Das Gegenbild zu einer als Tuning charakterisierbaren Interaktion zwischen Lehrkraft und Schülerinnen und Schülern lässt sich idealtypisch folgendermaßen beschreiben: Die Lehrkraft stellt ohne Begründung Regeln bezüglich der erlaubten Handlungen auf. Fehler werden als Regelverstöße markiert, ohne sie zu einem Gegenstand der Tätigkeit zu machen. Es lohnt sich, so geartete Interaktionen genauer zu betrachten, um zu lernen, woran Tuning konkret scheitert. In den vorliegenden Daten konnten die Verhaltensweisen der Lehrerin in den entsprechenden Episoden fünf Mottos zugeordnet werden. Sie traten so konsistent auf, dass sie als Ausdruck des *praxeologischen Equipments* (PE) der Lehrerin gedeutet werden können. Diese einer einzelnen Lehrerkraft zugeschriebene „Ausstattung“ setzt sich aus individuellen und institutionellen Bestandteilen zusammen (Bosch und Gascón, 2014, S. 69). Gerade wegen dieser institutionellen Bestandteile kann angenommen werden, dass die beobachteten Aspekte auch als Teil des praxeologischen Equipments anderer Lehrerinnen und Lehrern auftreten und ihre Problematik in Bezug auf die Ausbildung algebraischen Struktursinns eine über den Einzelfall hinausgehende Relevanz besitzt.

1. Aspekt des PE: „Mathematik als Schema“

Im beobachteten Unterricht ließ sich sowohl bei der Lehrerin als auch bei den Schülerinnen und Schülern die in der Literatur bekannte Sicht auf Mathematik als Schema (vgl. Grigutsch, Raatz und Törner, 1998) feststellen. In der folgenden Episode bittet Katie die Lehrerin um Hilfe bei Aufgabe I von Aufgabenblatt 2 (siehe Abbildung 6.22):

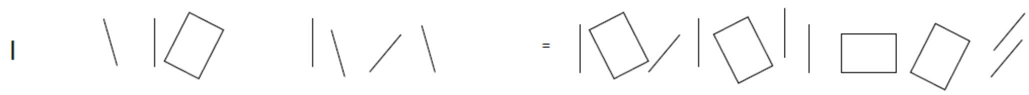


Abbildung 6.22.: Aufgabe I von Aufgabenblatt 2

Episode 6.34: 111212_3_LG4_62: „ja du willst ja jetzt ...“

29 KTI: (*legt erst ihre Mappe auf den Tisch, zieht dann ihren Block darunter hervor und legt ihn so auf den Tisch, dass er zur Lehrerin zeigt, die von vorne an den Tisch herantritt*) Ja ich komm bei I nich mehr weiter. (*lacht die Lehrerin an*)
30 L: Bei wo'
31 KTI: I- (*zeigt mit ihrem Stift auf eine Stelle relativ weit unten auf ihrem Blatt*)
32 L: Bei I-
33 AMD: Bei wo-
34 L: (*gleichzeitig, legt ihre Hand an die untere Blattkante, verdeckt so mit ihrem Arm ihre Hand, eventuelle Zeigegesten sind nicht erkennbar*) Wo-
35 AMD: Bei wo sag ich auch immer. (*die Lehrerin stöhnt oder lacht, Katie grinst*)
36 L: Du hast jetzt h-i-e-r'
37 KTI: Sechs (*bewegt den Stift schnell von oben auf das Blatt zu*) Streichhölz-
38 L: (*teilweise gleichzeitig*) Sechs weggenomm- (*legt ihre Hand etwas weiter nach links, eventuelle Zeigegeste wieder nicht erkennbar*)
39 KTI: Ja.
40 L: Aber da fehlt (*hebt ihre linke Hand kurz an, legt sie dann genauso wieder auf das Blatt, zeigt mit der rechten Hand auf eine Stelle, die durch die linke Hand verdeckt wird*) das Gleich dazwischen da muss kein Plus sondern Gl-e-ich hin-
41 KTI: (*teilweise gleichzeitig*) Ach ja ups- (*schreibt etwas an der Stelle, auf die die Lehrerin gezeigt hat, die Lehrerin zieht beide Hände zurück und stützt sich auf der Tischkante auf*) (..)
42 L: Genau. (*zeigt mit der rechten Hand auf eine Stelle rechts von der, an der Katie geschrieben hat, stützt sich mit dem linken Arm weiterhin auf*) ‚so ä-hm- (.) (*zeigt auf eine Stelle weiter links, gleichzeitig ruft Sabine quer durch den Klassenraum nach der Lehrerin*) ‚ja du willst ja jetzt (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) hier die Streichhölzer behalten und (*zeigt wieder auf die Stelle weiter links*) da die Schachteln haben ne'
43 KTI: (*nickt einmal*) Ja.
44 L: Das heißt du musst jetzt (*bewegt den Zeigefinger wieder weiter nach rechts, zeigt kreisend auf die rechte Seite der Gleichung*) hier die Schachteln wegnehm (*tippt mit dem Finger zweimal auf die Stelle, die sie zuvor umkreist hatte*) ‚nur Schachteln-
45 KTI: Eins. ‚aber- (*bewegt den Finger auf der linken Seite der Gleichung hin und her, schaut die Lehrerin an*) es bleibt doch hier auch weg-
46 L: Nee (*zeigt mit der rechten Hand auf die linke Seite der Gleichung*) eins minus vier is' (*dreht die Hand und hält sie über dem Blatt, mit der Handfläche nach oben*)
47 KTI: (*schaut kurz auf den Block, dann mit zusammengekniffenen Augen zur Lehrerin*) Minus drei'
48 L: (*klappt die Hand kurz zu sich, dann wieder nach vorne, nickt*) Minus drei Schachteln. ‚gen-a-u.

49 KTI: (*mit hoher Stimme, dreht den Block wieder zu sich*) Achso' (*Katie beginnt zu schreiben, die Lehrerin entfernt sich*)

Die Episode beginnt so, dass es zu Tuning kommen könnte: Die Lehrerin erfasst die Situation, wobei sie direkt Handlungsziele einbezieht, die sie Katie unterstellt: „,ja du willst ja jetzt (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) hier die Streichhölzer behalten und (*zeigt wieder auf die Stelle weiter links*) da die Schachteln haben ne'" (42) Implizit ist in dieser Aussage bereits enthalten, dass etwas weggenommen werden muss, allerdings wird nun (im Gegensatz zur vorherigen Episode) etwas deutlicher, mit welchem Ziel dies geschieht. Dies bereitet vor, dass in der folgenden Aussage alle Schachteln auf der rechten Seite der Gleichung gemeint sind: „Das heißt du musst jetzt (*bewegt den Zeigefinger wieder weiter nach rechts, zeigt kreisend auf die rechte Seite der Gleichung*) hier die Schachteln wegnehm (*tippt mit dem Finger zweimal auf die Stelle, die sie zuvor umkreist hatte*) ,nur Schachteln-"(44) Dies ist für die Lehrerin so deutlich, dass sie gar nicht in Erwägung zieht, dass Katie nur eine Schachtel wegnehmen möchte, als sie sich entsprechend äußert (45), auch Katies daraus resultierendes Problem nimmt die Lehrerin gar nicht wahr. Für die Lehrerin liegt nur noch eine Rechnung als Problem vor (46). Die Lehrerin handelt in einer Weise, die auf das Rechnen zuspitzt und die eine intensive Beschäftigung mit der Struktur der Gleichung vernachlässigt.

Im Zusammenhang mit dieser Beobachtung steht die Tendenz, den Taschenrechner zur Hilfe zu nehmen. Sie ließ sich sowohl bei der Lehrerin als auch bei den Schülerinnen und Schülern beobachten, beispielsweise in der folgenden Episode, in der Ahmed vor der Aufgabe steht, die Gleichung $3x = -2$ zu lösen:

Episode 6.35: 120106_3_LG9_42: $(-2):3$ **– ein Fall für den Taschenrechner**

1 AMD: (*schaut auf das Blatt vor sich, der Forscher steht links hinter ihm*) Und jetz- ä-h- (.) (*dreht den Kopf und schaut zum Forscher auf, bewegt den linken Zeigefinger minimal von rechts nach links über dem Papier*) ,drei geteilt durch minus zwei ne'

2 F: Mh wieso'

3 AMD: (*schaut wieder auf das Blatt, der Forscher beugt sich leicht nach vorne und schaut Ahmed über die Schulter*) (...) Oder minus (*schaut kurz zum Forscher auf, bewegt wiederum minimal den Finger, dieses Mal von links nach rechts*) zwei geteilt d-urch drei-

4 F: (*wiegt den Kopf hin und her*) Wieso das'

5 AMD: (*schaut wieder nach vorne, spannt die Arme an*) KEINE AHNUNG.

6 F: Wa ,worauf willst du denn komm.

7 AMD: Ein x.

8 F: Genau. ,und du hast- drei x. zur Zeit noch ,so ne'

9 AMD: (*teilweise gleichzeitig*) Ach ja geteilt durch (*zeigt auf eine Stelle auf dem Blatt*) drei-

10 F: (*nickt*) Genau.

11 AMD: (*gleichzeitig, redet ohne Unterbrechung weiter*) Also- minus zwei geteilt durch drei. (*nimmt den Taschenrechner*)

> 12 F: Ja. (*Ahmed beginnt etwas in den Taschenrechner einzugeben, berechnet das Ergebnis*)

Bei Ahmed zeigt sich das bereits beschriebene Muster, nach dem die Zahlen auf beiden Seiten der Gleichung in einer Division verrechnet werden; die beiden Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge dies geschieht, werden dabei als gleichermaßen plausibel angesehen, sodass er nur raten kann (1, 3). Der Forscher reagiert darauf, indem er explizit nach dem Ziel der Rechenoperation zurückkehrt und Ahmed dieses nennen lässt (6-7). Diese gewünschte Situation, auf einer Seite der Gleichung ein x stehen zu haben, kontrastiert er mit der vorliegenden Situation (8) und erreicht so, dass Ahmed bewusst wird, was zu tun ist (9). Schnell steht aber wieder die durchzuführende Rechnung im Mittelpunkt. Die Rechenoperation wird sofort auf den Skalar bezogen und die entsprechende Rechnung – $(-2) : 3$ – in den Taschenrechner eingegeben (11-12), ein Vorgehen, das in dieser Situation auch der Forscher explizit billigt (12).

2. Aspekt des PE: „Verzicht auf Fachsprache“

Aufmerksamen Leserinnen und Lesern der bisherigen Darstellungen mag aufgefallen sein, dass die Lehrerin der Verwendung von Fachsprache nur einen geringen Stellenwert einräumt. Ihre persönlichen Gründe dafür sind nicht Gegenstand dieser Untersuchung, denkbar wären allerdings (für die beobachtete Lehrerin wie auch für andere Lehrkräfte) mehrere Ursachen:

- Wenn vom Vorhandensein des mathematischen Weltbilds „Schema“ nach Grigutsch et al. (1998) ausgegangen wird, spielt darin Fachsprache eine untergeordnete Rolle. Die Lehrkraft mag folgender Aussage zustimmen: „Es ist schon viel gewonnen, wenn der Mathematikunterricht das Wissen, das man in den Anwendungen, im Beruf oder im Leben braucht, zügig vermittelt – alles andere darüberhinaus ist Zeitverschwendung“ (S. 19).
- Die Fachsprache mag als eine Hürde für die Schülerinnen und Schüler gesehen werden, die umgangen werden muss.
- Die Lehrkraft mag selbst unsicher im Gebrauch der Fachsprache sein.

Wenn aber auf Fachsprache verzichtet wird, erschwert dies die für das Tuning charakteristische Kommunikation in Bezug auf die vorliegende Situation, die Objekte, die Ziele, die Handlungen und die Tätigkeit.

In der ersten Interaktion zwischen der Lehrerin und Sabine in Episode 111216_2_LG6_18-19 (siehe Seite 235) lässt sich wiederum rekonstruieren, dass die Lehrerin die Situation rekapituliert (62) und dann ausgehend davon die zielführenden Handlungen diskutiert (64). Als besonderes Problem vermutet sie dabei offenbar die Variable als Bestandteil eines Bruchs und versucht durch Beispiele zu verdeutlichen, wie dieser Bruch je nach Wert der Variablen einen anderen Wert annimmt. In der Frage nach der Rechenoperation, die durchzuführen ist, um auf den Wert der Variablen zu kommen (64), ist auffällig, dass die Lehrerin nicht von der Variablen, nicht einmal von x, sondern von „diese[r] Zahl hier oben“ spricht. Sie vermeidet hier also die algebraische Fachsprache, die die Benennung der Sachverhalte erleichtern würde. Weil ihre Beschreibungen somit nur schwer nachzuvollziehen sind, nimmt die Lehrerin das Schreiben selbst in die Hand und übernimmt damit die eigentliche Tätigkeit; sie notiert die linke Seite der Gleichung („$x =$“) ohne Sabines Zutun. Auf die bereits in Abschnitt 6.1.4 besprochenen Probleme im Umgang mit Brüchen, die Sabine zeigt, reagiert die Lehrerin hier also, indem sie der Schülerin die Arbeit abnimmt. Dies bedeutet aber auch, dass Sabine hier keine Partnerin im Tuning mehr sein kann, sondern nur noch das korrekte Vorgehen anzunehmen hat.

3. Aspekt des PE: Zurückhaltung der Lehrkraft

Der dritte Aspekt des praxeologischen Equipments, der identifiziert wurde, steht in einem gewissen Widerspruch zu den ersten beiden. Er besagt, dass die Lehrerin (und auch der Forscher) die Auffassung vertritt, dass sie beziehungsweise er sich mit Hinweisen gegenüber den Schülerinnen und Schülern zurückhalten sollte. Dies lässt sich vor allem auf die Designprinzipien zurückführen, in denen aus beiden zugrundeliegenden Theorien die Annahme abgeleitet worden war, dass den Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler viel Zeit eingeräumt und Geduld entgegengebracht werden sollte. Illustrieren lässt sich diese Haltung an der folgenden Episode, in der der Forscher vor allem auf die zuvor erarbeiteten Beschreibungen verweist, statt auf Herberts Situation einzugehen, der hier Aufgabe A von Aufgabenblatt 2 (siehe Abbildung 6.8 auf Seite 218) so weit gelöst hat, dass auf der linken Seite der Gleichung zwei Schachteln und auf der rechten Seite ein Streichholz vorliegt:

Episode 6.36: 111209_2_LG3_22: Zurückhaltung statt Tuning

20 F: Sach mal was is- ‚was is das Problem’ (*beugt sich nach vorne und stützt sich auf den Tisch auf*)
21 HBT: Aso- ‚ich weiß nich (*legt den Taschenrechner auf den Tisch*) ob ich jetzt (*tippt beim Aussprechen der beiden Zahlen auf seinen Block*) zwei geteilt durch eins machen soll- ‚oder (*tippt wieder auf den Block, aber in umgekehrter Reihenfolge*) eins geteilt durch zwei’ (*schaut zum Forscher auf*)
22 F: Dann nimm doch mal deine Anleitungn- (*Herbert beginnt in seiner Mappe zu blättern*) ‚du hast ja die Kärtchen. (.)
23 HBT: (*ist bei den Karten mit der Anleitung angelangt, nimmt sie aus der Mappe*) Ja aber ja
24 F: (*dazwischen, gleichzeitig*) Genau.
25 HBT: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Ich glaub die sind falsch. (.) ‚ja die ha ä-h Sabine aufgeschrieben am Anfang.
26 F: Ja- (*nähert sich etwas, hält die Hand in der Luft*) (...) ‚und das sin jetzt die (*zeigt kurz auf die Karten, Herbert fächert sie auf*) ‚wie ihr sortiert ne’
27 HBT: Ja ich glaub wir ham das aber auch falsch gemacht. (...) (*der Forscher zeigt auf eine Stelle auf einer der Karten*)
28 HBT: (*leise*) Geteilt durch (unverständlich) Streihhölz. ‚ja.

29 F: Genau. ,da steht es.
30 HBT: Aber ich weiß jetzt aber nich (*zeigt mit den Karten in der Hand auf seinen Block*) ob ich das man aber eins durch zwei machen soll oder zwei durch eins.
31 F: Na wie viele Schachteln hast du'
32 HBT: Chab zwei Schachteln-
33 F: Genau.
34 HBT: (*klopft die Karten auf dem Tisch zusammen*) Und ein-
35 F: Und wie viel Streichhölzer hast du'
36 HBT: Ein Streichholz.
37 F: Genau. ,und was steht hier' (*zeigt auf die Karte*)
38 HBT: Dann rechnet man die restlichen Streichhölzer durch- (*tippt mit der Karte auf den Block*) ,ah doch eins durch zwei. (*schaut auf zum Forscher*)
39 F: Genau. (*nickt einmal*)
40 HBT: Ah okay gut. (*legt die Karten wieder zu einem Stapel zusammen und legt sie zur Seite*) (..)
41 F: So- ,so hat das bislang funktioniert also müsste das jetzt hier auch funktioniern.
42 HBT: (*beugt sich über seinen Block*) Also hab ich doch doch falsch ,nee dann dann muss (*lehnt sich wieder etwas zurück, zeigt auf eine bestimmte Stelle auf dem Block*) der dann muss da dann kommt doch doch null komma fünf raus. (*tippt eine Taste auf dem Taschenrechner an, zeigt weiterhin auf die gleiche Stelle auf dem Block*)
43 F: (*nickt einmal*) Genau-
44 HBT: Alo muss ich doch eins durch zwei- (*beginnt zu schreiben*)
45 F: (*teilweise gleichzeitig*) Und dann kannst du ja nochmal (*zeigt auf den Beginn der Rechnung*) oben gucken ob das auch hinkommt. (*Herbert schreibt, zeigt keine Reaktion*) (...) ,ne' (*geht weg*)

Die Aussage „du hast ja die Kärtchen" (22) sagt illokutionär aus, dass Herbert eigentlich gar keine Hilfe braucht; auch die Äußerung in Zeile 41 ist so zu deuten: „So- ,so hat das bislang funktioniert also müsste das jetzt hier auch funktioniern." Durch seine Herangehensweise ignoriert der Forscher allerdings die Möglichkeit, dass die auf den Karten notierten Handlungen noch nicht in der Tätigkeit der Schüler verankert wurden und daher einer Thematisierung bedürfen. Genau so lässt sich Herberts Reaktion lesen, der zwar nach den Anleitungen greift, aber äußert „Ja aber ja" (23), „Ich glaub die sind falsch." (25, siehe auch 27) Der Forscher nimmt dies zum Anlass, Herbert auf der Suche nach der richtigen Karte zu helfen und zu konkretisieren, welche Karte er meint (26, 29). So wird letztlich nur ein Verfahren angewendet, ohne dass geklärt wird, warum dieses Verfahren in dieser Situation angemessen ist und was das Ergebnis bedeutet.

Der rekonstruierte Aspekt des praxeologischen Equipments spiegelt sich auch im Verhalten der Schülerinnen und Schüler wieder. So deutet Katie durch ihre Einstiegsäußerung in Episode 111219_3_LG7_30 (siehe Seite 254) an, dass sie eigentlich den Anspruch hat, alleine zu arbeiten. Indem sie sagt „ich komm nich mehr weiter-" (1) drückt sie illokutinär einerseits aus, dass sie Hilfe braucht, andererseits aber auch, dass sie durchaus versucht hat, die Aufgabe eigenständig zu bearbeiten.

Dieser Ansatz hat seine Berechtigung, ist aber nicht uneingeschränkt sinnvoll. Obwohl die Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler essentiell für den Lernerfolg ist – sie müssen im Tuning als Akteure und nicht als bloße Rezipienten auftreten –, ist die Lehrkraft doch in der Rolle, dass sie bereits ein Verständnis hat für die algebraischen Strukturen, mit denen die Schülerinnen und Schüler konfrontiert sind. Es zeigte sich, dass für die beobachteten Schülerinnen und Schüler eine Orientierungshilfe zur rechten Zeit unverzichtbar für die Erschließung der Tätigkeit war. Ein offenkundiges Beispiel ist der Hinweis der Lehrerin an Sabine, man könne „wegnehmen" in Episode 111205_2_LG1_40-41 (Transkript ab siehe Seite 101,die Äußerung findet sich in Zeile 114).

4. Aspekt des PE: Unterstellung von Zielen

Ein Punkt, an dem Tuning häufig scheitert, ist die sowohl bei der Lehrerin als auch beim Forscher beobachtbare Reaktion auf Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler, die nicht der intendierten Tätigkeit entsprechen: Es wird unterstellt, dass ein bestimmtes Ziel verfolgt wird, dieses wird dann mit den Folgen des vorgeschlagenen Vorgehens verglichen. Problematisch ist dabei zum einen, dass dieses Ziel den Schülerinnen und Schülern gar nicht unbedingt klar ist, und zum anderen, dass so keine positive Begründung für die korrekte Handlung geleistet wird. Es wird sich eingehend damit beschäftigt, was *nicht* zielführend ist, dafür kaum mit den Eigenschaften der alternativen Handlung, mit der die Schülerinnen und Schüler eigentlich vertraut werden müssen.

So verwendet die Lehrerin in Episode 111216_2_LG6_4 (siehe Seite 128) viel Zeit darauf, die Richtigkeit des einen Vorgehens (der Division durch 3) zu begründen, indem sie klärt, dass das alternativ von Sabine vorgeschlagene Vorgehen (Division durch $3x$) zu einer Gleichung führen würde, die nicht erwünscht ist. Über weite Teile der Episode geht es nur um die Auswirkungen der bereits als falsch markierten, dann aber hypothetisch angenommenen Äquivalenzumformung (13-28, 34-52). Dass die Division durch 3 zu einer Gleichung führt, in der auf der einen Seite x steht, wird hingegen nicht explizit geklärt, sondern ergibt sich lediglich als einzige Alternative zu dem als nicht zielführend erkannten Vorgehen. Daraus folgt dann (in den Worten von Kizzy): „Also machen wir nur geteilt durch drei. (*breitet ihre Arme aus, die Handflächen nach oben*)" (53) Die Lehrerin wirkt froh über den Abschluss, den die Diskussion so findet (54, 58).

Ihrer Verallgemeinerung, dass man „Immer [durch] die Zahl die vor dem x steht einfach" (58) (man beachte hier auch wieder die Vermeidung des Begriffs „Faktor") teilen müsse, räumt sie selbst nur noch wenig Raum ein, indem sie diese Aussage nur in einem Halbsatz formuliert. Lediglich in Ahmeds Äußerung, die deutlich macht, dass eine Gleichung erzeugt werden soll, in der x auf einer Seite steht, wird sich in dieser Episode positiv auf ein Ziel bezogen (30-33). Dieses Ziel nimmt die Lehrerin in ihrem Vorgehen, das die unerwünschten Folgen der von Sabine vorgeschlagenen Umformung fokussiert, als klar an, weshalb sie auch direkt zu der für sie zentralen Frage zurückkehrt: „Aber was würde denn rauskomm wenn ich durch drei x teiln würde- ‚würde dann auch x da rauskomm'" (34). Erst als Gegensatz zu den Folgen der Division durch $3x$ greift sie wieder auf das Ziel auf, die Gleichung in eine Form zu bringen, in der auf der einen Seite die Variable steht: „‚wir brauchen aber ja das x da noch." (52) Die Verwirklichung dieses Ziels, also die neue Gleichung $x = 3$, wird von der Lehrerin lediglich als Schreibweise behandelt: „x gleich drei schreibt man dann. ‚genau." (60)

5. Aspekt des PE: „Unterrichtsorganisation geht vor“

Es ist ein ausdrückliches Ziel dieser Arbeit, die Ausbildung algebraischen Struktursinns im tatsächlich stattfindenden Klassenunterricht zu beschreiben. Der letzte Aspekt des praxeologischen Equipments der beobachteten Lehrerin hängt mehr als die anderen mit den Bedingungen zusammen, unter denen dieser Unterricht stattfindet. Die Lehrerin steht vor der Aufgabe den Unterricht zu organisieren; diese Aufgabe steht häufig in einem Spannungsverhältnis zur Entwicklung von Situationen, in denen es zu Tuning kommen könnte.

Bereits bei der Besprechung von Episode 111219_2_LG7_19 (siehe Seite 256) wurde auf die Bedeutung dieses Aspekts hingewiesen. Zeitdruck und der Zwang, sich zwischen der Hilfestellung bei verschiedenen Schülerinnen und Schülern zu entscheiden, sind hier mögliche Ursachen für das Abbrechen der Situation, die eigentlich günstige Voraussetzungen für Tuning zwischen der Lehrerin und Sabine geboten hätte.

Einen ganz unmittelbaren Ausschluss aus einer Lernsituationen erfährt Ahmed zum Ende von Episode 111205_5_LG1_x (siehe Seite 388). Der oben beschriebene Konflikt über die eigentlichen Ziele bezüglich der Streichholzschachtelgleichungen, der zwischen Ahmed einerseits und Sabine und Herbert andererseits besteht, wird nicht weiter ausgetragen, weil die Lehrerin hinzukommt, Ahmed zur Seite schiebt und darauf besteht, die ursprünglich auf dem Tisch vorliegende Streichholzschachtelgleichung wiederherzustellen. Von der Lehrerin wird Ahmeds Ansatz nicht gewürdigt, weil sie einen Neustart einfordert (47), und hat daher im Folgenden bei Sabine und Herbert auch keinerlei Bedeutung. Ahmed wird von der Lehrerin aus der sozialen Situation ausgeschlossen (45).

Möglichkeiten für positives Wirken der Lehrkraft

Neben der naheliegenden Zielsetzung, die beschriebenen Aspekte des praxeoplogischen Equipments zu hinterfragen, können aus dem Gesamtbild zum Tuning als Weg der Ausbildung algebraischen Struktursinns einige weitere Verhaltensweisen benannt werden, durch die die Lehrkraft diesen Prozess unterstützen kann.

Ein erster Ansatz lässt sich aus der Beobachtung herleiten, wie wichtig die Rollen sind, in denen sich die Schülerinnen und Schüler selbst und gegenseitig sehen. Hier kann die Lehrkraft eingreifen und sich bemühen, interessante Ideen zu unterstützen. Dies tut die Lehrerin beispielsweise in Episode 111205_2_LG1_40-41 (siehe Seite 101): Sie bewertet die Aussage „gleich viele Kästchen“ anders als die vorherigen Vorschläge, indem sie eine Präzisierung fordert. Sie fragt nach dem „wie“ und dem „was“, also danach, was mit gleich vielen Kästchen getan werden soll, wie mit ihnen umgegangen werden soll.

In Fortsetzung dieser Überlegung kann die Lehrkraft mathematisch korrekten Ansätzen Legitimität verleihen. Sie ist eine Autorität in Bezug auf die kulturelle Tätigkeit, wenn diese den Schülerinnen und Schülern noch nicht hinreichend klar ist. In der Tat verspüren die Schülerinnen und Schüler von sich aus ein Bedürfnis nach einer solchen Legitimation, wie sich in Episode 111205_3_LG1_44-59_2 (siehe Seite 152) zeigt. Für Ahmed steht hier letztlich im Vordergrund, ob Sabines Vorgehen legitimiert ist, ob es das ist, wonach gefragt war. Zunächst fragt er zwar noch, ob das Ergebnis zahlenmäßig korrekt sei (63), nachdem

Sabine es ihm nochmals begründet hat, fragt er aber, ob dies auch die „richtige Lösung" ist (65). Er nimmt also an, dass selbst bei einem korrekten Ergebnis ein falscher, unerwünschter Lösungsweg vorliegen könnte. Die Zweifel daran kann Sabine weder durch ihr Verfahren noch durch den Verweis auf die objektive Richtigkeit der Lösung – die berechnete Anzahl der Streichhölzer in den Schachteln ist korrekt – ausräumen: Ahmed sucht letztlich die Bestätigung der Lehrerin (69).

Zur Rolle der Lehrkraft gehört schließlich auch die Benennung von Handlungen, Zielen und Objekten. Dieser zentrale Aspekt wurde bereits bei der Besprechung von Episode 111205_2_LG1_43 in Abschnitt 6.3.1 deutlich gemacht. Die Lehrerin besteht hier auf bestimmten Formulierungen, die sich auf ihren ursprünglichen Tipp „wegnehmen" zurückführen lassen (151, 153, 157, 159), und sie betont das schrittweise Vorgehen, das in Sabines und Herberts Schilderung angelegt ist (159, 162, 166, 174) und legt damit die Grundlage für die gegenseitige Abstimmung über die Tätigkeit mit den Schülerinnen und Schülern.

Insgesamt ist es sicher hilfreich, wenn sich Lehrerinnen und Lehrer bewusst werden, wie sehr ihr situatives Handeln die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler, gerade in der Ausbildung algebraischen Struktursinns, beeinflusst.

6.3.4. Unvorteilhafte Entwicklungen durch Tuning

Auch wenn bis hierhin diverse Interaktionen beschrieben wurden, in denen nachvollziehbar ist, dass die Schülerinnen und Schüler dabei algebraischen Struktursinn ausbilden, muss klargestellt werden, dass Tuning nicht zwangsläufig in die Tätigkeit führt, die aus mathematikdidaktischer Sicht als wünschenswert identifiziert wird. Wenn der Lehrkraft diese Tätigkeit selbst nicht vollständig klar ist, oder Schülerinnen und Schüler untereinander ohne Kontrolle der Lehrkraft Tätigkeitsmotive entwickeln, kann es zu Abweichungen kommen. Ein Beispiel aus der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen bildet das ebenfalls durch Tuning verfestigte Verständnis der abschließenden Division als Verrechnen einer Seite mit der anderen, die das Verständnis als Äquivalenzumformung verschleiert.

Diese Fehlentwicklung lässt sich bis in die beschriebenen Tuning-Prozesse in der ersten Unterrichtsstunde zurückführen und wird in den folgenden Stunden nicht wieder aufgelöst, was die Annahme stützt, dass in diesem Fall auch der Lehrerin die Tragweite des so etablierten Verständnisses nicht klar ist oder geringgeschätzt wird.[8] Tatsächlich ist die beschriebene Interpretation der Division im Falle der meisten Gleichungen durchaus gangbar. Sie erfüllt aber nicht die Anforderungen, die an einen algebraischen Struktursinn für das Lösen von Gleichungen zu stellen wären: Zum einen handelt es sich eben nicht um eine sinnstiftende Umformung, sondern eine, die man auswendig lernen muss. Die Daten zeigen, dass dieses Auswendiglernen einer willkürlich wirkenden Regel vielen Schülerinnen und Schülern Probleme bereitet.

So lässt sich beispielsweise in den bereits besprochenen Episoden 111221_2_LG8_27 (siehe Seite 237) und 120106_3_LG9_42 (siehe Seite 269) bei Herbert beziehungsweise Ahmed die beiden Möglichkeiten, die beiden vorliegenden Zahlen miteinander zu verrechnen, als gleichermaßen (un-)plausibel angesehen werden – es fehlt ein auf die Struktur der

[8] Letzteres würde wiederum zum Verständnis von *Mathematik als Schema* passen.

vorliegenden Situation beziehbares Kriterium.

Dies wird insbesondere kritisch, wenn es schwer fällt, die Richtigkeit der Lösung zu bewerten. In der beobachteten Unterrichtseinheit ist dies insbesondere der Fall, als erstmals nicht-natürliche Lösungen auftreten. In der folgenden Episode äußert Lucas Verunsicherung über Aufgabe A auf Aufgabenblatt 2 (siehe Abbildung 6.8 auf Seite 218):

Episode 6.37: 111209_2_LG3_21: „zwei geteilt durch eins oder eins geteilt durch zwei-“

10 LCS: (*von Herbert aus rechts außerhalb des Bildbereichs, redet bereits vorher mit Herbert, Herbert schaut in seine Richtung*) Ich check eins nich. (*Herbert kratzt sich am Kopf, wandert mit seinem Blick ruckweise zu seinem Aufgabenblatt*) (..)
11 HBT: (*dreht sich wieder zu Lucas*) Genau das Gleiche wie bei anderen-
12 LCS: Ja muss ich jetzt- (*Herbert schielt auf seinen Block, während Lucas spricht*) ,zwei geteilt durch eins oder eins geteilt durch zwei-
13 HBT: Zwei geteilt durch eins- ,sind zwei- (.)
14 LCS: Ich weiß nich ob das so richtich is- (*Herbert beginnt etwas in den Taschenrechner einzugeben*) (..) ,ich weiß dass da zwei rauskommt du Trottel. (.)
15 HBT: (*neigt den Taschenrechner etwas zu sich*) Oder eins durch zwei das sind null komma fünf' (.)
16 LCS: Ja. ,aba du kannst ja nich- die inne Mitte durchbrechen oder was- ,also darf man das- (*Herbert hebt seine Hand an, die auf dem Block liegt, schaut kurz auf den Block, dann auf sein Handgelenk, dreht es etwas*) (...) ,ja scheiße ne' (*lacht, Herbert hält sich die Hand an den Mund*) (...) ,und jetzt Herbert- (..)
17 HBT: (*rückt mit seinem Stuhl etwas nach hinten, legt den Taschenrechner von der einen Hand in die andere, schüttelt den Kopf, gleichzeitig nähert sich der Forscher und stellt sich links hinter Herbert*) Wäbäbä- ,HÄ'
18 LCS: (*lacht*) Ich hab das selbe (unverständlich)
19 HBT: (*deutet mit dem Taschenrechner unbestimmt auf seinen Block, schaut kurz dorthin, dann wieder nach rechts*) Entweder zwei oder null komma- ,ey das doch voll idiotisch- (*schaut nach links zum Forscher, dann wieder auf seinen Block*)
20 F: Sach mal was is- ,was is das Problem' (*beugt sich nach vorne und stützt sich auf den Tisch auf*)
21 HBT: Aso- ,ich weiß nich (*legt den Taschenrechner auf den Tisch*) ob ich jetzt (t*ippt beim Aussprechen der beiden Zahlen auf seinen Block*) zwei geteilt durch eins machen soll- ,oder (*tippt wieder auf den Block, aber in umgekehrter Reihenfolge*) eins geteilt durch zwei' (*schaut zum Forscher auf*)

Auch hier werden beide Möglichkeiten als gleichermaßen (un-)plausibel angesehen, weil die Division nicht als Äquivalenzumformung aufgebaut wurde. Das ist hier besonders problematisch, da nun genau in diesem Schritt ein unerwartetes Ergebnis auftritt. Das Verständnis für die Struktur und ihre innere Logik ist nicht stark genug, um das unerwartete Ergebnis zu begründen, vielmehr wird daher das Ergebnis in Zweifel gezogen.

Doch auch wenn die Regel korrekt memoriert wird, gilt sie nur für lineare Gleichungen mit genau einer Lösung. Sobald es keine Lösung oder unendlich viele Lösungen gibt, stößt das Verrechnen an seine Grenzen. Dies zeigt sich in Episode 111206_3_LG2_24 (siehe Seite 214), in der Ahmed sich mit der Zusatzaufgabe auseinandersetzt, in der eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen bearbeitet werden soll. Unendlich viele Lösungen bedeutet letztlich, dass die Gleichheit zwischen der einen und der anderen Seite der Gleichung unabhängig ist vom Wert der Variablen beziehungsweise dem Inhalt der Streichholzschachteln. Dies könnte man schon erkennen, wenn man die Gleichung strukturiert aufschreibt – im vorliegenden Fall liegen auf beiden Seiten jeweils zwei Streichholzschachteln und fünf Streichhölzer. Ahmed geht jedoch wie gewohnt vor und reduziert die Gleichung so weit wie möglich, nimmt also jeweils gleichmäßig so viel weg wie möglich. Dies führt zur Gleichung $0 = 0$. Weil Ahmed nun nicht das Ziel verfolgt, eine Aussage über den Inhalt einer Schachtel zu gewinnen, sondern er die Zahlen auf beiden Seiten verrechnet, lautet seine Rechnung hier $0 : 0$. Mit einem Verständnis für die Division als Äquivalenzumformung würde Ahmed nicht zu dieser Rechnung kommen, sondern würde erkennen, dass eine auf $0 = 0$ reduzierte Gleichung keinerlei Ansatzpunkt für die erlernten Äquivalenzumformungen bereithält. In beiden Durchläufen (31, 37-39) aber wird eben dies nicht erkannt. Vielmehr erfolgt ein direkter Übergang vom Wegnehmen der Streichhölzer und Schachteln zur Division, die so nicht mit Bedeutung gefüllt ist: „,du kannst alles- (*macht mit beiden Händen eine wischende Bewegung über dem Tisch von sich weg*) wegtun das heißt du rechnest dann (*setzt den linken Ellbogen auf dem Tisch auf, formt mit der Hand eine offene Zange*) null geteilt durch (*der linke Arm bleibt unverändert, der rechte Arm wird in gleicher Weise auf dem Tisch aufgesetzt*) null.“ (39)[9]

6.3.5. Tuning in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

Auch in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen ließen sich einige Episoden identifizieren, in denen Tuning stattfand. Eine von ihnen wird im Folgenden dargestellt, wobei die Aufmerksamkeit darauf liegt, welche Aspekte der bis hierhin geleisteten Charakterisierung des Tunings sich hier wiederfinden lassen und wo Unterschiede auffallen, die sich auf den Inhalt und die Art der Vermittlung zurückführen lassen. In der diskutierten Episode bitten Sabine und Herbert die Lehrerin um Hilfe bei Aufgabe 3 von Aufgabenblatt 2b, die dazu auffordert, die bei der Extrapolation der zuvor ermittelten Messwerte ausgenutzte Regelmäßigkeit zu benennen und die Rolle der (Form der) verwendeten Gefäße zu reflektieren (siehe Abbildung 6.23).

3. Welche Regelmäßigkeit hast du ausgenutzt? Welche Rolle spielt die Form des Becherglases und welche das Zufüllgefäß (Schnaps- bzw. Sektglas)?

Abbildung 6.23.: Aufgabe 3 von Aufgabenblatt 2b in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

[9] Dass Ahmed hier nicht erkennt, dass die Rechnung $0 : 0$ nicht definiert ist, ist hier nebensächlich – in allen anderen Konstellationen der Gleichung käme er auf eine Rechnung mit dem Ergebnis 1 und würde vermutlich ebenso wenig erkennen, dass die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.

Episode 6.38: 120319_2_LZ3_32: Tuning in Bezug auf lineare Funktionen

1 SBN: (*setzt sich gerade hin und schaut zur Lehrerin, die vor ihr steht und noch mit anderen Schülerinnen und Schülern spricht, Herbert schaut auf Aufgabenblatt 2b, das in der Mappe abgeheftet vor ihm liegt*) Frau Kahn' (.)
2 L: (*dreht sich langsam zu Sabine*) J-a' (*macht zwei Schritte zu Sabines Tisch, sodass sie nun direkt davor steht*) (..)
3 SBN: (*lässt ihren Rücken wieder einknicken, schaut auf das Aufgabenblatt vor sich*) Wasn ,äh welche Regel-mäßigkeit (*Herbert schaut zu Sabine herüber*) hast du ausgenutzt welche Rolle spielt die Form des Becher Glases welche das Zufüllgefäß. (*schaut zur Lehrerin auf, Herbert ebenfalls*) (.) (*die Lehrerin nimmt das Aufgabenblatt in die Hand und schaut es an, die beiden Schüler schauen nach vorn*) wa was mein sie damit. (...)
4 L: (*legt das Blatt wieder auf Sabines Tisch, aber um 90° gedreht, sodass es auch für die Lehrerin und Herbert gut lesbar ist, beide Schüler schauen darauf*) Ja- ,wie hast du das (*zeigt auf eine Stelle relativ weit oben auf dem Blatt, wohl auf eine der beiden Wertetabellen*) jetzt ausgerechnet-
5 SBN: Mit null komma fünf.
6 L: (*zieht den Finger zurück*) Genau du hast immer null komma fünf dazugezählt ne
7 SBN: Ja.
8 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Das is deine Re-gelmäßigkeit. (*legt ihren linken Zeigefinger wieder auf das Blatt, wahrscheinlich auf den Text von Aufgabe 3*) (..) ,so und welche Rolle spielt die Form des Becherglases' (..) ,also welche Form- man- (*Sabine hält sich die Hand vor den Mund, die Lehrerin bewegt die linke Hand erst ohne erkennbare Richtung vor sich, macht dann einen Schritt zurück, deutet mit beiden Händen eine nach unten gewölbte Form an, Sabine und Herbert schauen die Lehrerin an*) ,son Glas kann ja auch so aussehn ne' (*geht die gedachte Form mehrfach hoch und runter*)
9 SBN: Ja. (*senkt den Blick*)
10 L: (*wiederholt die Geste weiterhin*) Spielt das ne Rolle'
11 SBN: Nö. (*schaut wieder zur Lehrerin auf*)
12 L: (*formt mit den Daumen und Zeigefingern beider Hände einen horizontalen Ring, bewegt die Hände leicht auseinander und dann runter, hoch und wieder runter, als würde sie einen Zylinder umfassen*) Äh das war jetzt ja son grades Becherglas.
13 HBT: (*gleichzeitig*) Das spielt ne Rolle.
14 L: (*hält die Hände weiter vor sich, formt aber Fäuste*) Warum'
15 HBT: Weil- (*legt seinen Stift, den er bislang in der Hand hatte, auf den Tisch, macht zunächst unbestimmte Gesten mit beiden Händen vor sich*) unten isses ja- (*bewegt die Hände gegeneinander auf und ab*) ,kommt weniger Wasser rein (*hält die Hände zusammen und bewegt sie dann auseinander*) weils (unverständlich) *(lässt die rechte Hand auf den Tisch fallen, macht mit der linken Hand eine Geste von oben nach unten*) mehr Füllmenge. (*hält die linke Hand in Richtung der Lehrerin, Zeige und Mittelfinger abgespreizt*)

16 L: Dann hat man ‚hat man dann (*zeigt mit Daumen und Zeigefinger eine vertikale Strecke in der Luft, die sie nach und nach nach oben verschiebt*) immer immer noch die gleichen Abstand (*geht vom Zeigen der Strecken in eine Geste über, die dem Abgießen eines kleinen Glases gleicht*) wenn man son
17 HBT: Ja.
18 SBN: (*gleichzeitig*) (unverständlich)
19 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) Schnapsglas da- was- (*formt mit den beiden Händen eine nach oben geöffnete Schale*)
20 HBT: Weil untn (*deutet mit den Händen eine Kelchform an*) ‚unten is (*gestikuliert mit der linken Hand in dem Bereich, in dem er vorher die Form angedeutet hatte*) das so klein-
21 L: (*bewegt beide Hände nach oben auseinander und wieder zurück in die Ausgangsposition*) (unverständlich) das Glas'
22 HBT: (*gleichzeitig, bewegt beide Hände im oberen Bereich der vorher angedeuteten Form*) und oben wird das größer-
23 L: (*hält immer noch beide Hände wie eine Schale vor sich, beginnt sie nun zu bewegen*) Ja is- (*hält mit den Händen wieder inne*)
24 SBN: Nein dann is die Regelmäßigkeit anders-
25 L: (*deutet mit der offenen rechten Hand auf Sabine*) (unverständlich)mäßigkeit anders- (*nimmt eine Hand in die andere, faltet dann die Hände*)
26 SBN: (*gleichzeitig*) Weil das- (*dreht sich zu Herbert*) ‚die- (*deutet mit der rechten Hand eine horizontale Fläche an, über die sie streicht*) ‚der verglei ver-teilt sich einfach- (*senkt ihren Blick*)
27 HBT: Ja. (*schaut auf zur Lehrerin*)
28 L: Genau. (*löst ihre Hände voneinander*) ‚gut. (*zeigt mit dem linken Zeigefinger auf den Anfang von Aufgabe 3 auf Aufgabenblatt 2b*) ‚und- ‚das is jetzt die- (*zeigt auf das Ende der ersten Zeile*) ‚das is die Rolle der des Becherglases (*deutet kurz die Geste an, mit der sie zuvor das Becherglas angedeutet hatte, zeigt dann auf die zweite Zeile der Aufgabenstellung, Herbert schaut wie Sabine zu, legt dabei seine Mappe mit dem Aufgabenblatt an den oberen Rand des Tisches, direkt vor ihm liegt nun sein Block*) ‚und welche- Rolle spielt die- des Zufüllgefäßes. (*zieht die Hand zurück, setzt sie mit den Fingern auf der Tischfläche ab*) ‚spielt das auch ne Rolle'
29 SBN: Ja' (*schaut zur Lehrerin auf*) ‚wieviel man reintut. (.) ‚zum Beispiel
30 L: Ja' (*zeigt mit der linken Hand auf die zweite Zeile der Aufgabenstellung, Herbert schaut die Lehrerin an, Sabine schaut vor sich auf das Blatt*) ‚aber- ‚es geht ja jetzt nich (*zieht die Hand zurück, hebt kurz die rechte Hand*) um die Menge sondern um die Form. (*zeigt auf das Wort "Form", dann wieder auf die zweite Zeile*) ‚um die Form des Zu also- (*Sabine schaut zur Lehrerin auf*) ‚spielt das auch ne Rolle' (*zeigt auf Aufgabenblatt 2a, das links von Sabine liegt*) ‚son Sektglas sieht ja so aus ne'
31 HBT: Äh.
32 SBN: (*gleichzeitig, beugt sich etwas nach vorne über das Aufgabenblatt 2a*) Ja-
33 L: (*Murat, der links von Sabine sitzt, wendet sich dem Geschehen zu*) Das hat man jetzt immer bis zur Markierung vollgemacht (*zieht ihre Hand zurück*)

34 SBN: Ja- (*lehnt sich wieder zurück*)
35 HBT: (*fast gleichzeitig*) Ja.
36 L: Spielt das ne Rolle (*Sabine schaut zur Lehrerin auf*) welche Form das hat'
37 SBN: N-e-i-n.
38 L: Warum nich'
39 MRT: Weil das dann immer (unverständlich)
40 SBN: (*gleichzeitig*) Weil das trotzdem alles reinge- packt w-i-rd-
41 L: Weil trotzdem-
42 HBT: Bis- ,immer so (*bewegt die linke Hand kreisend in der Luft*) bis zum Strich einfach- (*fasst sich an die Nase, beide Schüler schauen zur Lehrerin auf*)
43 SBN: (unverständlich) (*die Lehrerin nickt*)
44 L: So das musst du jetzt irgndwie aufschreiben (unverständlich)
45 HBT: Irgendwie. (*öffnet seinen Füller und wendet sich seinem Heft zu, Sabine packt die vor ihr liegenden Blätter und legt sie wieder auf den Tisch, beginnt ihre Unterlagen zu sortieren, die Lehrerin entfernt sich*)

Zunächst einmal kann festgehalten werden, inwiefern sich die beobachtete Interaktion als Tuning auffassen lässt: Die Lehrerin stimmt mit Sabine und Herbert die Sicht auf die vorliegende Situation ab. Hier geht es nun aber nicht darum, mögliche Handlungen zu *entwickeln*, sondern bereits durchgeführte Handlungen in einer bestimmten Weise zu *deuten*. Es wurde bereits am Ende von Abschnitt 6.1.1 herausgearbeitet, dass die Tätigkeit in Bezug auf lineare Funktionen eine gänzlich andere ist als die in Bezug auf lineare Gleichungen. Die Orientierung in der Situation ist für die Schülerinnen und Schüler deutlich einfacher, in der Anleitung, wie die Bechergläser befüllt werden sollen (siehe Aufgabenblatt 2a, Anhang A.2), wurde das erwartete Vorgehen sehr deutlich gemacht. Doch erst in der Reflexion dessen, was dort eigentlich getan wurde, was eigentlich wichtig war, kommt es zu der Annäherung an die kulturelle Tätigkeit mit der algebraischen Struktur, zu Objectification. Und hier brauchen die Schülerinnen und Schüler wiederum Hilfe, hier findet Tuning statt.

Zunächst klärt die Lehrerin in einem kurzen Austausch mit Sabine (4-8), ob die gesehene Regelmäßigkeit wie erwartet beschrieben wird. Sabines Aussage darüber, wie sie die Werte der Wertetabelle ausgerechnet hat, ist ungenau (5) und wird von der Lehrerin präzisiert (6). Aus „Mit null komma fünf." formt sie die Aussage „Genau du hast immer null komma fünf dazugezählt ne". Durch das hinzufügen des Verbs betont die Lehrerin, dass addiert wurde. Das Wort „immer" deutet darauf hin, dass in jedem Schritt der gleiche Zahlenwert verwendet wird. Nachdem Sabine Verständnis signalisiert (7), resümiert die Lehrerin: „Das is deine Re-gelmäßigkeit." (8)

Dann fokussiert die Lehrerin auf die Formen der Gefäße, die teilweise relevant sind, teilweise aber auch nicht. Dabei bringt sie gezielt eine alternative Form für das Gefäß ins Spiel, an dem der Wasserstand gemessen wird (8) und fragt, ob diese Form eine Rolle spielt (10, 12). Sabine verneint dies (11), Herbert äußert sich deutlich entgegengesetzt (13). Es zeigt sich nun wiederum, dass die Lehrerin ihre Rolle nutzen kann, um korrekte Ansätze in der Interaktion zu stärken. Sie lässt Herbert begründen, wie er zu seiner Aussage kommt (14-22). Herberts Erläuterungen sind anhand der gemachten Aufnahmen nicht komplett nachzuvollziehen, er scheint deutlich machen zu wollen, dass das Gefäß nach

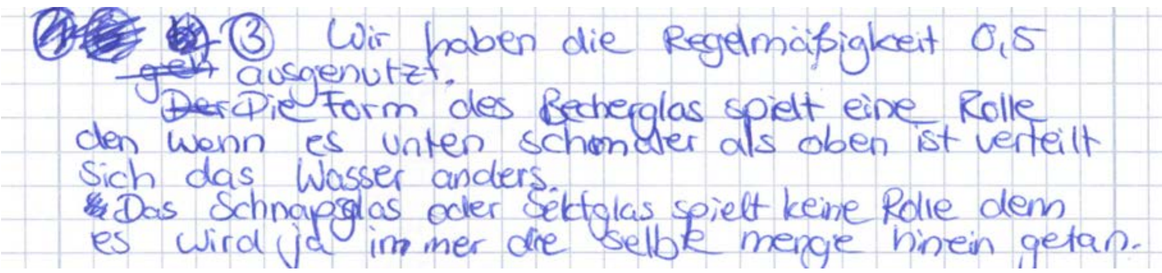

③ Wir haben die Regelmäßigkeit 0,5
~~geh~~ ausgenutzt.
~~Der~~ Die Form des Becherglas spielt eine Rolle
den wenn es unten schmaler als oben ist verteilt
sich das Wasser anders.
Das Schnapsglas oder Sektglas spielt keine Rolle dem
es wird ja immer die selbe menge hinein getan.

Abbildung 6.24.: Sabines Aufzeichnungen zu Aufgabe 3 von Aufgabenblatt 2b zu linearen Funktionen

oben hin weiter wird (siehe vor allem Zeile 20 und 22, auch die dort beschriebene Geste). Im Ergebnis ist aber auch Sabine schließlich der Meinung, dass bei einem Gefäß mit einem unregelmäßigen Querschnitt „die Regelmäßigkeit anders“ (24) sein müsse. Mit der Aussage „Weil das- (*dreht sich zu Herbert*) ‚die- (*deutet mit der rechten Hand eine horizontale Fläche an, über die sie streicht*) ‚der verglei ver-teilt sich einfach- (*senkt ihren Blick*)“ (26) mag sie aussagen wollen, dass bei einem größeren Querschnitt sich das hinzugefügte Wasser verteilt, sodass der Höhenzuwachs geringer ist. Die Lehrerin könnte hier durchaus noch mehr Präzision einfordern, geht aber offenbar davon aus, dass die Rolle der Form des Becherglases klar ist und lobt Sabine und Herbert explizit (28).

Die Lehrerin bringt nun (anders als der Text der Fragestellung) die Form des Zufüllgefäßes ins Spiel (28, in Zeile 30 noch expliziter), fokussiert also auch hier die Aufmerksamkeit, wenn auch in einer Richtung, die in der Unterrichtsplanung nicht intendiert war. Sabine kommt aber von sich aus darauf zu sprechen, dass es das *Fassungsvermögen* ist, dass relevant ist („wieviel man reintut“, 29). Sie kann daher, nachdem die Lehrerin deutlich gemacht hat, inwiefern auch das Zufüllgefäß verschiedene Formen annehmen könnte (30-36), erklären, dass die Form eben keine Rolle spielt (37). Herbert betont demgegenüber die Bedeutung der Messlinie, an der man sich beim Abmessen der (immer gleichen) Wassermenge orientiert („‚immer so (*bewegt die linke Hand kreisend in der Luft*) bis zum Strich einfach-“, 42). Auch hier sind die Beschreibungen der Schülerinnen und Schüler weit von mathematischer Exaktheit entfernt, und auch hier wird der Prozess des Tunings nicht weiter verfolgt, vielmehr fordert die Lehrerin Sabine und Herbert auf, „irgndwie“ aufzuschreiben (44). Sie weist insgesamt dem genauen Benennen der Beziehungen einen geringen Stellenwert zu, und dass sie sich genau hier zurückzieht, wirkt sich letztlich auch auf die Qualität der Aufzeichnungen aus, die Sabine und Herbert in der Folge machen – Abbildung 6.24 zeigt den entsprechenden Ausschnitt aus Sabines Mappe. Hier fehlen in der Beschreibung der ausgenutzten Regelmäßigkeit die beiden Aspekte, die die Lehrerin hinzugefügt hatte, der Satz „Wir haben die Regelmäßigkeit 0,5 ausgenutzt.“ ist für Außenstehende nicht nachvollziehbar. Die Aussagen über die Rolle, die die Form der jeweiligen Gläser betreffen, sind korrekt, verfehlen aber den Kern der Struktur, die hier eigentlich erschlossen werden sollen.

Eine weitere Vertiefung wäre an dieser Stelle also durchaus wünschenswert gewesen. Vielleicht hätte der Lehrerin in der Situation das Wissen über den Prozess des Tunings geholfen. Aber auch ohne dieses Wissen hat ein solcher Prozess hier in Ansätzen stattgefunden. Die vorliegende Episode zeigt, dass Tuning zur Ausbildung algebraischen Struktursinns auch bezüglich einer anderen Struktur ein hilfreiches theoretisches Konstrukt darstellt. Auch hier ist es wichtig, mit den Schülerinnen und Schülern zu Präzision in der Erfassung der strukturellen Merkmale der durchgeführten Tätigkeit zu kommen. Denn auch wenn die mündlichen und verschriftlichten Beschreibungen der Schülerinnn und Schüler fachlich wenig zufriedenstellend sind, enthalten sie durchaus einen bestimmten Blick auf das zuvor durchgeführte Befüllen eines Becherglases mit Wasser, auf dem sich in der Folge (auch anhand anderer Anwendungskontexte) aufbauen lässt.

7. Diskussion

Zu Beginn dieser Arbeit wurde herausgearbeitet, dass ihr Anspruch und Ziel darin bestehen soll, die Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht als Prozess zu beschreiben und zu untersuchen. Damit wurde die Aufgabe angenommen, den Begriff des algebraischen Struktursinns gegenüber seinem bisherigen Gebrauch in der Literatur zu erweitern. Das Thema wurde also grundlegend anders angegangen als von Hoch (2007): Der Hauptbezugspunkt waren in dieser Arbeit nicht Erwartungen, die Didaktikerinnen und Didaktiker, Mathematikerinnen und Mathematiker an ein solches Konstrukt haben. Auch das Messen diesbezüglicher Fähigkeiten wurde nicht angestrebt. Es wurde vielmehr nach Ansätzen gesucht, die beschreiben und verstehen helfen, was im Klassenunterricht passiert, wenn Schülerinnen und Schüler erstmals mit bestimmten algebraischen Strukturen umgehen. Dabei liefert das SVSt-Modell die Mittel für eine erste Annäherung an solche Situationen. Die Theory of Objectification ist die eigentlich angewandte Lerntheorie, die bestimmt, wie das Verhältnis zwischen den Lernenden und den ihnen bisher unbekannten algebraischen Strukturen beschrieben wird und was ihr Lernen diesbezüglich ausmacht. Kurz zusammengefasst wurden die folgenden Erkenntnisse gewonnen:

- Die Ausbildung algebraischen Struktursinns lässt sich als ein Hineinwachsen in eine Tätigkeit in Bezug auf die betreffende algebraische Struktur beschreiben.
- Bezüglich linearer Gleichungen gliedert sich dieser Prozess folgendermaßen:
  1. Orientierung in der Situation und über Ziele
  2. Erschließung erlaubter Handlungen (im beobachteten Unterricht angeregt durch die Lehrkraft)
  3. zunehmende Routinisierung, Weiterentwicklung
- Festgehalten wird die neue Sicht auf die algebraische Struktur in verbalen Beschreibungen und Verschriftlichungen. Die verbalen Beschreibungen verweisen als Metaphern auf den ursprünglichen Tätigkeitskontext (Lösen von Streichholzschachtelgleichungen, Bestimmung von Treppensteigungen, gleichmäßiges Befüllen von Bechergläsern).
- In der Ausbildung algebraischen Struktursinns sind die Schülerinnen und Schüler auf hinreichend ausgebildete (Grund-)Vorstellungen in den relevanten Bereichen (z. B. Grundrechenarten, Bruchzahlen, Darstellungsformen) angewiesen.
- Die Ausbildung algebraischen Struktursinn ist keine reine Geistesleistung: Situatives Interesse und längerfristige Rollenfestlegungen spielen eine entscheidende Rolle.

- Als soziale Interaktionsform, in der all diese Aspekte zusammenkommen, wurde das Tuning beschrieben. Hier stimmen die Schülerinnen und Schüler ihre Sicht auf die algebraische Struktur mit der Lehrkraft ab.

Wie verhalten sich diese Erkenntnisse zum bestehenden Wissen? Inwiefern sind sie generalisierbar? Indem die einzelnen Erkenntnisse in die Theorie dieser Arbeit eingebettet und auf Ergebnisse aus der Forschung bezogen werden, wird ihre Reichweite erkundet; es wird gezeigt, dass und wie die Ergebnisse über die betrachteten Einzelfälle hinaus von Bedeutung sind. Dies geschieht im ersten Abschnitt dieses Kapitels. Dabei ist am Rand jeweils vermerkt, auf welchen Abschnitt der vorliegenden Arbeit sich bezogen wird. Allerdings konnten nicht alle Forschungsfragen in Gänze beantwortet werden. Daher soll in einem weiteren Abschnitt darauf eingegangen werden, woran die Gewinnung diesbezüglicher Hypothesen scheiterte, welche Ansätze dennoch entwickelt wurden und inwiefern diese in Zukunft weiterverfolgt werden könnten. Das Kapitel schließt mit einem Ausblick, der die Perspektiven für Unterricht und Forschung umreißt, die sich aus dieser Arbeit insgesamt ergeben.

7.1. Lernbezogene Neudeutung eines mathematikdidaktischen Begriffs

7.1.1. Ausbildung algebraischen Struktursinns durch Objectification

Abschnitt 6.1 steht ganz im Zeichen des Lernens bezüglich algebraischer Strukturen, das als Objectification aufgefasst wird: Es wird das Hineinwachsen in auf algebraische Strukturen bezogene Tätigkeiten beschrieben, die Annäherung an das kulturelle Wissen um den Umgang mit linearen Gleichungen beziehungsweise linearen Funktionen.

Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler gibt die Struktur linearer Gleichungen die möglichen Handlungen und somit insgesamt die Tätigkeit vor:[1] Zum einen muss die Gleichheitsbeziehung der Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens zueinander erhalten werden. Man muss also stets auf beiden Seiten der Gleichung die gleichen Änderungen vornehmen, also Äquivalenzumformungen durchführen. Gleichzeitig muss als Grundregel beachtet werden, dass die Variable innerhalb einer Gleichung stets den gleichen Wert annimmt. Daraus folgt, dass man die Gleichung, sofern sie genau eine Lösung besitzt, auf eine Aussage über den Wert der Variablen reduzieren kann.

Bei linearen Funktionen ist der Umgang mit ihnen nicht so klar vorgegeben wie bei linearen Gleichungen, was sich auch an der Rolle zeigt, die die Variable hier spielt. Während es bei Gleichungen letztlich immer um ihre Bestimmung geht – gleichgültig unter welchem Aspekt man sie betrachtet (Gegenstands-, Einsetzungs- oder Kalkülaspekt (Malle, 1993, S. 46)) –, hängt der Umgang mit Funktionen davon ab, wie man die Variable betrachtet:

[1] Aus kulturhistorischer Sicht ist es andersherum: In menschlicher Tätigkeit hat sich die Struktur linearer Gleichungen in der uns heute vorliegenden Form herausgebildet.

als Einzelzahl oder unter dem Bereichsaspekt, wobei bei letzterem der Definitionsbereich simultan betrachtet werden kann oder als ein Bereich, der von der Variablen durchlaufen wird (Malle, 1993, S. 80 f.). Je nach Zielsetzung bieten sich verschiedene Darstellungsformen an. Überall jedoch treffen die Schülerinnen und Schüler auf einen „Anfangswert“ – den Funktionswert für $x = 0$ – und eine gleichmäßige Veränderung. Auf diese beiden strukturellen Merkmale können und sollen sie immer wieder zurückgreifen, wenn sie mit linearen Funktionen umgehen.

In beiden Fällen wurde versucht, den Schülerinnen und Schülern über Tätigkeit einen Zugang zu den algebraischen Strukturen zu ermöglichen. Wie die beobachteten Schülerinnen und Schüler dieses Angebot in der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen nutzten, ist in Kapitel 5 dargestellt wurden. Bei dieser Darstellung handelt es sich um eine Zusammenfassung der formulierenden Interpretationen der entsprechenden Daten. Die auf die beschriebenen Lernprozesse bezogenen Forschungsfragen konnten aber erst in der anschließenden reflektierenden Interpretation angegangen werden.

Übergreifend zeigte sich, dass die Schülerinnen und Schüler sich zunächst in der Situation orientieren müssen, mit der sie konfrontiert sind. Hierbei wird sichtbar, dass diese sich für die Lernenden grundlegend anders darstellt als für die Lehrkraft. Letztere sieht die Situation bereits mit dem Wissen um die zugrundeliegende Struktur und die damit verbundene Tätigkeit. Dies wird insbesondere in Bezug auf die Ziele deutlich, auf die hingearbeitet werden soll, und in Bezug auf die Handlungen, anhand derer sich diese Ziele verfolgen lassen. Bei den linearen Gleichungen gelang es den beobachteten Schülerinnen und Schülern letztlich nur mit Hilfe der Lehrerin, zur intendierten Tätigkeit zu kommen. Bei den linearen Funktionen waren sie eigenständiger, allerdings musste auch hier das Strukturelle durch die Lehrkraft hervorgehoben werden. Abschnitt 6.1.1

Das beschriebene Vorgehen – die Klärung der Situation und die Ableitung der Handlungen und damit der gesamten Tätigkeit – wiederholt sich bei der Bearbeitung weiterer Aufgaben immer wieder. Dabei zeigt sich, dass sprachliche Explizitheit einerseits von großer Relevanz ist, andererseits aber auch immer wieder in den Hintergrund tritt, wenn angenommen wird, dass die Tätigkeit nun bekannt ist. Die einsetzende Routinisierung befähigt die Schülerinnen und Schüler, Aufgaben schneller und sicherer auszuführen. Andererseits wurde auch gezeigt, dass sie im Zuge dieser Entwicklung teilweise nicht mehr wahrnehmen, dass die aktuelle Struktur nicht immer anwendbar ist oder ihr aktuelles Verständnis Annahmen enthält, die nicht universell gelten. Ein Anspruch, den Arcavi (2005) an in der Schulalgebra kompetente Schülerinnen und Schüler formuliert, besteht in einer „opportunistic, flexible back and forth transition from the use of meaningless actions (such as the automatic application of rules and procedures) to sense making“ (S. 45). Genau aus dieser Überlegung leitet Arcavi die bereits oben zitierte Forderung nach Geduld her: Partielles Wissen solle zulässig sein, Schülerinnen und Schüler bräuchten Zuversicht, dass „further actions (not totally clear at the beginning) may advance you“ (Arcavi, 2005, S. 45). Arcavi fährt fort: Abschnitt 6.1.2

> This implies having a different image of learning from the one that regards (and popularizes) learning as an effortless enterprise. Regarding understanding as ‘either you have it or you don’t’ and learning as a ‘quick road to achieve

> that' may hinder progress (S. 45 f.).

Wie bereits in der Einleitung herausgearbeitet wurde, unterliegt gerade der Begriff des algebraischen Struktursinns der Gefahr, in dieser Weise verstanden zu werden: als Konstante, auf die weder das Individuum selbst noch die Lehrperson einwirken kann. Die vorliegende Arbeit hingegen unterstützt die Sichtweise, dass sich algebraischer Struktursinn sehr wohl entwickeln kann und dem Schüler oder der Schülerin dafür Zeit zugestanden werden sollte.

Abschnitt 6.1.3 Die gewonnene – vorläufige – Sicht auf die jeweilige algebraische Struktur wird von den Schülerinnen und Schülern auf zweierlei Weise festgehalten. Zum einen findet sie ihren Ausdruck in den sprachlichen Beschreibungen. Diese verweisen in Metaphern deutlich und langfristig auf den ursprünglichen Tätigkeitskontext. Im beobachteten Unterricht wurden Begriffe und Wendungen aus den Kontexten, vermittels derer die jeweiligen algebraischen Strukturen eingeführt wurden – beispielsweise „Schachteln" für Variablen, „wegnehmen" für Äquivalenzumformungen mit dem Ziel, eine Gleichung in eine einfachere Form zu bringen, „Anfangsstand" für den y-Achsenabschnitt bei linearen Funktionen – auch dann noch verwendet, als eigentlich schon die allgemeinere, mathematische Ebene erreicht war. Offensichtlich unterstützt also die aktive Tätigkeit, anhand derer die algebraische Struktur eingeführt wird, das Erinnern. Das kann genutzt werden, birgt aber auch Probleme. Der ursprüngliche, ostensive (handgreifliche) Tätigkeitskontext bildet die nicht-ostensive algebraische Struktur nämlich nur teilweise ab, er kann diesbezüglich also Fehlvorstellungen induzieren (Font, Godino, Planas und Acevedo, 2010).

Die Relevanz von Metaphern wird in der mathematikdidaktischen Diskussion häufig mit der Arbeit von Lakoff und Núñez (2000) verbunden, deren Kernaussage darin besteht, dass mathematische Konzepte durch konzeptuelle Metaphern erschlossen werden. Der Nachweis dafür wird allerdings auf der menschheitsgeschichtlichen und allgemein-biologischen Ebene geführt; über Lernprozesse von Individuen werden keine belastbaren Aussagen gemacht.[2] Von den in dieser Arbeit vorgestellten Beobachtungen her wäre insbesondere interessant, welche *Probleme* die zwangsläufig metaphorische Natur der Mathematik für die Schülerinnen und Schüler birgt. Lakoff und Núñez (1997) weisen selbst auf den kritischen Punkt hin, dass sich die Metaphern, für die sie nachweisen, dass sie die historische Idee der natürlichen Zahlen begründen (die sogenannten *grounding metaphors*), nicht ad hoc erweitern lassen:

> … the arithmetic characterized by these metaphors has been greatly extended over the centuries through linking metaphors and metonymies, and there is no way to extend these metaphors in a consistent manner to cover all those extensions.
>
> (…)
>
> … however straightforward these extensions are, they are still concocted novel extensions of the natural grounding metaphor, and so will seem a bit artificial

[2]Sfard (1994) leistet unter Rückgriff auf die frühere Arbeit von Lakoff und Johnson (1980) den Nachweis, dass auch individuelles Verstehen als „die Geburt einer Metapher" aufgefasst werden kann. Sie stützt sich dabei allerdings auf die Selbstauskünfte von Mathematikern und Mathematikerinnen, es geht also auch hier nicht um didaktisch geplante Lernprozesse.

> because it is a bit artificial. Such metaphors are neither natural grounding metaphors, nor are they linking metaphors. They belong neither to the realm of the natural grounding of arithmetic, not to the linking of one domain to another, but rather to the domain of teaching by making up extensions of the natural grounding metaphors. (…) Hence, they stand out of mathematics proper and are part of imaginative, and sometimes forced, methods of mathematics education (S. 38 f.).

Anders als in der historischen Entwicklung, in der die Metaphernbildung je nach Sichtweise durch gesellschaftliche, kulturelle und/oder ökonomische Faktoren bedingt ist und zwangsläufig erst einmal auf unmathematische Bedeutungsbereiche zurückgreifen muss (weil die Mathematik erst noch erfunden werden muss), besteht im Unterrichten der so gebildeten Konzepte eine gewisse didaktische Freiheit: Das Unterrichtsdesign entscheidet, welche Ursprungskontexte zur Verfügung stehen. Damit verbunden ist aber auch die Aufgabe, bestimmte Schwierigkeiten zu umgehen. Sfard (1997, S. 367-370) identifiziert drei solche Schwierigkeiten, die sich alle auf die bereits angedeutete Unzulänglichkeit außermathematischer Kontexte zur Erschließung mathematischer Konzepte beziehen:

- Die Metapher kann Zusammenhänge implizieren, die in der Mathematik nicht gelten. In diesem Fall besteht die Gefahr einer „metaphorischen Überprojektion" (S. 368 f.).
- Die Metapher kann inhaltlich zu beschränkt sein, sie erlaubt bestimmte eigentlich wünschenswerte Erweiterungen nicht.
- Eben wegen dieser Limitierungen müssen (langfristig) verschiedene Metaphern für ein mathematisches Konzept zusammengeführt werden, was wiederum eine Hürde für Schülerinnen und Schüler sein kann.

Bei der Metapher des „Wegnehmens" liegt genau der zweite Fall vor: Man kann, solange man an physische Objekte denkt, nicht mehr wegnehmen als vorhanden ist. Was das Wegnehmen negativer Zahlen bedeutet, lässt sich zwar plausibilisieren, indem man sagt, es ginge darum, den negativen Ausdruck zu entfernen. Dass dann aber *addiert* wird, um „wegzunehmen", könnte zu Konflikten mit der Basismetapher der Arithmetik als Objektkonstruktion führen, wo gerade die *Subtraktion* als „taking smaller objects from larger objects to form other objects" (Lakoff und Núñez, 2000, S. 66, vgl. auch Padberg und Benz, 2011, S. 111 f.) aufgebaut wird. Die Gefahr der metaphorischen Überprojektion besteht beispielsweise beim Waagemodell linearer Gleichungen, wo man ignorieren muss, dass die „Verpackungen" ein Eigengewicht haben – auch deshalb wurde von der Verwendung dieses didaktischen Modells im Unterrichtsdesign zu dieser Studie abgesehen.

Eine vielleicht fruchtbare Frage, die sich auf der Ebene der mathematikdidaktischen Diskussion über die aus didaktisch konstruierten Tätigkeiten erwachsene Metaphernnutzung auftut, besteht darin, ob es sich beispielsweise beim „Wegnehmen" überhaupt um eine Metapher handelt oder nicht doch um eine Metonymie – dies hängt davon ab, ob man die

Streichholzschachtelgleichungen und die symbolisch-algebraischen Gleichungen dem gleichen Begriffsbereich zuordnet oder nicht.[3] Krummheuer (1983, S. 168) jedenfalls identifiziert die Verwendung außermathematischer Wendungen in Bezug auf mathematische Inhalte als Metonymien und nennt die Unauffälligkeit von Metonymien (im Vergleich zu Metaphern) als einen möglichen Grund dafür, dass implizierte Zusammenhänge unklar bleiben. Gemeint ist damit, dass Wendungen wie beispielsweise „wegnehmen“, die aus der Tätigkeit mit konkreten Objekten, die für mathematische Objekte stehen, in ihrer Doppelbedeutung als so selbstverständlich (von selbst verständlich) angenommen werden, dass die Lehrperson nicht merkt, welche Leistung sie ihren Schülerinnen und Schülern bei ihrer Verwendung zumutet. Untersuchungen, die ganz gezielt die spezifischen Metaphern und Metonymien und ihre Beziehung zum algebraischen Struktursinn der jeweiligen Schülerinnen und Schüler untersuchen, könnten hier erhellend sein.

Anhand der in dieser Arbeit vorliegenden Ergebnisse wird in jedem Fall ein Zusammenhang zwischen der Tätigkeit und dem dabei erlernten mathematischen Inhalt in der Sprache sichtbar. Aus Sicht der Theory of Objectification ist der Aussage „… the only mathematics is embodied mathematics“ (Lakoff und Núñez, 2000, S. 346, zur besseren Lesbarkeit vom Original abweichende Groß- und Kleinschreibung) gänzlich zuzustimmen – die Leistung der TO besteht gerade darin, Embodiment, die Untrennbarkeit von körperlichem Erleben und Denken, durch den Tätigkeitsbegriff theoretisch zu fassen und die von Lakoff und Núñez vertretene Sichtweise auf konkrete Lernprozesse anzuwenden. Es wird eine Verbindung nachgewiesen zwischen dem beobachteten Metapherngebrauch der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die neue algebraische Struktur und dem Lernprozess, der vermittels einer bestimmten Tätigkeit stattgefunden hat oder gerade stattfindet.

Die zweite beschriebene Art, in der sich der neu gewonnene oder noch in der Entwicklung begriffene Sinn für die algebraische Struktur manifestiert, sind Verschriftlichungen, konkreter: bestimmte Notationen. Hierbei handelt es sich freilich um das Feld, auf das der Begriff algebraischen Struktursinns bislang hauptsächlich bezogen wurde. Die von Hewitt (2012) vorgeschlagene Unterscheidung zwischen willkürlichen und notwendigen Regeln (siehe Seite 14) ist sehr hilfreich in Bezug auf die Betrachtung individueller Schreibweisen, wie sie ab Seite 228 beschrieben wurden. Indem den Schülerinnen und Schülern zunächst freigestellt war, wie sie die Lösungsprozesse zu den Streichholzschachtelgleichungen aufschreiben, zeigen sie, welche Aspekte ihnen jeweils als notwendig für die Darstellung des Gesamtzusammenhangs, der algebraischen Struktur aus ihrer persönlichen Sicht zu einem bestimmten Zeitpunkt erscheinen. Dies liefert eine Basis für die Einführung der konven-

[3] Lakoff und Núñez (2000, S. 42) wenden die folgende Definition von Metaphern an: „… metaphoric mapping involves a source domain and a target domain. … The mapping is typically partial. It maps the structure in the source domain onto a corresponding structure in the target domain“ (Lakoff, 1987, zit. n. Goosens, 1990, S. 325). In unmittelbarer Gegenüberstellung liest sich die Definition von Metonymien wie folgt: „…a metonymic mapping occurs within a single conceptual domain which is structured by an ICM (= an Idealized Cognitive Model)“ (Lakoff, 1987, zit. n. Goosens, 1990, S. 325). In dem zitierten Artikel geht es Goosens genau darum herauszustellen, „that metaphor and metonymy can be intertwined“ (S. 323).

Um Missverständnissen vorzubeugen sei darauf hingewiesen, dass Lakoff und Núñez (2000) an genau einer Stelle (S. 74 f.) von einer spezifischen Metonymie sprechen und dort *nicht* eine Variante der im Zentrum ihrer Arbeit stehenden Metaphorik meinen: Unter der *fundamentalen Metonymie der Algebra* verstehen sie die Idee, dass ein Symbol für eine Vielzahl von Zahlenwerten stehen kann.

tionalisierten Schreibweise. Dabei ist es sicher wünschenswert, dass der Lehrkraft klar ist, welche der vorgegebenen Konventionen mathematisch notwendig sind und welche zwar im Sinne der Stiftung kultureller Kohärenz (vgl. Heymann, 1989) erlernt werden müssen, aber in ihrer Besonderheit nicht zwangsläufig aus der algebraischen Struktur folgen. Notwendig ist beispielsweise, dass Äquivalenzumformungen als solche verstanden werden, und um dies zu unterstreichen ist eine adäquate Notation sicher hilfreich. Dass sie aber auf der rechten Seite neben einem vertikalen Strich vermerkt werden, ist eine willkürliche Konvention, die lediglich bekannt sein muss, aber kein Verstehen erfordert.

Schließlich konnte in Abschnitt 6.1.4 herausgearbeitet werden, welche Rolle mathematisches Vorwissen in der Ausbildung algebraischen Struktursinns ist. Gerade aus der tätigkeitstheoretischen Perspektive hat es sich diesbezüglich als hilfreich erwiesen, sich auf Grundvorstellungen zu beziehen. Sie helfen zu beschreiben, welche spezifischen Vorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern vorhanden sein sollten, damit sie die Tätigkeit mit linearen Gleichungen oder linearen Funktionen meistern können. Konkret wurde ein solcher Zusammenhang für die Grundvorstellung zur Division nachgewiesen, die Dividieren als Verteilen auffasst. Nur mit einer solchen Vorstellung kann verstanden werden, dass beispielsweise in einer Schachtel drei Streichhölzer enthalten sind, wenn bekannt ist, dass vier Schachteln zwölf Streichhölzer enthalten. So kann die Division als Äquivalenzumformung in der Tätigkeit mit konkreten Objekten eingeführt werden. Später – bei einer Gleichung wie $2{,}5x = 34,9$, die in der Aufgabe „Vergesslich im Elektromarkt“ (vgl. die Darstellungen ab Seite 168 sowie ab Seite 186) zu lösen ist – muss die Division dann rein innermathematisch als Umkehrung der Multiplikation begriffen werden.[4]

Abschnitt 6.1.4

7.1.2. Ausbildung algebraischen Struktursinns ist mehr als Strukturen zu verstehen

Es zeigt sich bereits im bis hierhin diskutierten Abschnitt 6.1, dass Objectification untrennbar mit Subjectification verbunden ist. Die Routinisierung im Umgang mit der jeweiligen algebraischen Struktur ist genau ein Ausdruck dieses Prozesses. Die Schülerinnen und Schüler sehen die jeweilige Struktur nun anders als zuvor, sie verfügen über neue Handlungsmöglichkeiten. Dass der Lernprozess, der diese Veränderung herbeiführt, kein bloßes Aufnehmen von Wissen ist, zeigt sich aber noch deutlicher an den emotionalen und sozialen Dynamiken, die in Abschnitt 6.2 herausgearbeitet wurden. Der Gegenstand lässt sich nicht trennen von der persönlichen Haltung ihm gegenüber. Algebraischer Struktursinn ist (neben einem fachlichen Wissen) auch eine Haltung, eine Einstellung algebraischen Strukturen gegenüber. Die Tatsache, dass andere etwas sehen und können, wo man selbst nichts sieht und keine Handlungsoptionen hat, kann zunächst durchaus frustrierend sein – in der Einleitung wurde argumentiert, dass dieses Gefühl seinen Ausdruck gerade in

Abschnitt 6.2

[4] Natürlich könnte man auch hier die Division als Aufteilen interpretieren und sagen, „2,5 passt 13,9 mal in 34,9“. Eine Schwierigkeit dabei liegt in der Tatsache, dass keine glatte Aufteilung möglich ist – die Aussage verlangt nach einer Interpretation, die Vertrautheit mit der Multiplikation nichtnatürlicher Zahlen voraussetzt. Gewichtiger noch ist aber die Tatsache, dass in der Anwendungsaufgabe der multiplikative Zusammenhang gerade andersherum gedacht wird: 34,90€ ist der 2,5-fache Preis einer CD. Die Frage, wie oft 2,5 in 34,9 passt, erscheint in diesem Zusammenhang abwegig.

Aussagen finden, die algebraischen Struktursinn zu einer biographischen Konstante machen (z. B. „Mir fehlt der Sinn für algebraische Strukturen eben.“). Diese Interpretation kommt einer Kapitulation gleich, weil Veränderung unmöglich erscheint. Die vorliegende Arbeit zeigt aber, dass die verspürte Fremdheit durchaus auch eine motivierende Wirkung haben kann. Beim Überwinden der Fremdheit werden gleich drei von vier psychologischen Grundbedürfnissen (Grawe, 2004) angesprochen: ganz konkret das Bedürfnis nach Orientierung und Kontrolle, durch die institutionelle Situation (den Schülerinnen und Schülern ist klar, dass sie letztlich gezwungen sind, sich mit Mathematik auseinanderzusetzen) aber auch das Bedürfnis nach Lustgewinn und Unlustvermeidung sowie das Bedürfnis nach Selbstwerterhöhung und Selbstwertschutz. Die Befriedigung dieser Bedürfnisse fungiert als ein „Motor der psychischen Entwicklung“ (Grawe, 2004, S. 319-326). In den vorliegenden Daten konnte dies ganz konkret an der Orientierung von Katie an Ahmeds Handeln gezeigt werden. Die Ausrichtung des Lernens auf Grundbedürfnisse, die *jeder* Mensch hat und befriedigen möchte, hat aber ein deutlich über das Thema dieser Arbeit hinausgehendes Potenzial, wie beispielsweise die Arbeit von Schäfer und Bikner-Ahsbahs (2009) zur motivationsorientierten Förderung leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler zeigt.[5] Die dort vorgestellten Ergebnisse zeigen insbesondere, dass die Lehrperson in Fördersettings die psychologischen Grundbedürfnisse im Blick haben sollte.

Wenn es schließlich zu Momenten des Erkennens kommt, lassen sich starke positive Reaktionen beobachten: Zeichen von Freude, Stolz, ein hohes Mitteilungsbedürfnis. Diese unmittelbaren Reaktionen wirken sich natürlich positiv auf die Motivation im weiteren Verlauf des Unterrichts aus. Doch auch längerfristige (und damit über ein Unterrichtsthema hinausgehende) Rollenfestlegungen beeinflussen die Chancen der Schülerinnen und Schüler, ihre Sicht auf die Strukturen und Tätigkeiten zu artikulieren und somit in Lernprozesse eingebunden zu werden.

Abschnitt 6.3

Letztlich kommen nämlich sämtliche bisher dargestellten Aspekte in dem als Tuning bezeichneten Prozess zusammen, der in Abschnitt 6.3 ausführlich behandelt wurde. Es ist in der Darstellung der Ergebnisse bisher nicht explizit gemacht worden, dass es sich bei diesem Begriff eigentlich um eine Synthese aus den auf die soziale Interaktion bezogenen Ausführungen von Bikner-Ahsbahs (2005) zu *interessendichten Situationen* einerseits und der von der TO und in der Folge auch in dieser Arbeit verfolgten Deutung der *Zone der nächsten Entwicklung* (siehe Abschnitt 2.2.2) andererseits handelt.

Bikner-Ahsbahs (2005) identifiziert eine *erwartungsrezessive Interaktionsstruktur* als Merkmal interessendichter Situationen und beschreibt diese folgendermaßen:

> In dieser Interaktionsstruktur bleiben die Schülerinnen und Schüler bei ihren Bedeutungskonstruktionen, knüpfen an die Bedeutungskonstruktionen von Schülerinnen und Schülern an, ergänzen diese, entwickeln sie weiter oder machen alternative individuelle Sichtweisen deutlich. Die Lehrperson unterstützt diesen Prozess, indem sie Interesse an den Schülerbeiträgen zeigt, die Bedeutungskonstruktionen der Schülerinnen und Schüler spiegelnd nachkonstruiert und die Lernenden darin unterstützt, eigene Vorstellungen zu explizieren, das

[5] Dabei wird auf einen nur anderen Katalog von Grundbedürfnissen zurückgegriffen, der aber mit dem von Grawe verwandt ist.

> heißt, indem sie um inhaltliches und handlungsbezogenes Verstehen der Schülerbeiträge bemüht ist, es auch zeigt und sich in ihrem Verhalten gerade *nicht* von ihren inhaltlichen Erwartungen leiten lässt (S. 166).

Die beschriebene Interaktion ähnelt dem, was in dieser Arbeit als Tuning beschrieben wurde. Es wurde jedoch auch herausgearbeitet, dass zu viel Zurückhaltung seitens der Lehrerin nicht unbedingt hilfreich ist. Diese Wendung lässt sich direkt auf die kulturhistorischen Sichtweise zurückführen, die in dieser Arbeit eingenommen wird. Indem Wissen als kulturell bedingt und damit nicht beliebig konstruierbar gesehen wird, kommt der Lehrkraft oder anderen schon mit dem Wissen vertrauten Personen eine andere Rolle zu als den Lernenden. Es ist ihre Aufgabe, zu erkennen, welche Ideen, Redewendungen und Gesten aufgegriffen werden können und wann die Schülerinnen und Schüler die Situation so weit geklärt haben, dass direkte Hinweise auf Handlungsmöglichkeiten angebracht sind.

Genau diese Überlegung lässt sich in den Ausführungen von Smit, van Eerde und Bakker (2013) zum Scaffolding im Klassenunterricht wiederfinden. Unter Rückgriff auf eine breite Literaturbasis und – wie die vorliegende Arbeit auch – am Begriff der Zone der nächsten Entwicklung orientiert, stellen sie diese Art des Unterrichtens anhand dreier Charakteristika dar, die aufeinander aufbauen, allerdings nicht als Phasen missverstanden werden sollten:

1. In der *Diagnose*, die während des gesamten Lehrprozesses anhält, muss die Lehrkraft das aktuelle Verständnis der Schülerinnen und Schüler in den Blick nehmen.

2. Aufbauend auf der Diagnose muss *Angemessenheit* (*responsiveness*) geleistet werden. Die Lehrkraft verhält sich adaptiv gegenüber der Situation der Schülerinnen und Schüler.[6]

3. Ziel ist letztlich die *Übergabe der Verantwortung* an die Schülerinnen und Schüler. Scaffolding ist also von Anfang an als vorübergehend angelegt, die Lehrkraft ist bemüht, sich nach und nach zurückzuziehen (*fading*).

Die vorliegende Arbeit kann damit als Beitrag zu der wissenschaftlichen Diskussion zur Unterrichtspraxis in Bezug auf algebraisches Denken gesehen werden, wie sie Kieran (2014) in ihrem Überblicksartikel beschreibt: noch relativ gering im Umfang, aber mit ersten Erkenntnissen, nach denen das Aufgabendesign und die von der Lehrkraft gegebene Unterstützung beim Bearbeiten der Aufgaben *im Zusammenspiel* eine zentrale Rolle einnehmen. Die Aussage, dass „skillful teacher guidance is needed in order to help students engage in the algebraic reasoning that is intended by the tasks“ (S. 31), wird durch die vorliegende Arbeit bestätigt. Darüber hinausgehend wird vertieft diskutiert, wie genau die Lehrkraft den Schülerinnen und Schülern helfen kann, algebraischen Struktursinn auszubilden. Sie kann

- interessante Ideen, die sich in Richtung der intendierten Tätigkeit weiterentwickeln lassen, unterstützen.

[6] In der Adaptivität, die hier von der Lehrkraft verlangt wird, besteht auch eine Verbindung zu den von Bikner-Ahsbahs und Janßen (2013) beschriebenen emergenten Aufgaben.

- ihre fachliche Autorität nutzen, um mathematisch korrekten Ansätzen Legitimität zu verleihen.
- Explizitheit einfordern in der Benennung der Objekte, mit denen gehandelt wird, und der Zielsetzungen, denen dabei gefolgt wird.

Weil dieses Handeln adaptiv in der Situation stattfinden muss, kommt das praxeologische Equipment der Lehrkraft zum Tragen. Unter den fünf ab Seite 267 herausgearbeiteten Aspekten soll hier lediglich auf den ersten noch einmal vertieft eingegangen werden. Ein Hindernis für ein Unterrichten, das Tuning ermöglicht und aufrechterhält, besteht in dem mathematischen Weltbild, das das Befolgen von Schemata in den Mittelpunkt stellt (Grigutsch et al., 1998). Somit findet sich die Unterscheidung zwischen kalkülhaftem, unflexiblem Wissen und dem Ideal eines anwendbaren algebraischen Struktursinns in den Lernprozessen wieder. Zum einen lässt diese Erkenntnis an die auf Seite 9 erwähnten Probleme denken, die Hoch und Dreyfus (2004) bei Lehrerinnen und Lehrern identifiziert hatten: Natürlich benötigen Lehrerinnen und Lehrer zunächst einmal selbst einen möglichst gut ausgebildeten algebraischen Struktursinn, um flexibel auf Herangehensweisen der Schülerinnen und Schüler einzugehen. Doch das Konzept des praxeologischen Equipments verweist eben auch darauf, dass es nicht die Lehrkraft allein ist, die eine bestimmte Einstellung entwickelt; das institutionelle Umfeld spielt eine entscheidende Rolle. Diese Annahme wird gestützt durch die Beobachtung, dass die untersuchten Schülerinnen und Schüler selbst nach Lösungen und Merkregeln verlangen. Sie reproduzieren so die mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht nur im Unterricht dieser einen Lehrerin gepflegte, sondern eben institutionell verankerte Orientierung an Schemata. Dazu kommt, dass den Schülerinnen und Schülern möglicherweise tatsächlich Vorstellungen fehlen, auf denen die Lehrkraft mit ihnen gemeinsam aufbauen könnte, wie die bereits mit Bezug auf Abschnitt 6.1.4 diskutierten Grundvorstellungen zur Division.

7.1.3. Ergänzende Rückbezüge in die Forschungslandschaft der Didaktik der Algebra

Nachdem sich bis hierhin an die Gliederung der Darstellung der Ergebnisse gehalten wurde, sollen im Folgenden noch weitere Bezüge hergestellt werden, die sich aus der Betrachtung der Arbeit als Ganzes ergeben.

Durch die starke Orientierung an den Bedeutungen, die die Schülerinnen und Schüler den algebraischen Strukturen und ihrem Handeln mit diesen Strukturen zuweisen, entspricht die hier vorliegende Konzeptualisierung algebraischen Struktursinns eher dem Symbol Sense (Arcavi, 1994, 2005) als Hochs (2007) Operationalisierung des auch hier verwendeten Begriffs. Dies führt dazu, dass die von Hoch angeregte Diskussion kaum aufgegriffen wird – es gibt keine neuen Erkenntnisse darüber, wie gut Schülerinnen und Schüler bestimmte auf algebraische Strukturen bezogene Aufgaben bearbeiten und welche Fortschritte sie dabei machen.[7] Dennoch soll an diesem Begriff festgehalten werden: Es geht um algebraische Strukturen, und die Verbindung mit dem Tätigkeitsbegriff von Leontjew (1982) lässt uns

[7]Es sei dahingestellt, ob solche Daten aus der nun untersuchten Klasse in ein sinnvolles Verhältnis zu

erkennen, wie Tätigkeit und algebraische Struktur sich gegenseitig bedingen. In Anlehnung an eine Formulierung Bourdieus (1999, S. 98 f.) zum Habitusbegriff könnte man algebraische Strukturen auffassen als *(in Tätigkeit) strukturierte Strukturen, die wie geschaffen sind, als (weitere Tätigkeit) strukturierende Strukturen zu fungieren.* Algebraische Strukturen sind ein Produkt historischer, gesellschaftlicher Tätigkeit; gleichzeitig bilden sie den Rahmen der Tätigkeit mit ihnen in der Schule.

Indem Tätigkeiten zum Ausgangspunkt der Annäherung an die jeweiligen algebraischen Strukturen gemacht wurden, liefert diese Arbeit auch Erkenntnisse darüber, inwiefern die Bedeutung algebraischer Strukturen durch Anwendungskontexte hergestellt werden kann. Bereits in der Beschreibung bestehender Ansätze in Abschnitt 1.4.2 wurde der Übergang von den Anwendungskontexten zu den abstrakten symbolischen Notationen als ein Problem benannt und angedeutet, dass hier wohl die Tatsache zum Tragen kommt, dass algebraische Tätigkeiten wie das Lösen von Gleichungen eben eine eigenständige kulturelle Tätigkeit darstellt. Noch deutlicher könnte man sagen: Das Wesen, die Daseinsberechtigung algebraischer Strukturen besteht gerade im Überschreiten von konkreten Anwendungen. Die Erfahrungen aus der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen lassen diesen Gedanken fortsetzen: Nicht nur ist es unzureichend, eine algebraische Struktur aus einer Anwendung herzuleiten, ein nicht trivialer Schritt besteht auch darin, eine algebraische Struktur in neuen Kontexten anzuwenden. Der tätigkeitstheoretische Rahmen und der Begriff der Objectification kann nicht dahingehend trivialisiert werden, dass mit *einem* Moment von Objectification *die* Tätigkeit klar ist. Vielmehr ist auch diesbezüglich Arcavis Rat zu Geduld und Zuversicht zu folgen. Den Schülerinnen und Schülern sollte eine ganze Bandbreite von Anwendungskontexten vermittelt werden, in denen die algebraische Struktur zum Tragen kommt, selbst wenn sie in einem ersten Kontext (wie den Streichholzschachtelgleichungen) schon sehr sicher damit umgehen können.

7.2. Offen bleibende Forschungsfragen

7.2.1. Zur Rolle von Sprache und anderen semiotischen Mitteln

Bezüglich der Fragen, die zur Rolle von Sprache und anderen semiotischen Mitteln gestellt wurden, konnten nur teilweise spezifische Zusammenhänge nachgewiesen werden; für genauere Aussagen war das Forschungsdesign zu offen angelegt. Es wurden Einzelfälle im Detail beschrieben, die aber schwerlich zu verallgemeinern sind. Insbesondere zeigen die Lernprozesse von Sabine, dass der in der Literatur nachgewiesene Zusammenhang zwischen sprachlicher Kompetenz und algebraischem Können (MacGregor und Price, 1999) keineswegs trivial ist. Die Schülerin entwickelt einen recht sicheren Umgang mit linearen Gleichungen, obwohl sie sie sprachlich kaum akkurat beschreiben kann. Zu einer Hürde wird allerdings die Schwierigkeit, sich sprachlich auszudrücken, als es darum geht,

Hochs Erkenntnissen zu bringen gewesen wären – das Sampling war darauf nicht ausgerichtet. Hierbei wären das Alter der Schülerinnen und Schüler, die curricularen und andere Unterschiede zwischen dem deutschen und dem israelischen Bildungssystem sowie eventuelle Veränderungen in den letzten Jahren zu berücksichtigen gewesen.

außermathematische Zusammenhänge durch lineare Gleichungen zu modellieren.

Eine konkrete Beobachtung, die in Folgeuntersuchungen weiterverfolgt werden könnte, besteht in den Sprechweisen, die in der Klasse (auch von der Lehrerin) verwendet wurden, beispielsweise die verkehrte Anordnung von Rechenoperationen oder die ungenaue Benennung von Objekten, mit denen gehandelt wird. Hier böte sich der Vergleich von Klassen mit unterschiedlichen Sprachpraktiken an, um ihren Einfluss auf die Ausbildung algebraischen Struktursinns genauer zu verstehen.

Schließlich bleiben die algebraische Notation und ihre Vorläufer – sowohl didaktisch geplant als auch von den Schülerinnen und Schülern entwickelt – ein interessantes Forschungsfeld. Eine mögliche Fragestellung bestünde darin, inwiefern der Lehrkraft das Wissen um die Unterscheidung zwischen willkürlichen und notwendigen Regeln (Hewitt, 2012) bei den Entscheidungen helfen würde, die sie treffen muss. Insbesondere könnte die Lehrerin oder der Lehrer so die bedarfsgerechten Notationen der Schülerinnen und Schüler würdigen und somit auf ihre Vorstellungen eingehen.

Diese Arbeit arbeitet mit und an der Hypothese, dass Schülerinnen und Schüler lernen, algebraische Strukturen anders zu sehen, indem sie ihnen in Tätigkeit Bedeutung zuweisen. Diese Annahme wird gestützt durch die Ergebnisse von Wiley, Wilson und Rapp (2016), die einen solchen Zusammenhang für Bedeutungszuweisungen in natürlicher Sprache nachweisen. Sie zeigen, dass Menschen, die der arabischen Sprache mächtig sind, dargestellte Buchstaben anders betrachten als Menschen, denen die arabische Schriftsprache fremd ist. Insbesondere können sie visuell komplexe Buchstaben deutlich schneller identifizieren, wobei nachweisbar ist, an welchen konkreten Merkmalen sich die Probandinnen und Probanden dabei orientieren. Es kann ein Ziel zukünftiger Forschung sein, einen solchen Zusammenhang auch für algebraische Strukturen nachzuweisen. Man kann aber auch die bereits vorhandenen Ergebnisse in der Gesamtschau zum Anlass nehmen, stärker auf die Erzeugung von bedeutungsorientierten (im Gegensatz zu kalkülorientierten) Heranführungen an algebraische Strukturen hinzuarbeiten – ganz im Sinne des Prinzips „Inhaltliches Denken von Kalkül“ (Prediger, 2009).

7.2.2. Ein Strukturen übergreifender Struktursinn?

Für eine abschließende Klärung der Frage, inwiefern algebraischer Struktursinn überhaupt als *ein* psychologisches Konstrukt angesehen werden kann, wäre eine Laborstudie sicher geeigneter als die durchgeführte Untersuchung. Dabei gibt die vorliegende Arbeit durchaus Hinweise, von welchen Hypothesen man dabei ausgehen könnte: Ganz sicher gibt es Faktoren, die das Lernen bezüglich mehrerer algebraischer Strukturen begünstigen, beispielsweise die Möglichkeit, angemessene Grundvorstellungen zu den Grundrechenarten zu aktivieren. Diese Faktoren dürften dazu führen, dass die Leistungen von Schülerinnen und Schüler bezüglich verschiedener Strukturen korrelieren. Wenn algebraischer Struktursinn aber ein *Verständnis* für eine bestimmte Struktur beinhalten soll, so legt die vorliegende Arbeit nahe, dass sie jeweils einzeln, in der für sie spezifischen Tätigkeit erschlossen werden muss. Dabei kann es freilich Tätigkeiten geben, die miteinander verwandt sind – Äquivalenzumformungen treten beispielsweise nicht nur bei linearen Gleichungen auf, sie spielen auch in Bezug auf andere Typen von Gleichungen, die sich algebraisch lösen lassen, eine Rolle. Der in dieser Arbeit vorliegende Vergleich zwischen linearen Gleichungen und linearen Funktionen zeigt aber, dass selbst in ihrer Gestalt ähnliche algebraische Strukturen mit sehr unterschiedlichen Tätigkeiten verbunden sein können, was sich in diesem Fall eindrücklich an den Betrachtungsweisen äußert, denen die Variable hier unterliegt.

7.3. Ausblick

Mit der vorliegenden Arbeit wurde sich bewusst in das schwierige Untersuchungsfeld des Klassenunterrichts begeben. Ziel war es, Erkenntnisse über die dort stattfindenden Lernprozesse in Bezug auf algebraische Strukturen zu gewinnen – Erkenntnisse, die in zwei Richtungen weitergegeben werden können: Einerseits an die Lehrerinnen und Lehrer, die Jahr für Jahr, Tag für Tag vor der Aufgabe stehen, ihren Schülerinnen und Schülern die Ausbildung eines Sinns für algebraische Strukturen zu erleichtern, und andererseits an diejenigen, die die diesbezügliche Forschung in Zukunft vorantreiben.

7.3.1. Perspektiven für den Unterricht

Für einen Unterricht, dessen Ziel die Ausbildung algebraischen Struktursinns ist, könnte die Orientierung am Tätigkeitsbegriff eine Hilfe sein. Dies sollte zu einer besonderen Aufmerksamkeit für die Tätigkeitskontexte führen, anhand derer sich die Schülerinnen und Schüler der jeweiligen algebraischen Struktur annähern. Eine sorgfältige Abwägung der didaktischen Stärken und Schwächen der Tätigkeiten, die gewählt werden, ist unabdingbar: Welche Vorstellungen werden die Schülerinnen und Schüler mit der Tätigkeit verbinden? Konfligieren diese mit bereits vorhandenen Vorstellungen zu anderen mathematischen Zusammenhängen? An welcher Stelle trägt der Kontext der Einführung nicht mehr, und wie kann die algebraische Struktur über den Kontext der Einführung hinaus weiterentwickelt werden? Auf welche Grundvorstellungen muss dann zurückgegriffen werden?

Ein Aspekt, auf den ein besonderes Augenmerk zu legen ist, ist die Sprache. Es wurde gezeigt, dass aus den Tätigkeitskontexten metaphorische Beschreibungen der Tätigkeit entstehen. Dies kann und sollte genutzt werden, birgt aber auch Gefahren. Um diese zu bemerken und mit ihnen umgehen zu können, müssen Lehrerinnen und Lehrer die Fachsprache beherrschen und als wichtig würdigen. Denn auf sie müssen sich letztlich alle in der Klasse verlassen können, wenn es nur noch um die algebraische Struktur an sich geht. Es ist beispielsweise sinnvoll, schon im Kontext der Streichholzschachtelgleichungen bewusst von der *Anzahl der Schachteln* (statt einfach von Schachteln) zu sprechen, um so den Begriff des *Faktors vor der Variablen* oder des *Koeffizienten* vorzubereiten – wenn dies nicht geschieht, wird es Schülerinnen und Schüler geben, die Probleme haben, eine einfache Gleichung wie $3x = 9$ korrekt zu lösen.

Doch ein Unterricht, der die Ausbildung algebraischen Struktursinns fördert, lässt sich nicht ausschließlich a priori planen. Es wurde auch gezeigt, wie wichtig adaptives Unterrichten ist. Wenn man die Ausbildung algebraischen Struktursinns als die Annäherung an die mathematische Kultur in Tätigkeit versteht, kommt der Lehrkraft in diesem Prozess eine besondere Rolle zu. Die Schülerinnen und Schüler erwarten von ihr Orientierung, sie muss in der Lage sein, den Prozess des Tunings aufzubauen und aufrechtzuerhalten. Neben dem Wissen darum, was dies konkret bedeutet – ein gemeinsames Hineinfinden in die Situation, Erkennen individueller Vorstellungen, Unterstützung interessanter und korrekter Ansätze, Benennung zentraler Objekte und Handlungen – gehört dazu auch die Reflexion kritischer Aspekte des eigenen praxeologischen Equipments. Es ist deutlich gemacht worden, dass Lehrerinnen und Lehrer dieses nicht für sich allein bestimmen. Lehrerinnen und Lehrer, denen die Ausbildung algebraischen Struktursinns am Herzen liegt, sollten langfristig bemüht sein, ihr Umfeld so zu gestalten, dass diese Zielsetzung von anderen – Kolleginnen und Kollegen, Eltern und Schülerschaft – unterstützt wird. Dass und wie im Mathematikunterricht algebraischer Struktursinn für die verschiedenen Strukturen aufgebaut werden soll, ließe sich im lokalen Schulcurriculum verankern, was es Lehrerinnen und Lehrern erleichtern würde, die für diesen Prozess notwendigen Ressourcen einzuplanen.

7.3.2. Perspektiven für die Forschung

In der Forschung lässt sich der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz zum einen in der Breite weiterverfolgen. Ausgehend von der Vermutung, dass andere algebraische Strukturen andere Lernprozesse erfordern, wären ähnliche Erkundungen auch hier wünschenswert. Dabei kann ausgehend von den vorliegenden Erkenntnissen systematisch vorgegangen werden. Interessant wäre beispielsweise, wie ausgehend vom Wissen über die Ausbildung algebraischen Struktursinns zu linearen Gleichungen die Lernprozesse bezüglich quadratischer Gleichung oder bezüglich linearer Gleichungssysteme aussehen, und inwiefern dabei auf Elemente des algebraischen Struktursinns zu linearen Gleichungen zurückgegriffen wird. Andererseits wären auch Lernprozesse zu anderen algebraischen Strukturen wie den Termumformungen nach den binomischen Formeln ein interessantes Forschungsobjekt.

Zum anderen ist eine Vertiefung denkbar, also das Weiterverfolgen von konkreten Teilergebnissen dieser Arbeit. Vorschläge hierzu wurden bereits in den Abschnitten 7.1.1 und 7.1.2 gemacht, dazu kommen die in Abschnitt 7.2 benannten offen bleibenden Fragen. Mögliche Forschungsthemen betreffen die Nutzung von Metaphern und Metonymien bezüglich algebraischer Strukturen, die emotionale und motivationale Komponente mathematischen Lernens und die Rolle von Vorwissen für die Ausbildung algebraischen Struktursinns. Hinzu kommen Forschungsvorhaben, die sich auf die in Abschnitt 7.3.1 vorgeschlagenen Innovationen in der Unterrichtspraxis beziehen. Insgesamt lässt sich feststellen, dass in vielen Fällen auf die Theorien und Methoden aus anderen Wissenschaftsgebieten wie Linguistik, Psychologie und Hirnforschung zurückgegriffen werden müsste und sich somit die Zusammenarbeit mit Forscherinnen und Forschern aus diesen Feldern anbietet.

Integriert in die bisher beschriebenen Forschungsvorhaben oder als Untersuchung mit einem eigenen Fokus – beispielsweise auf die Digitalisierung von Lernen und Lehren – ließe sich die Designentwicklung der vorliegenden Studie aufnehmen und weiterverfolgen. Es wäre zu erkunden, inwiefern sich die gemachten Beobachtungen bei alternativen Unterrichtsdesigns replizieren lassen und wo Verbesserungen möglich sind.

Neben diesen forschungsthematischen Anregungen liefert die vorliegende Arbeit auch einen methodischen Impuls. Die Anwendung der dokumentarischen Methode mit ihrer Trennung von formulierender und reflektierender Interpretation hat es ermöglicht, in den

Daten aus der komplexen Unterrichtsrealität zum Gegenstand der Untersuchung vorzudringen. Die beiden Analyseebenen halfen, einerseits die mathematisch-inhaltliche Ebene zu erschließen und andererseits Fragen zu beantworten, die die konkrete Situation überschreiten.

Dies geschah vor dem Hintergrund zweier miteinander vernetzter Theorien. Die Diskussion der Ergebnisse hat gezeigt, dass sich damit letztlich Bezugspunkte zu Arbeiten ergeben, die anderen, aber möglicherweise wiederum vernetzbaren Theorieansätzen folgen. Ihnen gegenüber sollte mindestens die erste Stufe der in Abbildung 4.2 auf Seite 80 dargestellten Strategien der Theorievernetzung erreicht werden. Minimalziel wäre also einerseits die Entwicklung eines Verständnisses für die anderen Theorien und ihre Ergebnisse von der in dieser Arbeit herausgearbeiteten Sichtweise her, und andererseits das Bestreben, anderen ein solches Verständnis bezüglich der vorliegenden Arbeit zu ermöglichen. Ausgehend davon ließen sich die angedeuteten Konvergenzen in der Forschungslandschaft anhand der weiter reichenden Strategien der Theorievernetzung erkunden. Dies erscheint ganz besonders angebracht beim Begriff des algebraischen Struktursinns, der sich auf die basale Erfahrung bezieht, in algebraischen Ausdrücken etwas wahrzunehmen oder nicht, handlungsfähig zu sein oder nicht. Gerade hier wäre es wünschenswert, das Gemeinsame in Arbeiten zu identifizieren, die von verschiedenen Grundannahmen ausgehen.

Literaturverzeichnis

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., … Wieland, G. (2003). *mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Bern: schulverlag blmv.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14* (3), 24–35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25* (2), 42–47.

Arcavi, A. (2008). Algebra: Purpose and empowerment. In C. E. Greenes und R. N. Rubenstein (Hrsg.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics. Seventieth NCTM yearbook.* (S. 37–49). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. In Y. M. Pothier (Hrsg.), *Proceedings of the annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (S. 7–21). Halifax, NS: Mount Saint Vincent University Press.

Arzarello, F. und Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park und D.-Y. Seo (Hrsg.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 17–24). Seoul: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. und Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70* (2), 97–109. doi: 10.1007/s10649-008-9163-z

Austin, J. L. (1975). *Zur Theorie der Sprechakte (How to do things with words).* Stuttgart: Reclam.

Beck, C. und Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier und J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 43–76). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Bikner-Ahsbahs, A. (2003). Empirisch begründete Idealtypenbildung. Ein methodisches Prinzip zur Theoriekonstruktion in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *ZDM*, *35* (5), 208–223.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie.* Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Bikner-Ahsbahs, A. und Halverscheid, S. (2014). Introduction to the Theory of Interest-Dense Situations (IDS). In A. Bikner-Ahsbahs und S. Prediger (Hrsg.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (S. 97–113). Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-05389-9{\textunderscore}7

Bikner-Ahsbahs, A. und Janßen, T. (2013). Emergent tasks – spontaneous design supporting in-depth learning. In C. Margolinas (Hrsg.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (S. 153–161).

Bikner-Ahsbahs, A. und Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education – how can we deal with it? *ZDM*, *38* (1), 52–57.

Bikner-Ahsbahs, A. und Prediger, S. (Hrsg.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education.* Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-05389-9

Bishop, A. J. (1990). Western mathematics: the secret weapon of cultural imperialism. *Race & Class*, *32* (2), 51–65. doi: 10.1177/030639689003200204

Block, J. (2014). Eine didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen als Konzeptualisierung für flexibles algebraisches Handeln. In J. Roth und J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 197–200). Münster: WTM-Verlag.

Block, J. (2016). Flexible algebraic action on quadratic equations. In K. Krainer und N. Vondrová (Hrsg.), *CERME 9. Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 391–397). Prag: Charles University in Prague, Faculty of Education und ERME.

Böer, H., Kliemann, S., Puscher, R., Segelken, S., Schmidt, W., Trapp, M. und Vernay, R. (2008). *mathe live 8: Mathematik für Sekundarstufe I.* Stuttgart und Leipzig: Klett.

Bohnsack, R. (2010a). *Rekonstruktive Sozialforschung: Einführung in qualitative Methoden* (8. Aufl.). Opladen und Farmington Hills, MI: Budrich.

Bohnsack, R. (2010b). Zugänge zur Eigenlogik des Visuellen und die dokumentarische Videointerpretation. In M. Corsten, M. Krug und C. Moritz (Hrsg.), *Videographie praktizieren* (S. 271–294). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften. doi: 10.1007/978-3-531-92054-2{\textunderscore}11

Bonnet, A. (2009). Die Dokumentarische Methode in der Unterrichtsforschung: ein integratives Forschungsinstrument für Strukturrekonstruktion und Kompetenzanalyse. *Zeitschrift für Qualitative Forschung*, *10* (2), 219–240.

Bosch, M. und Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs und S. Prediger (Hrsg.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (S. 67–83). Cham: Springer.

Bourdieu, P. (1999). *Sozialer Sinn. Kritik der theoretischen Vernunft* (3. Aufl.). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Chaiklin, S. D. und Hedegaard, M. (2013). Cultural-historical theory and educational practice: Some radical-local considerations. *Nuances: estudos sobre Educação*, *24* (1), 30–44. doi: 10.14572/nuances.v24i1.2151

Chazan, D. und Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin und D. Schifter (Hrsg.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (S. 123–135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. und Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32* (9), 9–13.

Cobb, P. und Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 213–228.

Collins, A., Joseph, D. und Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13* (1), 15–42.

de Corte, E. und Verschaffel, L. (2002). High-powered learning communities: Design experiments as a lever to bridge the theory/practice divide. *Prospects*, *32* (4), 517–531. doi: 10.1023/A:1022122621682

Dede, C. (2004). If design-based research is the answer, what is the question? A commentary on Collins, Joseph, and Bielaczyc; diSessa and Cobb; and Fishman, Marx, Blumenthal, Krajcik, and Soloway in the JLS special issue on design-based research. *Journal of the Learning Sciences*, *13* (1), 105–114.

Dehaene, S. (2014). *Consciousness and the brain: Deciphering how the brain codes our thoughts.* New York: Penguin.

Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft (Hrsg.). (2010). *Mathematik. Bildungsplan für die Oberschule.* Bremen. Zugriff am 28.07.2011 auf http://www.lis.bremen.de/sixcms/media.php/13/2010_BP_O_Ma%20Erlassversion.pdf

Edwards, L. D., Ferrara, F. und Moore-Russo, D. (Hrsg.). (2014). *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics.* Charlotte, NC: Information Age.

Farmelo, G. (2010). *The strangest man. The hidden life of Paul Dirac, quantum genius.* London: Faber and Faber.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N. und Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30* (1), 15–19.

Freitas, M. T. (2003). Der Kulturhistorische Ansatz als Perspektive in der Qualitativen Forschung. In B. Fichtner, M. T. Freitas und R. Monteiro (Hrsg.), *Kinder und Jugendliche im Blick qualitativer Forschung* (S. 13–29). Oberhausen: Athena.

Fritzsche, B. und Wagner-Willi, M. (2014). Dokumentarische Interpretation von Unterrichtsvideografien. In R. Bohnsack, B. Fritzsche und M. Wagner-Willi (Hrsg.), *Dokumentarische Video- und Filminterpretation. Methodologie und Forschungspraxis* (S. 131–152). Opladen, Berlin und Toronto: Budrich.

Goosens, L. (1990). Metaphtonomy: the interaction of metaphor and metonomy in expressions for linguistic action. *Cognitive Linguistics*, *1*, 323–340.

Grawe, K. (2004). *Neuropsychotherapie.* Göttingen: Hogrefe.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D. und Tall, D. (1999). Knowledge construction and divergent thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 111–133.

Grigutsch, S., Raatz, U. und Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19* (1), 3–45. doi: 10.1007/BF03338859

Haug, R. und Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen im Kopf lösen. Vorstellungen, die das Lernen erleichtern. *mathematik lehren* (169), 22–24.

Hedegaard, M. (2012). Analyzing children's learning and development in everyday settings from a cultural-historical wholeness approach. *Mind, Culture, and Activity*, *19* (2), 127–138. doi: 10.1080/10749039.2012.665560

Hewitt, D. (2003). Notation issues: Visual effects and ordering operations. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty und J. T. Zilliox (Hrsg.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th conference of PME-NA* (Bd. 3, S. 63–69). Honolulu: University of Hawaiʻi.

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: Are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics*, *81* (2), 139–159. doi: 10.1007/s10649-012-9394-x

Heymann, H. W. (1989). Allgemeinbildener Mathematikunterricht – was könnte das sein? *mathematik lehren* (33), 4–9.

Hoch, M. (2007). *Structure sense in high school algebra.* Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Hoch, M. und Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. Johnsen Høines und A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 49–56).

Hußmann, S. und Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. *PM - Praxis der Mathematik in der Schule*, *53* (38), 2–11.

Janßen, T. (2010). *Epistemische Aufbauhandlungen und die Konstruktion mathematischen Wissens. Theorieweiterentwicklung durch Vergleich zweier Modelle.* Unveröffentlichte Masterarbeit. Bremen: Universität Bremen.

Janßen, T. und Bikner-Ahsbahs, A. (2013). Networking theories in a design study on the development of algebraic structure sense. In B. Ubuz, Ç. Haser und M. A. Mariotti (Hrsg.), *CERME 8. Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2830–2839). Ankara: Middle East Technical University.

Janßen, T. und Radford, L. (2016). Solving equations: Gestures, (un)allowable hints, and the unsayable matter. In K. Krainer und N. Vondrová (Hrsg.), *CERME 9. Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 419–425). Prag: Charles University in Prague, Faculty of Education und ERME.

Jaworski, B. (2004). Insiders and outsiders in mathematics teaching development: The design and study of classroom activity. *Research in Mathematics Education*, *6* (1), 3–22.

Jungwirth, H. (2003). Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik – ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. *ZDM*, *35* (5), 189–200.

Kelle, U. und Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung* (2. Aufl.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Kelly, A. E. (2004). Design research in education: Yes, but is it methodological? *Journal of the Learning Sciences*, *13* (1), 115–128.

Kelly, A. E. (2006). Quality criteria for design research: Evidence and commitments. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney und N. Nieveen (Hrsg.), *Educational design research* (S. 107–118). London: Routledge.

Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M. und Dreyfus, T. (2008). Toward networking three theoretical approaches: the case of social interactions. *ZDM*, *40* (2), 247–264. doi: 10.1007/s11858-008-0079-y

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of mathematics education* (S. 27–32). Dordrecht: Springer.

Kirshner, D. (2006). A New Curriculum for Structural Understanding of Algebra. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *10* (3), 169–187.

Kirshner, D. und Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35* (4), 224–257.

Kortenkamp, U. (2006). Terme erklimmen. Klammergebirge als Strukturierungshilfe. *mathematik lehren* (136), 13.

Kramer, S. (2003). Autorschaft und Autorisation: Ethische Aspekte der Forschung mit Kindern. In B. Fichtner, M. T. Freitas und R. Monteiro (Hrsg.), *Kinder und Jugendliche im Blick qualitativer Forschung* (S. 82–99). Oberhausen: Athena.

Krause, C. M. (2016). *The Mathematics in Our Hands: How Gestures Contribute to Constructing Mathematical Knowledge.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krummheuer, G. (1983). *Algebraische Termumformungen in der Sekundarstufe I. Abschlußbericht eines Forschungsprojekts* (Bd. 31). Bielefeld: IDM.

Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtsmethodischen Dimension von Rahmungsprozessen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *5* (4), 285–306.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (2. Aufl.). Weinheim an der Bergstraße: Beltz Juventa.

Lakoff, G. und Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by.* Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. und Núñez, R. E. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. D. English (Hrsg.), *Mathematical reasoning* (S. 21–89). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.

Lakoff, G. und Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Leontjew, A. N. (1982). *Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit.* Köln: Pahl-Rugenstein.

Lesh, R. und Sriraman, B. (2005). Mathematics education as a design science. *ZDM*, *37* (6), 490–505.

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker und H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. (2011). Inhaltliche Vorstellungen zu binomischen Formeln langfristig aufbauen und vielfältig nutzen. *mathematik lehren* (169), 58–61.

Linchevski, L. und Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 173–196.

Lincoln, Y. S. und Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry.* Newbury Park: Sage.

Livneh, D. und Linchevski, L. (2007). Algebrification of arithmetic: Developing algebraic structure sense in the context of arithmetic. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park und D.-Y. Seo (Hrsg.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 217–224). Seoul: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster und München: Waxmann.

MacGregor, M. (2004). Goals and content of an algebra curriculum for the compulsory years of scholling. In K. Stacey, H. Chick und M. Kendal (Hrsg.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Bd. 8, S. 313–328). Boston: Kluwer Academic Publishers.

MacGregor, M. und Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30* (4), 449–467.

MacGregor, M. und Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (1), 1–19.

Maier, H. und Voigt, J. (1991). *Interpretative Unterrichtsforschung: Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag.* Köln: Aulis Verlag Deubner.

Maier, H. und Voigt, J. (Hrsg.). (1994). *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung.* Köln: Aulis Verlag Deubner.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren* (123), 4–8.

Martens, M. und Asbrand, B. (2009). Rekonstruktion von Handlungswissen und Handlungskompetenz – auf dem Weg zu einer qualitativen Kompetenzforschung. *Zeitschrift für Qualitative Forschung*, *10* (2), 201–217.

Martens, M., Petersen, D. und Asbrand, B. (2014). Die Materialität von Lernkultur. Methodische Überlegungen zur dokumentarischen Analyse von Unterrichtsvideografien. In R. Bohnsack, B. Fritzsche und M. Wagner-Willi (Hrsg.), *Dokumentarische Video- und Filminterpretation. Methodologie und Forschungspraxis* (S. 179–206). Opladen, Berlin und Toronto: Budrich.

Mason, J., Graham, A. und Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra.* London und Thousand Oaks: P. Chapman und Sage.

Meira, L. und Lerman, S. (2009). Zones of proximal development as fields for communication and dialogue. In C. Lightfoot und M. C. Lyra (Hrsg.), *Challenges and Strategies to Study Human Development in Cultural Contexts* (S. 199–219). Rom: Firera & Liuzzo.

Mulligan, J. und Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, *21* (2), 33–49.

Newman, F. und Holzman, L. (1993). *Lev Vygotsky: Revolutionary scientist.* London und New York: Routledge.

Padberg, F. und Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Phillips, D. C. und Dolle, J. R. (2006). From Plato to Brown and beyond: Theory, practice, and the promise of design experiments. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts und S. Vosniadou (Hrsg.), *Instructional psychology. Past, present, and future trends* (S. 277–292). Amsterdam: Elsevier.

Pons. (2016). *structura (Wörterbucheintrag).* Zugriff am 3.2.2016 auf http://de.pons.com/übersetzung?q=structura&l=dela

Prediger, S. (2007). „… nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ Lehramtsstudierende auf dem Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz. In B. Barzel,

T. Berlin, D. Bertalan und A. Fischer (Hrsg.), *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker.* Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz und S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 213–233). Weinheim und Basel: Beltz.

Prediger, S. und Bikner-Ahsbahs, A. (2014). Introduction to networking: Networking strategies and their background. In A. Bikner-Ahsbahs und S. Prediger (Hrsg.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (S. 117–125). Cham: Springer.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. und Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM*, *40* (2), 165–178. doi: 10.1007/s11858-008-0086-z

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B. und Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU*, *65* (8), 452–457.

Priwitzer, J. (2010). *Epistemische Basishandlungen in Modellen zur Konstruktion mathematischen Wissens. Ein Beitrag zur Theorieweiterentwicklung zweier Modelle.* Unveröffentlichte Masterarbeit. Bremen: Universität Bremen.

Przyborski, A. und Slunecko, T. (2009). Against reification! Praxeological methodology and its benefits. In J. Valsiner, P. C. Molenaar, M. C. Lyra und N. Chaudhary (Hrsg.), *Dynamic process methodology in the social and developmental sciences* (S. 141–170). Berlin: Springer.

Przyborski, A. und Wohlrab-Sahr, M. (2014). *Qualitative Sozialforschung: Ein Arbeitsbuch* (4. Aufl.). München: Oldenbourg.

Radford, L. (2000). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42* (3), 237–268.

Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM*, *40* (2), 317–327. doi: 10.1007/s11858-008-0090-3

Radford, L. (2008b). The Ethics of Being and Knowing: Towards a Cultural Theory of Learning. In L. Radford, G. Schubring und F. Seeger (Hrsg.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (S. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12* (1), 1–19.

Radford, L. (2010b). The Eye as a Theoretician. Seeing Structures in Generalizing Activities. *For the Learning of Mathematics*, *30* (2), 2–7.

Radford, L. (2013a). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26* (2), 257–277. doi: 10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2013b). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2* (1), 7–44.

Radford, L. (2014a). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle und D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the 38th* *conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 1–20). Vancouver: PME: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Radford, L. (2014b). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM*, *46* (3), 349–361. doi: 10.1007/s11858-014-0591-1

Radford, L. (2015). Of love, frustration, and mathematics: A cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. In B. Pepin und B. Roesken-Winter (Hrsg.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (S. 25–49). Cham: Springer.

Radford, L., Bardini, C. und Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38* (5), 507–530.

Radford, L. und Grenier, M. (1996). On dialectical relationships between signs and algebraic ideas. In L. Puig und A. Gutiérrez (Hrsg.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 179–186).

Radford, L. und Roth, W.-M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: An activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *77* (2-3), 227–245.

Radford, L. und Sabena, C. (2015). The Question of method in a Vygotskian semiotic approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping und N. Presmeg (Hrsg.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (S. 157–182). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6{\textunderscore}7

Rissland, E. L. (1991). Example-based reasoning. In J. F. Voss, D. N. Perkins und J. W. Segal (Hrsg.), *Informal Reasoning and Education* (S. 187–208). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum.

Roth, W.-M. und Radford, L. (2010). Re/thinking the zone of proximal development (symmetrically). *Mind, Culture, and Activity*, *17* (4), 299–307. doi: 10.1080/10749031003775038

Roth, W.-M. und Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning.* Rotterdam: Sense.

Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33* (1), 113–141.

Rüede, C. (2015). *Strukturierungen von Termen und Gleichungen.* Wiesbaden: Springer. doi: 10.1007/978-3-658-08214-7

Sabena, C. (2007). *Body and signs: A multimodal semiotic approach to teaching–learning processes in early calculus.* Dissertation. Turin: Turin University.

Santi, G. (2011). Meaning of mathematical objects: A comparison between semiotic perspectives. In M. Pytlak, T. Rowland und E. Swoboda (Hrsg.), *CERME 7. Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2503–2512). Rzeszów: University of Rzeszów.

Schäfer, I. und Bikner-Ahsbahs, A. (2009). »Schwache Schüler« motivationsorientiert fördern. In A. Fritz und S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 201–212). Weinheim und Basel: Beltz.

Selter, C. und Walther, G. (Hrsg.). (1999). *Mathematikdidaktik als Design Science. Festschrift für Erich Christian Wittmann.* Leipzig: Klett.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1–36.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, *14* (1), 44–55.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English (Hrsg.), *Mathematical reasoning* (S. 339–371). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.

Sfard, A. und Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191–228.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L. und Feuer, M. J. (2003). On the Science of Education Design Studies. *Educational Researcher*, *32* (1), 25–28.

Smit, J., van Eerde, H. A. A. und Bakker, A. (2013). A conceptualisation of whole-class scaffolding. *British Educational Research Journal*, *39* (5), 817–834. doi: 10.1002/berj.3007

Stacey, K. (2011). Eine Reise über die Jahrgänge. Vom Rechenausdruck zum Lösen von Gleichungen. *mathematik lehren* (169), 8–12.

Statistisches Bundesamt. (2013). *Statistisches Jahrbuch Deutschland 2013* (1. Aufl.). Wiesbaden: Autor.

Steinbring, H. (1998). Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens. *ZDM*, *30* (5), 161–167.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung.* Münster: LIT.

Swafford, J. O. und Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (1), 89–112.

Tomasello, M. (2006). *Die kulturelle Entwicklung des menschlichen Denkens. Zur Evolution der Kognition* (1. Aufl.). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Vollrath, H.-J. (1999). *Algebra in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren* (118), 4–8.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge: Harvard University Press.

Wagner-Willi, M. (2013). Videoanalysen des Schulalltags. Die dokumentarische Interpretation schulischer Übergangsrituale. In R. Bohnsack, I. Nentwig-Gesemann und A.-M. Nohl (Hrsg.), *Die dokumentarische Methode und ihre Forschungspraxis* (S. 133–155). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften. doi: 10.1007/978-3-531-19895-8{\textunderscore}6

Wettstein, A. und Thommen, B. (2009). Dynamic methods for research in education. In J. Valsiner, P. C. Molenaar, M. C. Lyra und N. Chaudhary (Hrsg.), *Dynamic process methodology in the social and developmental sciences* (S. 353–382). Berlin: Springer.

Wiley, R. W., Wilson, C. und Rapp, B. (2016). The effects of alphabet and expertise on letter perception. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance.*

doi: 10.1037/xhp0000213

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics*, *29* (4), 355–374.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16* (3), 329–342.

Abbildungsverzeichnis

Liste der Episoden

Anhang

Auf den nachfolgenden Seiten sind zusätzliche Informationen zusammengefasst, die beim Lesen der Arbeit hilfreich sein können. Dazu zählen Verlaufspläne des gemeinsam mit der beteiligten Lehrerin geplanten Unterrichts und die verwendeten Aufgaben (Anhang A), ein Überblick über die Datenlage (Anhang B), Erläuterungen zum Verständnis der Transkripte (Anhang C) sowie ergänzende Transkripte (Anhang D), auf die in der Arbeit an entsprechender Stelle hingewiesen wird.

A. Unterrichtsplanung und -materialien

Zu jeder der beiden Unterrichtseinheiten wird zunächst ein Überblick über die Gesamtplanung gegeben, der gemeinsam mit der Lehrerin erarbeitet wurde. Im Anschluss finden sich die Aufgabenblätter, die entwickelt wurden, sowie die dazugehörigen Lösungen. An zwei Stellen wurden in Fußnoten nachträglich Fehler korrigiert.

A.1. Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen

Unterrichtsplanung

Tag	Inhalt/Lernziel	Mathematikdidaktische Methode	Unterrichtsmethode	Binnendifferenzierung
Montag, 5.12.	Erkundung von Schachtelgleichungen (zunächst nur positive Werte möglich), besonderer Fokus auf die Entwicklung und Beschreibung von Lösungsstrategien	Streichholzschachtelglei-chungen*	Arbeit in Zweiergruppen an strukturgleichen Aufgaben* mit echten Schachteln, Verschriftlichungen sollen ermutigt werden (ca. 20 min); (Weiter-)Entwicklung der Strategien an den Gleichungen auf Aufgabenblatt 1, Schritte werden auf Karten notiert (ca. 50 min);	Unterschiedliche Komplexität der repräsentierten Gleichungen
Dienstag, 6.12.	Lösungsstrategien besprechen und üben bzw. Gleichungen ohne Lösung/mit unendlich vielen Lösungen; Strukturierung bei Schachtelgleichungen		Tafelgespräch über die Strategien, Zeit für Übung am ersten Aufgabenblatt, Extra-Aufgabenblatt für schnelle SuS; Ich-du-wir: siehe Aufgabenblatt; Tafelgespräch über die Strategien (Strukturieren im Gesamtprozess)	Verschiedene Aufgabenblätter je nach Arbeitstempo Strukturieren unterschiedlich komplizierter Schachtelgleichungen
Freitag, 9.12.	Ergebnissicherung (Strategien/Regeln) und Üben der einfachen Schachtelgleichungen, Erweiterung auf Schachtelgleichungen mit nichtnatürlichen Zahlen durch entsprechende Problemstellungen		Tafelgespräch, Einzelarbeit mit individueller Hilfestellung	
Montag, 12.12.	Üben der einfachen Schachtelgleichungen, Erweiterung auf Schachtelgleichungen mit nichtnatürlichen Zahlen	Ergänzung durch Symbolkarten, ggf. Entwicklung individueller Symbolsysteme	Tafelgespräch, Arbeit in Zweiergruppen	Schwächere Schüler noch üben lassen, während stärkere die Problematik nichtnatürlicher Zahlen erfahren, sich die Symbolkarten aneignen und

	durch entsprechende Problemstellungen			dann erklären
Dienstag, 13.12.	Einführung der offiziellen Symbolsprache, Formalisierung der Regeln, Übung		Tafel/OHP, Ich-du-wir für den Transfer der Regeln, Einzelarbeit mit individueller Hilfestellung, teils als Hausaufgabe	
Freitag, 16.12.	Fortsetzung von Dienstag		Fortsetzung des Ich-du-wir	
Montag, 19.12.	Strukturierung bei symbolischen Gleichungen; Flexibilisierung des Umgangs mit (Schachtel-) Gleichungen	Strukturieren durch Unterstreichen*; Einpacken und Auspacken*	Tafelgespräch, Arbeit in Zweiergruppen; Einpacken in Einzelarbeit, Rest als Hausaufgabe	Strukturieren unterschiedlich komplizierter Gleichungen; Individuelles Einpacken, Schachteln und Verschriftlichungen sind als Hilfsmittel erlaubt
Dienstag, 20.12.	Fortsetzung von Montag		Auspacken der Gleichungen anderer in Zweierzusammensetzungen, am Ende an der Tafel Wertung in verschiedenen Disziplinen (schönste, ungewöhnlichste, komplizierteste, …)	
Freitag, 6.1.	Erneuter Anlauf		nochmals Einpacken	
Montag, 9.1.			Auspacken, dieses Mal mit Extrablättern für die Lösungen	
Freitag, 13.1.	Entwickeln und Lösen von Gleichungen zum Lösen von Problemen	Strategien erlernen anhand von Musterlösungen	Erarbeitung von Musterlösungen zu Alltagsproblemen, geometrischen Problemen und Rätseln, Erstellung von Postern	Unterschiedliche Probleme
Montag, 16.1.	Strategien zum Termaufbau	Strategien erlernen anhand von Musterlösungen	Präsentation auf Postern (als Expertenpuzzle), an der Tafel Zusammenfassung der angewendeten Strategie	
Dienstag, 17.1.	Übung	Aufgaben aus dem Buch	Einzelarbeit oder Zweiergruppen	Differenzierte Aufgaben
Donnerstag, 19.1.	wie Dienstag			
Freitag, 20.1.	Klausur			

Erläuterungen zu den mit einem * versehenen Begriffen

Streichholzschachtelgleichungen

Streichholzschachtelgleichungen sind in mathbu.ch, im Mathematikbuch und in mathe live jeweils als handlungsorientierte Heranführung an lineare Gleichungen konzipiert. Sie sind allerdings an und für sich nicht geeignet, Gleichungen zu repräsentieren, in denen nichtnatürliche oder auch nur große Zahlen vorkommen. Die Bücher lösen dies so, dass sie an den Streichholschachtelgleichungen lediglich das Prinzip erklären, dann die Formelsprache einführen und daran dann üben lassen.

Unsere Idee ist, nichtnatürliche und große Zahlen in das vorhandene Schema einzuführen und so dem handelnden Lernen zugänglich zu machen, indem den Schülerinnen und Schüler Karten zur Verfügung gestellt werden, auf die beliebige Werte geschrieben werden können. Dennoch ist der Schritt hin zu einer rein symbolischen Sprache, die noch dazu wahrscheinlich mit anderen Darstellungen arbeitet als die Schülerinnen und Schüler, nicht zu unterschätzen und verdient besondere Aufmerksamkeit.

Strukturgleiche Gleichungen

Strukturgleiche Gleichungen sind solche Gleichungen, die sich in ihrer algebraischen Struktur gleichen und somit die gleichen strukturierenden Tätigkeiten erfordern. Sie können sich allerdings hinsichtlich ihrer Komplexität unterscheiden, etwa indem bei einer Aufgabe mehr sortiert werden muss als bei einer anderen, mit größeren oder schwierigeren (Primzahlen, Zehnerübergang) Zahlen operiert werden muss oder ein Problem auftritt, dass vorher nicht bestand (z.B. nichtnatürliche Werte für die Unbekannten).

Die Chance ist, dass so alle Schülerinnen und Schüler an für sie angemessenen Aufgaben arbeiten können, es aber dennoch ein gemeinsames Thema gibt, dass in der Klasse diskutiert werden kann.

Strukturieren durch Unterstreichen

Vor allem in Hinblick auf den späteren Umgang mit komplizierteren Termen erscheint es sinnvoll, auch bei den recht übersichtlichen linearen Gleichungen Strategien zur Strukturierung bereitzustellen. Insbesondere kann es helfen, die einzelnen Teilterme zu unterstreichen. Dieses Vorgehen wird vorbereitet (aber keineswegs determiniert!) durch die (offene) Strukturierung der Schachtelgleichungen durch die Schülerinnen und Schüler.

Einpacken und Auspacken

Einpacken und Auspacken ist eine Methode, mit der der Umgang mit Gleichungen flexibilisiert und so ihre Nutzung für die Lösung von Anwendungsproblemen vorbereitet werden soll. Eine Schülerin oder ein Schüler konstruiert von der ihr bekannten Lösung her eine möglichst komplizierte Gleichung, die der Gegenüber dann lösen muss.

Lerntreppe zu Gleichungen

Mit diesem Aufgabenblatt lernst du Schritt für Schritt den sicheren Umgang mit Gleichungen. Unten rechts geht es los...

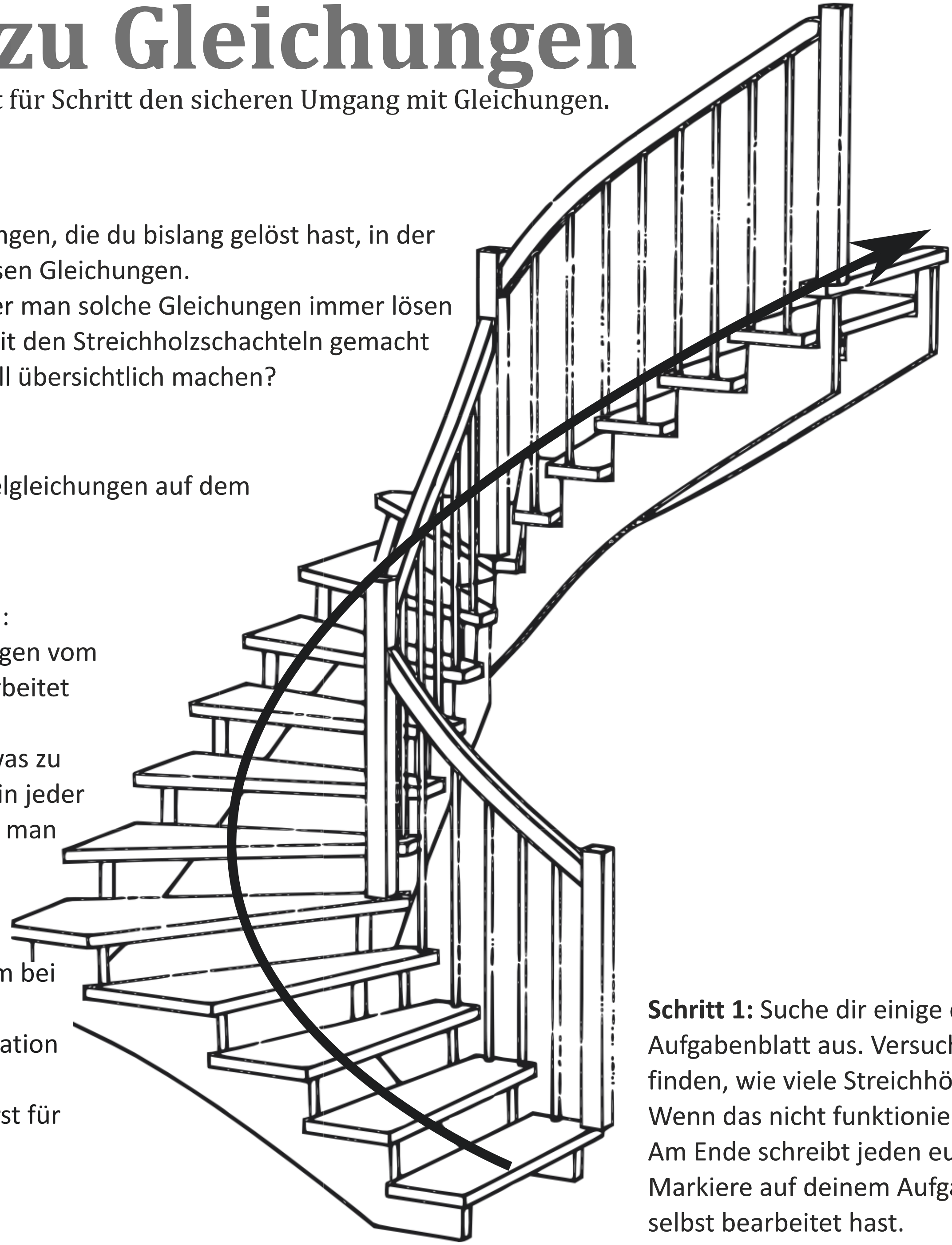
Du bist oben angekommen!
Jetzt können wir *Einpacken und Auspacken* (siehe Spielanleitung) spielen. Viel Spaß!

Schritt 5: Notiere in Einzelarbeit die Gleichungen, die du bislang gelöst hast, in der offiziellen Formelsprache. Löse eine von diesen Gleichungen.
Erfindet dann zu zweit eine Methode, mit der man solche Gleichungen immer lösen kann. Nutzt dabei die Erfahrungen, die ihr mit den Streichholzschachteln gemacht habt. Wie kann man hier Gleichungen schnell übersichtlich machen?

Schritt 4: Übt den Umgang mit den Schachtelgleichungen auf dem zweiten Aufgabenblatt.

Schritt 3: Löse weitere Schachtelgleichungen:
• Wenn du noch üben willst, wähle Gleichungen vom ersten Aufgabenblatt, die du noch nicht bearbeitet hast.
• Auf dem zweiten Aufgabenblatt gibt es etwas zu entdecken. Wie viele Streichhölzer sind hier in jeder Schachtel? Geht das überhaupt? Wie könnte man das beschreiben?

Schritt 2: Wie habt ihr angefangen? Vor allem bei Gleichungen mit vielen Schachteln und Streichhölzern kann es helfen, die ganze Situation erst einmal übersichtlicher zu gestalten.
Wie macht ihr das am besten? Überlegt zuerst für euch alleine. Diskutiert dann zu zweit euer Vorgehen. Schreibt auch hier die einzelnen Schritte auf Karten.



Schritt 1: Suche dir einige der Gleichungen auf dem ersten Aufgabenblatt aus. Versuche mit Hilfe eurer Anleitung herauszufinden, wie viele Streichhölzer in den Schachteln sein müssen. Wenn das nicht funktioniert, passt gemeinsam eure Anleitung an. Am Ende schreibt jeden eurer Schritte auf eine Karte.
Markiere auf deinem Aufgabenblatt die Gleichungen, die du selbst bearbeitet hast.

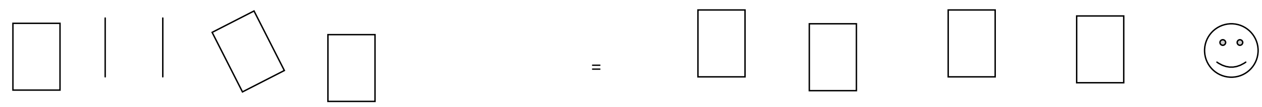
Aufgabenblatt 1: Wie viele Streichhölzer sind in den Schachteln?

Auf euren Tischen liegen *Gleichungen* aus Streichholzschachteln. Das bedeutet: **Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens liegt die gleiche Anzahl von Streichhölzern**. Einige Streichhölzer befinden sich in den Schachteln, und zwar **in jeder Schachtel gleichviele**. Eure Aufgabe:

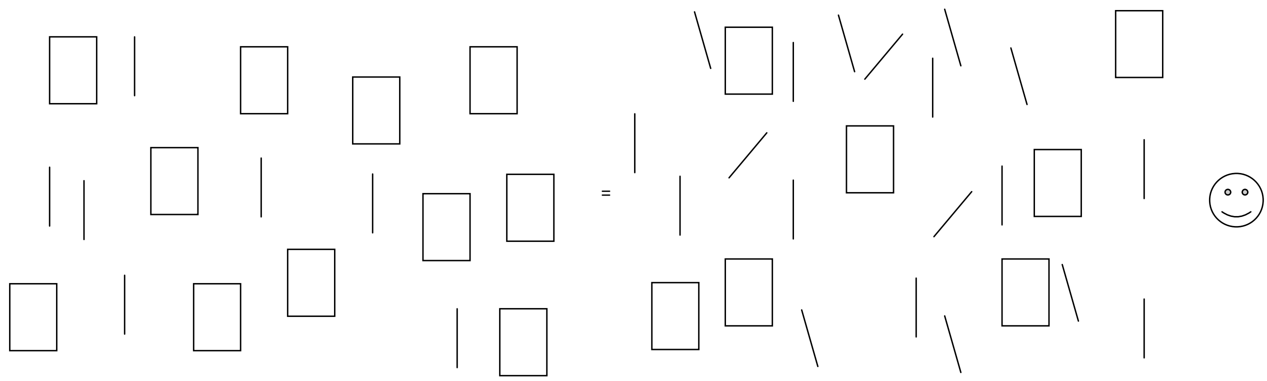
> Findet eine Möglichkeit, mit der man herausfinden kann, wie viele Streichhölzer in jeder Schachtel sind, ohne sie zu öffnen. Schreibt euer Vorgehen so auf, dass ihr es für weitere Gleichungen als Anleitung nutzen könnt.

Es gibt unzählige solcher Gleichungen, zum Beispiel:

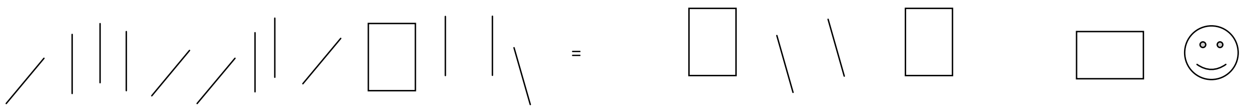
A



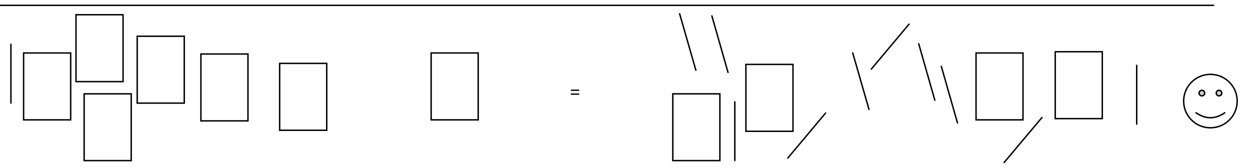
B



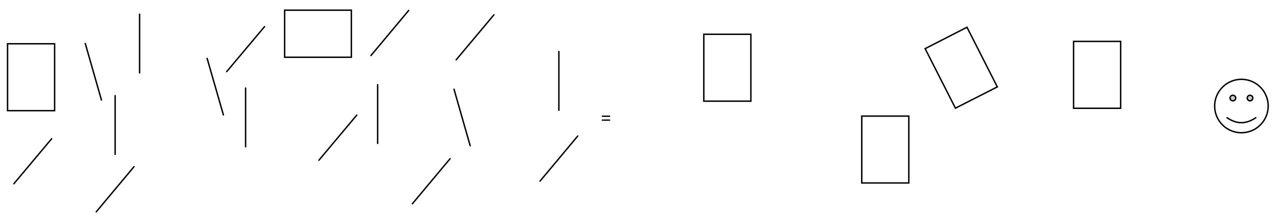
C



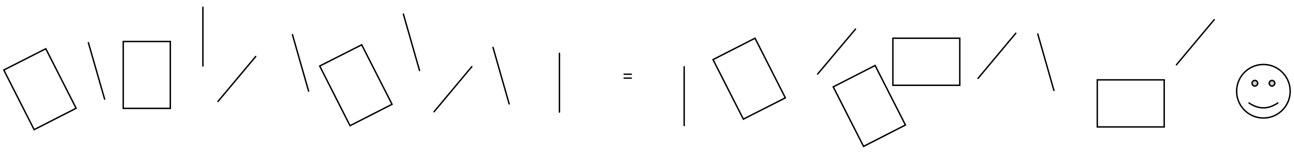
D



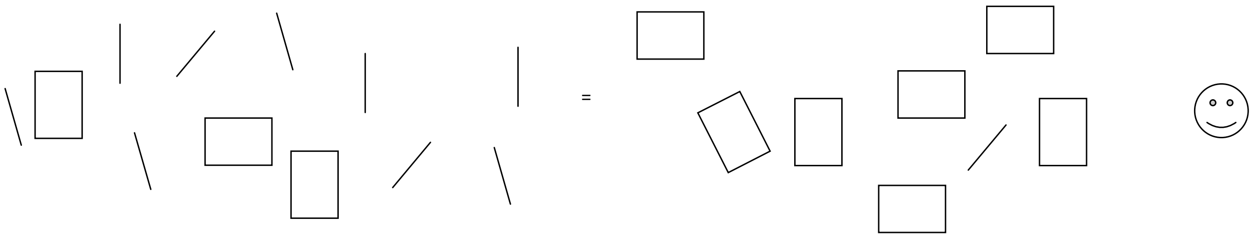
E



F



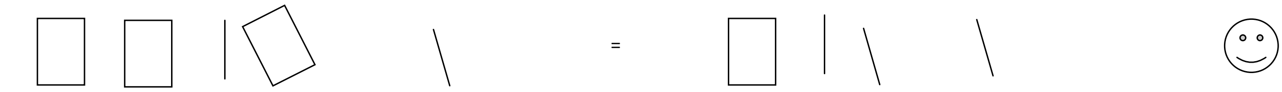
G



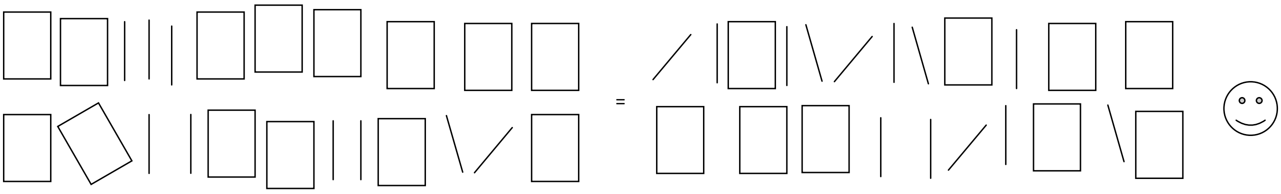
Aufgabenblatt 2: Noch mehr Gleichungen

Aber etwas ist anders…

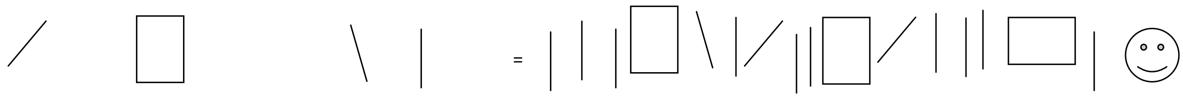
A



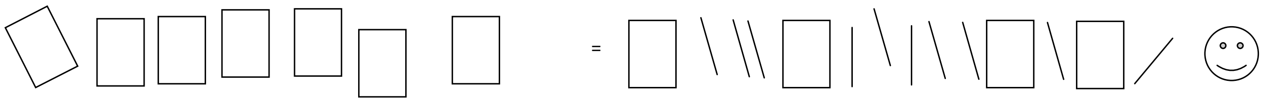
B



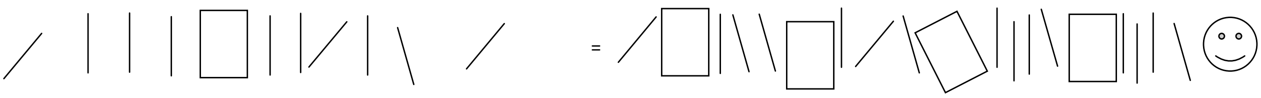
C



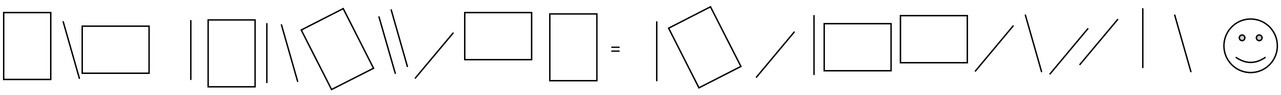
D



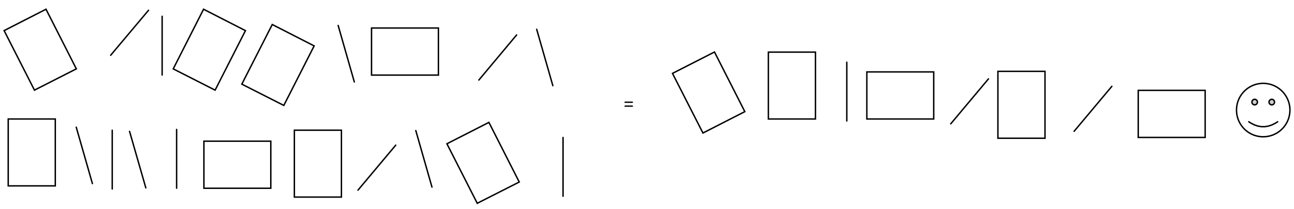
E



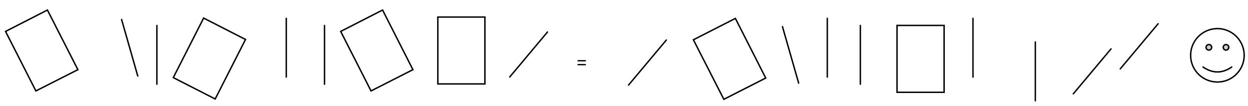
F



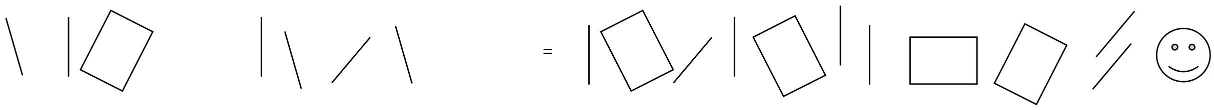
G



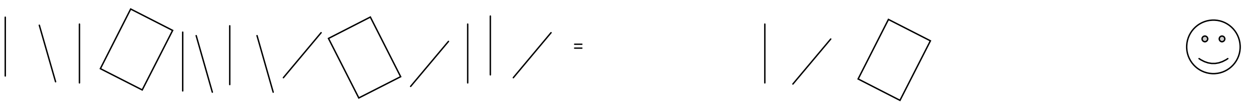
H



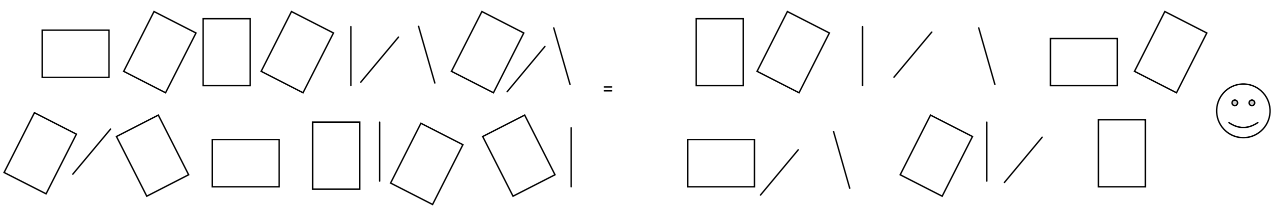
I



J



K



Lösungen zu den Aufgabenblättern:

Aufgabenblatt 1

Aufgabe	Lösung
A	2
B	3
C	5
D	3
E	8
F	3
G	2

Aufgabenblatt 2

Aufgabe	Lösung
A	1/2 bzw. 0,5
B	4/5 bzw. 0,8
C	-5
D	10/3 bzw. 3 1/3 bzw. 3,33…
E	-5/3 bzw. -1 2/3 bzw. -1,66…
F	2/3 bzw. 0,66…
G	-3
H	3/2 bzw. 1 1/2 bzw. 1,5
I	-1/3 bzw. -0,33…
J	-10
K	-1/4 bzw. -0,25

Aufgaben an der Tafel

Aufgabe	Lösung
A	-4
B	5/2 bzw. 2 1/2 bzw. 2,5
C	11

Aufgabenblatt 1: Wie viele Streichhölzer sind in den Schachteln?

Algebraische Gleichungen und Lösungen

Gleichungen auf den Tischen:

Leistungsniveau	Gleichung	Lösung
e	$5x + 4 = 2x + 19$	$x = 5$
e/g	$2x + 9 = 4x + 5$	$x = 2$
g	$x + 10 = 3x + 4$	$x = 3$

Gleichungen vom Aufgabenblatt:

Aufgabe	Gleichung	Lösung
A	$3x + 2 = 4x$	$x=2$
B	$11x + 7 = 7x + 19$	$x=3$
C	$x + 12 = 3x + 2$	$x=5$
D	$7x + 1 = 4x + 10$	$x=3$
E	$2x + 16 = 4x$	$x=8$
F	$3x + 8 = 4x + 5$	$x=3$
G	$3x + 9 = 7x + 1$	$x=2$

Aufgabenblatt 2: Wie viele Streichhölzer sind in den Schachteln?[1]

Algebraische Gleichungen und Lösungen

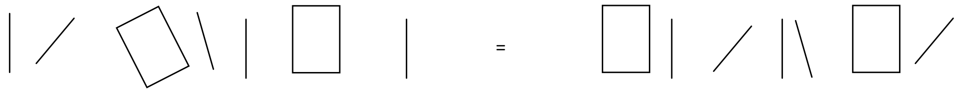
Aufgabe	Gleichung	Lösung
A	3x + 2 = x + 3	x = 1/2
B	14x + 9 = 9x + 13	x = 4/5
C	x + 3 = 3x + 13	x = -5
D	7x = 4x + 10	x = 10/3
E	x + 10 = 4x + 15	x = -5/3
F	6x + 7 = 3x + 9	x = 2/3
G	8x + 12 = 5x + 3	x = -3
H	4x + 5 = 2x + 8	x = 3/2
I	x + 6 = 4x + 7	x = -1/3
J	2x + 12 = x + 2	x = -10
K	11x + 8 = 7x + 7	x = -1/4

[1] Nachträgliche Korrektur: Eigentlich müsste der Titel hier lauten: „Noch mehr Gleichungen“.

Extra-Aufgabenblatt: Wie kann das richtig sein?

Du hast gelernt, *Gleichungen* aus Streichholzschachteln zu lösen. Du kannst also herausfinden, wie viele Streichhölzer in den Schachteln sein müssen, damit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl an Streichhölzern liegt. Bei manchen Gleichungen ist das aber gar nicht so einfach:

A

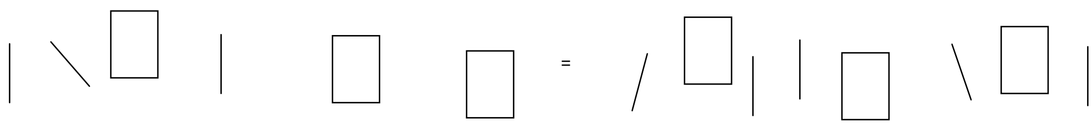


Wie viele Streichhölzer müssen hier in den Schachteln sein? Gibt es *eine* Lösung?

Was ist das besondere an dieser Gleichung? Kannst du Gleichungen aufschreiben, bei denen das gleiche passiert?

Versuche auch diese Gleichung zu lösen:

B



Was ist hier das Problem? Wann tritt es auf?

Einpacken und Auspacken

Spielanleitung

Einpacken

Als erstes packst du alleine Gleichungen ein. Bislang hast du die Gleichungen immer weiter vereinfacht. Jetzt fängst du mit dem Ergebnis an und machst die Gleichung immer komplizierter, sodass die Lösung nicht mehr sofort zu erkennen ist.

Stelle mindestens fünf verschiedene Gleichungen auf. Zeige die einzelnen Schritte nicht deinen Mitschülerinnen und Mitschülern, sie sollen deine Gleichung später lösen.

Auspacken

Ihr habt jetzt eine Reihe von Gleichungen vorbereitet – mit ihnen tretet ihr gegen die anderen an. Sucht euch für jede Gleichung eine Gegnerin oder einen Gegner. Tauscht die Gleichungen aus und versucht sie so schnell wie möglich zu lösen. Am Ende kontrolliert ihr, ob ihr richtig gerechnet habt.

Wertung

Wenn ihr der Meinung seid, dass eine Gleichung

- besonders schön,
- besonders kompliziert oder
- besonders ungewöhnlich

ist, schreibt sie auf eine Karte und dazu die Kategorie, in der ihr antreten wollt. Auf die Rückseite schreibt eure Namen.
Aber: Jeder darf mit höchstens zwei Karten an der Wertung teilnehmen.

Die Gleichungen werden dann an die Tafel geklebt. Per Abstimmung werden die Gewinnerinnen und Gewinner bestimmt.

Einpacken und Auspacken

Spielanleitung

Einpacken

Als erstes packst du alleine Gleichungen ein. Bislang hast du die Gleichungen immer weiter vereinfacht. Jetzt fängst du mit dem Ergebnis an und machst die Gleichung immer komplizierter, sodass die Lösung nicht mehr sofort zu erkennen ist.

Stelle mindestens fünf verschiedene Gleichungen auf. Zeige die einzelnen Schritte nicht deinen Mitschülerinnen und Mitschülern, sie sollen deine Gleichung später lösen.

Auspacken

Ihr habt jetzt eine Reihe von Gleichungen vorbereitet – mit ihnen tretet ihr gegen die anderen an. Sucht euch für jede Gleichung eine Gegnerin oder einen Gegner. Tauscht die Gleichungen aus und versucht sie so schnell wie möglich zu lösen. Am Ende kontrolliert ihr, ob ihr richtig gerechnet habt.

Wertung

Wenn ihr der Meinung seid, dass eine Gleichung

- besonders schön,
- besonders kompliziert oder
- besonders ungewöhnlich

ist, schreibt sie auf eine Karte und dazu die Kategorie, in der ihr antreten wollt. Auf die Rückseite schreibt eure Namen.
Aber: Jeder darf mit höchstens zwei Karten an der Wertung teilnehmen.

Die Gleichungen werden dann an die Tafel geklebt. Per Abstimmung werden die Gewinnerinnen und Gewinner bestimmt.

Einpacken und Auspacken

Spielanleitung

Einpacken

Als erstes packst du alleine Gleichungen ein. Bislang hast du die Gleichungen immer weiter vereinfacht. Jetzt fängst du mit dem Ergebnis an und machst die Gleichung immer komplizierter, sodass die Lösung nicht mehr sofort zu erkennen ist.

Stelle mindestens fünf verschiedene Gleichungen auf. Zeige die einzelnen Schritte nicht deinen Mitschülerinnen und Mitschülern, sie sollen deine Gleichung später lösen.

Auspacken

Ihr habt jetzt eine Reihe von Gleichungen vorbereitet – mit ihnen tretet ihr gegen die anderen an. Sucht euch für jede Gleichung eine Gegnerin oder einen Gegner. Tauscht die Gleichungen aus und versucht sie so schnell wie möglich zu lösen. Am Ende kontrolliert ihr, ob ihr richtig gerechnet habt.

Wertung

Wenn ihr der Meinung seid, dass eine Gleichung

- besonders schön,
- besonders kompliziert oder
- besonders ungewöhnlich

ist, schreibt sie auf eine Karte und dazu die Kategorie, in der ihr antreten wollt. Auf die Rückseite schreibt eure Namen.
Aber: Jeder darf mit höchstens zwei Karten an der Wertung teilnehmen.

Die Gleichungen werden dann an die Tafel geklebt. Per Abstimmung werden die Gewinnerinnen und Gewinner bestimmt.

Einpacken und Auspacken

Gleichung aufgestellt von:

Gleichung gelöst von:

Einpacken und Auspacken

Gleichung aufgestellt von:

Gleichung gelöst von:

Gleichungen lösen, um Probleme zu lösen

Gleichungen können dir helfen, Probleme zu lösen – Rätsel wie das mit den Streichholzschachteln sind nur eine von vielen Möglichkeiten. Wir wollen jetzt weitere kennenlernen. Dazu bekommt ihr zu zweit jeweils eine Aufgabe mit einer ausführlichen Lösung.

1. Lies dir zunächst alleine die Aufgabe durch. Überlege alleine oder mit deinem Partner mindestens eine Viertelstunde, wie man sie lösen kann.
2. Lest euch nun die Musterlösung durch. Wenn ihr glaubt, einen besseren Weg gefunden zu haben, dürft ihr die Musterlösung verändern.
3. Gestaltet zusammen ein Poster, auf dem die Aufgabe und die Lösung dargestellt werden. Mit diesem Poster sollt ihr später euren Mitschülern erklären, wie man so eine Aufgabe lösen kann.
    a. Überlegt euch eine übersichtliche, gut verständliche Darstellung.
    b. Stellt euren Lösungsweg in Schritten dar. Erfindet für die einzelnen Schritte Überschriften, die leicht zu merken sind und die gut beschreiben, wie man vorgeht.
    c. Bereitet euch mit zusätzlichen Notizen darauf vor, das Poster anderen zu erklären.
4. Ihr habt jeder eine Karte mit einer Zahl bekommen. Alle Schülerinnen und Schüler mit der gleichen Zahl bilden eine Gruppe. Geht jetzt zusammen nacheinander zu den Postern, die ihr gestaltet habt.
    a. Der Autor bzw. die Autorin des Posters stellt dieses vor. Die anderen stellen Fragen.
    b. Nachdem ihr alle drei Poster gesehen habt, vergleicht die Lösungsschritte bei den verschiedenen Aufgaben. Notiert zusammen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf dem vorbereiteten Arbeitsblatt.

Gemeinsamkeiten

Welche Schritte kamen bei allen Aufgaben vor?

Unterschiede

Welche Schritte traten nur bei bestimmten Aufgaben auf?

A: Rätselaufgabe

Historisches Zahlenrätsel nach Adam Riese (1492-1549)

(Aufgabe 10 auf Seite 34 im Buch)

Insgesamt 21 Personen, Männer und Frauen, haben in einem Wirtshaus eine Zeche (ein altes Wort für die Rechnung in einer Kneipe) von 81 Pfennigen gemacht. Wie viele Männer und wie viele Frauen sind es gewesen, wenn jeder Mann 5 Pfennige und jede Frau 3 Pfennige bezahlen soll?

Musterlösung

Als erstes überlegt man sich, was man hier eigentlich ausrechnen soll: Die Anzahl an Frauen und die Anzahl an Männern. Da wir ja aber wissen, dass insgesamt 21 Menschen beteiligt waren, reicht es, nur die Anzahl der Frauen oder nur die Anzahl der Männer auszurechnen. Nehmen wir also an, dass wir die Anzahl der Frauen ausrechnen wollen. Diese bezeichnen wir mit x. Dann ist die Anzahl der Männer $21 - x$, nämlich der Rest der Menschen, die zusammen gefeiert haben.
Jetzt können wir schon anfangen, unsere Gleichung aufzustellen. Auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht der Rechnungsbetrag, also 81.
Auf der anderen Seite muss aufgeschrieben werden, wie sich die Rechnung zusammensetzt. Jede Frau bezahlt 3 Pfennige, alle x Frauen zusammen kommen also auf eine Rechnung von $3 \cdot x$. Die $21 - x$ Männer kommen mit ihren 5 Pfennigen für jeden auf eine Gesamtrechnung von $5 \cdot (21 - x)$. Dieses beides zusammenaddiert muss den Gesamtbetrag ergeben, wir können jetzt also die Gleichung aufschreiben:

$$3 \cdot x + 5 \cdot (21 - x) = 81$$

Wenn man einen Klammerterm mit einer Zahl multiplizieren möchte, nimmt man jeden Teil des Terms mit der Zahl mal. Aus $5 \cdot (21 - x)$ wird also $5 \cdot 21 + 5 \cdot (-x) = 105 - 5x$.

$$3x + 105 - 5x = 81$$

Jetzt haben wir eine Gleichung, die wir lösen können. Wir erhalten so einen Wert für x und wissen damit die Anzahl der Frauen.

$$\begin{aligned} 3x + 105 - 5x &= 81 && |\text{zusammenfassen} \\ -2x + 105 &= 81 && | - 105 \\ -2x &= -24 && | : (-2) \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Es gibt also 12 Frauen. Wir haben schon gesehen, dass sich damit jetzt die Anzahl der Männer berechnen lässt, indem man die Anzahl der Frauen von der Gesamtzahl der Menschen abzieht. Man erhält $21 - 12 = 9$.
Man kann jetzt noch eine Probe machen, indem man in die Ausgangsgleichung einsetzt:

$$3 \cdot 12 + 5 \cdot (21 - 12) = 3 \cdot 12 + 5 \cdot 9 = 36 + 45 = 81$$

Die neun Männer zahlen also zusammen 45 Pfennige, während die zwölf Frauen zusammen 36 Pfennige bezahlen.

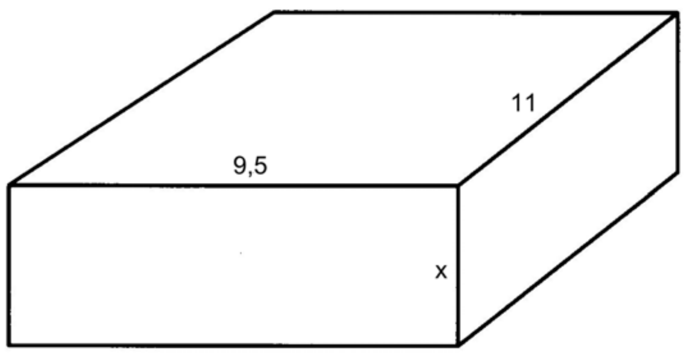
B: Geometrische Figuren

Schwimmbecken

Bademeister Ebert muss in einem Formular angeben, wie tief das Becken unter dem 10 Meter-Turm ist. Das geht aus seinen Unterlagen nicht hervor, und er möchte nicht extra ins Wasser steigen, um von Hand nachzumessen. Da er aber weiß, dass das Becken insgesamt 522,5m^3 Wasser fasst, misst er einfach die beiden Seiten aus: Sie sind 9,5 und 11 Meter lang. Wie rechnet er jetzt die Tiefe des Beckens aus?

Musterlösung

Wir wollen die Tiefe des Beckens berechnen. Diese bezeichnen wir mit x.
Jetzt machen wir uns eine Planzeichnung des Beckens. Dabei nehmen wir an, dass es quaderförmig ist und tragen alles ein, was wir wissen:



Es ist bekannt, dass sich das Volumen eines Quaders als das Produkt von Länge, Höhe und Breite berechnen lässt. In diesem Fall ist die Rechnung also $9{,}5 \cdot 11 \cdot x$. Da das Ergebnis dieser Rechnung mit dem Wert übereinstimmen muss, den der Bademeister weiß, lautet die komplette Gleichung

$$9{,}5 \cdot 11 \cdot x = 522{,}5.$$

Jetzt rechnen wir weiter, wie wir es kennen:

$$\begin{aligned} 9{,}5 \cdot 11 \cdot x &= 522{,}5 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 104{,}5x &= 522{,}5 && \mid : 104{,}5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Das Becken ist also 5 Meter tief.
Man kann jetzt noch eine Probe machen, indem man in die Ausgangsgleichung einsetzt:

$$9{,}5 \cdot 11 \cdot 5 = 522{,}5$$

Man erhält das korrekte Volumen des Schwimmbeckens, wenn man als Tiefe 5 Meter annimmt.

C: Alltagsaufgaben

Vergesslich im Elektromarkt

Ugur war im Elektromarkt. Dort gab es ein Angebot: Wenn man zwei CDs kauft, gibt es eine dritte zum halben Preis – also hat er sich drei CDs gekauft. Außerdem brauchte er noch neue Kopfhörer.
Als Ugur wieder zu Hause ist, gefällt ihm eine CD besonders gut, und er überlegt, sich eine weitere CD der gleichen Sängerin zu kaufen. Den Bon hat er schon weggeworfen, nur bei den Kopfhörern weiß er aufgrund des Preisschilds, dass sie 14,90€ gekostet haben. Und er kann sich erinnern, dass er mit einem 50-Euro-Schein bezahlt hat und 35 Cent zurückbekommen hat. Wie kann er damit ausrechnen, was eine CD kostet?

Musterlösung

Als erstes überlegt man sich, was man hier eigentlich ausrechnen soll: Den Preis einer einzelnen CD. Diesen bezeichnen wir mit x.
Jetzt können wir schon anfangen, eine Gleichung aufzustellen. Auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht der Rechnungsbetrag. Diesen können wir berechnen, weil Ugur noch weiß, dass er 50€ bezahlt hat und 35 Cent wiederbekommen hat. Auf der einen Seite der Gleichung steht also $50 - 0{,}35$, oder wir rechnen das gleich aus und schreiben $49{,}65$.
Auf der anderen Seite muss aufgeschrieben werden, wie sich die Rechnung zusammensetzt. Die Kopfhörer haben 14,90€ gekostet, dazu kommt der Preis für die zwei CDs, für die Ugur den halben Preis zahlen musste, und dann noch einmal der halbe Preis für eine CD. Alles zusammenaddiert muss den Gesamtbetrag ergeben: $14{,}90 + 2 \cdot x + 0{,}5 \cdot x$.
Insgesamt sieht die Gleichung also so aus:

$$14{,}90 + 2 \cdot x + 0{,}5 \cdot x = 49{,}65$$

Jetzt haben wir eine Gleichung, die wir lösen können. Wir erhalten so einen Wert für x und wissen damit den Preis für eine einzelne CD.

$$\begin{aligned} 14{,}90 + 2x + 0{,}5x &= 49{,}65 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 14{,}90 + 2{,}5x &= 49{,}65 && \mid -14{,}90 \\ 2{,}5x &= 34{,}75 && \mid : 2{,}5 \\ x &= 13{,}90 \end{aligned}$$

Eine einzelne CD kostet also 13,90€.
Man kann jetzt noch eine Probe machen, indem man in die Ausgangsgleichung einsetzt:

$$14{,}90 + 2 \cdot 13{,}90 + 0{,}5 \cdot 13{,}90 = 49{,}65$$

Wir haben offenbar richtig gerechnet. Man kommt auf den korrekten Endpreis, wenn man als Preis für eine CD 13,90€ annimmt.

C: Alltagsaufgaben

Zeitungsverkäuferin

Frau Bellmann verkauft an ihrem Kiosk verschiedene Zeitungen. Ihr Hauptgeschäft macht sie mit dem Aller-Boten. Sie hat festgestellt, dass sie gut über die Runden kommt, wenn am Ende etwa 250€ pro Woche übrig bleiben. Die Zeitung kostet im Verkauf 1,10€, von denen 60 Cent an den Verlag gehen. Außerdem hat Frau Bellmann wöchentliche Kosten in Höhe von 50€ für Heizung und Strom. Wie viele Zeitungen muss sie verkaufen, um genügend Gewinn zu machen?

Musterlösung

Als erstes überlegt man sich, was man hier eigentlich ausrechnen soll: Die Anzahl der Zeitungen, die Frau Bellmann verkaufen muss, um ihr Gewinnziel zu erreichen. Diese bezeichnen wir mit x.
Jetzt können wir schon anfangen, eine Gleichung aufzustellen. Hierbei sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar. Man kann sich beispielsweise überlegen, dass sich aus den verschiedenen Kosten und Einnahmen der Gewinn zusammensetzt. Für jede Zeitung nimmt Frau Bellmann 1,10€ ein, um die Gesamteinnahmen zu berechnen, muss man diesen Betrag mit x malnehmen. Ebenso kann man den Betrag, den sie an den Verlag zahlen muss, berechnen und von den Einnahmen abziehen. Ebenfalls abziehen muss man die Kosten, die sie in jedem Fall hat. Zusammen ergibt sich eine Rechnung von $1{,}10 \cdot x - 0{,}60 \cdot x - 50$. Nachdem man all dies verrechnet hat, sollte der Gewinn immer noch bei 250€ liegen, die Gleichung sieht also insgesamt so aus:

$$1{,}10 \cdot x - 0{,}60 \cdot x - 50 = 250$$

Man kann auch anders vorgehen und sich überlegen, dass das eigentlich interessante die Einnahmen für die verkauften Zeitungen sind: Von diesen Einnahmen müssen der Verlag, die festen Kosten und Frau Bellmanns Lebensunterhalt bezahlt werden – wir haben also wieder eine Gleichung:

$$1{,}10 \cdot x = 0{,}60 \cdot x + 50 + 250$$

Man kann sehen, dass die beiden Gleichungen äquivalent sind: Wenn man bei der oberen auf beiden Seiten $0{,}60 \cdot x + 50$ addiert, erhält man die untere. Um zur Lösung zu kommen, ist es also egal, welche der beiden Gleichungen man verwendet. Für dieses Beispiel rechnen wir mit der unteren Gleichung weiter, wie wir es kennen:

$$\begin{aligned}
1{,}10x &= 0{,}60x + 50 + 250 && \mid \text{zusammenfassen}\\
1{,}1x &= 0{,}6x + 300 && \mid -0{,}6x\\
0{,}5x &= 300 && \mid \cdot 2\\
x &= 600
\end{aligned}$$

x gibt die Anzahl an Zeitungen an, die Frau Bellmann verkaufen muss, um ausreichend Gewinn zu machen: Es sind 600 Stück, also jeden Wochentag 100.
Man kann jetzt noch eine Probe machen, indem man in die Ausgangsgleichung einsetzt:

$$1{,}10 \cdot 600 = 0{,}60 \cdot 600 + 50 + 250$$

Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens kommt man auf 660, nämlich die Gesamteinnahmen von Frau Bellmann in jeder Woche.

A.2. Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

Unterrichtsplanung

Tag	Inhalt/Lernziel	Mathematikdidaktische Methode	Unterrichtsmethode	Binnendifferenzierung
Vorbereitung	Hausaufgabe zu Montag, 12.3.: Vermesst die Tiefe und Höhe der Treppenstufen in eurem Haus.			
Montag, 12.3.	Zahlenmäßige Beschreibung der Unterschiedlichkeit von Treppen (Motivation des Steigungsbegriffs), Einführung des offiziellen Steigungsbegriffs als Quotient des Zuwachses in beiden Richtungen	Erkundung von Treppen mit verschiedenen Steigungen: Zunächst anschaulich über Zeichnungen, dann zahlenmäßig	• Zeichnungen im Maßstab 1:3 mit Beschriftungen auf Din A3 alleine anfertigen lassen, alle an der hinteren Wand aufhängen • Klassendiskussion: Worin unterscheiden sich die Treppen (Steigung), worin sind sie sich ähnlich (es sind immer alle Stufen gleich)? • zu zweit: Wie kann man die Steigung einer Treppe sinnvoll bestimmen? Kritische Bewertung anhand der vorhandenen Treppen • Präsentation und Gegenüberstellung der Ansätze • Offizielle Definition der Steigung als Quotient des Zuwachses in zwei Richtungen an der Tafel unter Rückgriff auf die präsentierten Ansätze	
Freitag, 16.3. (Doppelstunde)	Übung und Weiterentwicklung des Steigungsbegriffs;		Individuelle Bearbeitung von Aufgabenblatt 1, Klassendiskussion an der Tafel insbesondere über Aufgabe 3 und 4, evtl. OHP	Zusatzaufgaben für E-SuS sowie für alle schnellen SuS
	Lineare Prozesse in Wertetabellen darstellen	Schrittweises Befüllen von Bechergläsern und Erstellen von	Arbeit in Zweiergruppen mit verschiedenen Zufüllgefäßen und Anfangsfüllhöhen anhand von	

		Wertetabellen	Aufgabenblatt 2a	
Dienstag, 20.3.	Lineare Zuordnungen anhand von Wertetabellen analysieren, insbesondere additive Eigenschaft		individuelle oder Partnerarbeit an Aufgabenblatt 2b, bis Aufgabe 4	angepasste Aufgaben
Freitag, 23.3.	Entwicklung der multiplikativen Eigenschaft, für die E-SuS auch schon Terme.		weitere Arbeit an Aufgabenblatt 2b	zusätzliche Aufgabe zu Termen für E-SuS
		Ferien		
Freitag, 13.4.	Wiederholung, dabei betonen: Anfangsfüllstand und gleichmäßige Zuwachs, die zusammenfassende Rechnung und Termdarstellung ermöglichen, x ist Variable, nicht Unbekannte; Lineare Zuordnungen mit negativer Steigung erkunden und mit den bisherigen linearen Zuordnungen vergleichen	Entleeren von Bechergläsern als Gedankenexperiment	Wiederholung des bisher gelernten an der Tafel und anhand eines Arbeitsblattes; Arbeit an Aufgabenblatt 3	Terme für E, Wortterme als Hilfe für G
		Klassenfahrt		
Montag, 23.4.	Wiederholung zu linearen Zuordnungen (wachsend und fallend), übergreifende Definition, dann Übung		Schrittweises Befüllen und Leeren durch Folie ins Gedächtnis rufen, Diskussion der Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur vorherigen Situation, AB4	

Dienstag, 24.4.	Übergang von diskreten zu stetigen Zuordnungen, Graphen als Darstellung, Aufstellen einer vorläufigen Definition, Übung als Hausaufgabe	Gleichmäßiges Befüllen von Bechergläsern als Gedankenexperiment*	Zunächst Klassendiskussion der neuen Situation: Ausfüllen einer Tabelle zur neuen Situation Fortsetzung, dann Graphen als geeignete Darstellung für stetige Verläufe, analoge Betrachtung eines auslaufenden Gefäßes im Aufgabenblatt 5 (Hausaufgabe: 1 und 2);	
Freitag, 27.4.	Reflexion des Zuwachses/Verlusts als Steigung und entsprechende Anpassung der Definition	verschiedene Modellierungen*		
Freitag, 4.5.	Übung für alle (AB 6); Berechnung von Schnittpunkten von Graphen (nur E-SuS)	Motivation des Gleichsetzens über eine Wertetabelle, Seite 135, Aufgabe 5 als Hausaufgabe		Berechnung von Schnittpunkten nur für E-SuS, G-SuS machen in der Zeit die restlichen Aufgaben
Freitag, 11.5.	Besprechung der gemeinsamen Übung und der anderen Aufgaben			Aufgabe der E-SuS wird selbstorganisiert besprochen, während die G-SuS mit der Lehrerin den Rest besprechen
Montag, 14.5.	Diskussion der Darstellungsformen (Wertetabelle, Term, Graph)Übung		Erarbeitung einer Tabelle nach Darstellungsform und Eigenschaften (Steigung, Anfangswert, Bearbeitung einer Standard-Anwendungsaufgabe und Berechnung von Schnittpunkten)	Berechnung von Schnittpunkten wird von E-SuS dargestellt
Dienstag, 15.5.	Fortsetzung; Lineare Zuordnungen werden als Objekt in Abhängigkeit von Steigung und Anfangswert erkannt; Übung	Gedankenexperiment	Prädiktion des Verhaltens eines Graphen, dessen Steigung und Anfangswert in einer DGS frei variiert werden können	

Montag, 21.5.	Übung	Lerntheke
Dienstag, 22.5.	Klassenarbeit	

Erläuterungen zu den mit einem * versehenen Begriffen

Gedankenexperiment

Lineare Zuordnungen sind bezogen auf Alltagssituationen stets als Idealisierungen zu verstehen. Sie lassen sich also nicht direkt aus Versuchssituationen herleiten (es ist beispielsweise sehr schwierig, einen gleichmäßigen Strahl zu erzeugen, und unmöglich, stetig abzumessen). Die Schülerinnen und Schüler können sich aber vorstellen, wie die Werte in einer idealisierten Versuchssituation aussähen.

Modellierungen

Nur wenige Anwendungskontexte lassen als Darstellung lineare Funktionen im streng mathematischen Sinne zu. Sobald im Ursprungs- oder Zielbereich Einheiten auftreten, die üblicherweise gerundet werden (insbesondere Geldbeträge), müsste man eigentlich mit Stufenfunktionen arbeiten. Es muss also explizit gemacht werden, dass bei einer Modellierung mit linearen Funktionen vereinfachende Annahmen gemacht werden.

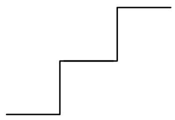
Aufgabenblatt 1: Treppensteigungen (E-Kurs)

Wir haben die Steigung als den *Quotienten des Zuwachses in zwei Richtungen* definiert. Bei Treppenstufen bedeutet das, dass man die Höhe einer oder mehrerer Stufen durch ihre Tiefe teilt.

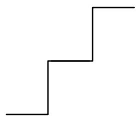
$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhe der Stufen}}{\text{Tiefe der Stufen}}$$

1. Bestimme die Steigung dieser Treppen:

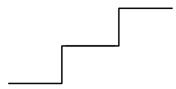
   a)
   Höhe 30 cm, Tiefe 30 cm

   b)
   Höhe 30 cm, Tiefe 20 cm

   c)
   Höhe 20cm, Tiefe 30cm

2. Zeichne in dein Heft *jeweils zwei verschiedene* Treppen mit den Steigungen
   a) 2
   b) 2/3
   c) 1,5
3. Beschreibe in eigenen Worten, welche Eigenschaften Treppen haben, die folgende Steigung besitzen:
   a) 1
   b) 2
   c) 0,5
4. In der Dreimalwelt ist alles drei mal so groß wie in unserer Welt: Menschen, Tiere, Autos, Häuser und so weiter. Eine bestimmte Treppe hat in unserer Welt die Steigung 0,7. Welche Steigung hat sie in der Dreimalwelt?
5. Wie hoch bzw. tief muss eine einzelne Treppenstufe sein, wenn die Steigung der Treppe 0,8 sein soll?
   a) Die Höhe einer Treppenstufe beträgt 20 cm.
   b) Die Tiefe einer Treppenstufe beträgt 20 cm.
   c) Zwei Treppenstufen sind zusammen 34 cm hoch.
   d) Die Treppe hat eine Gesamthöhe von 3 Metern, es gibt 17 Stufen.
6. (Zusatzaufgabe) Simon behauptet, dass es eine Treppe mit der Steigung -0,7 geben könnte. Clara sagt, dass das Quatsch ist und dass es nur Treppen mit positiver Steigung gibt. Schreibe auf, was sich Clara und Simon denken. Diskutiere dann mit deinem Nachbarn oder deiner Nachbarin über diese Frage.

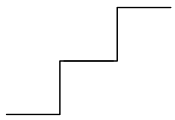
Aufgabenblatt 1: Treppensteigungen (G-Kurs)

Wir haben die Steigung als den *Quotienten des Zuwachses in zwei Richtungen* definiert. Bei Treppenstufen bedeutet das, dass man die Höhe einer oder mehrerer Stufen durch ihre Tiefe teilt.

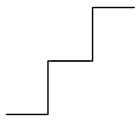
$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhe der Stufen}}{\text{Tiefe der Stufen}}$$

1. Bestimme die Steigung dieser Treppen:

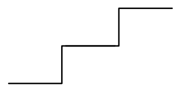
   a)
   Höhe 30 cm, Tiefe 30 cm

   b)
   Höhe 30 cm, Tiefe 20 cm

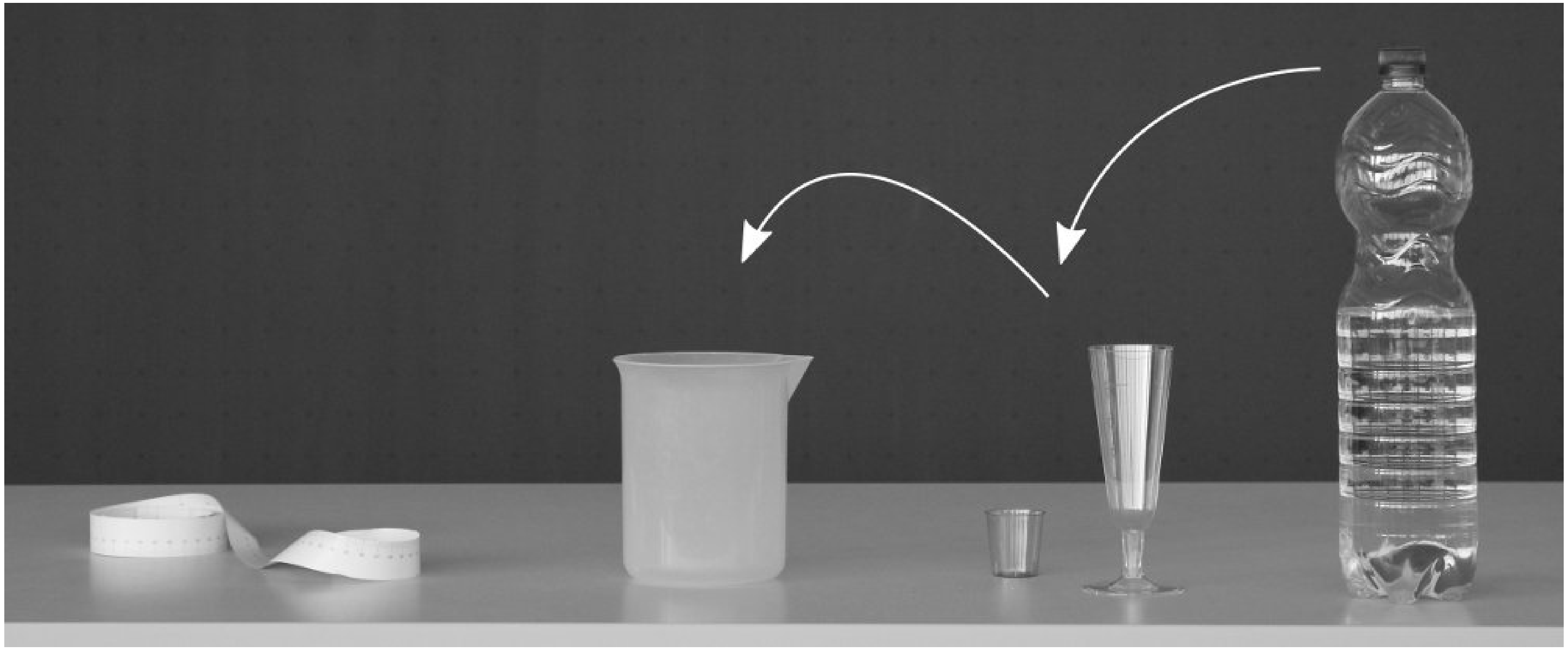
   

   c)
   Höhe 20cm, Tiefe 30cm

2. Zeichne in dein Heft *jeweils zwei verschiedene* Treppen mit den Steigungen
   a) 2
   b) 2/3
   c) 1,5
3. Beschreibe in eigenen Worten, welche Eigenschaften Treppen haben, die folgende Steigung besitzen:
   a) 1
   b) 2
   c) 0,5
4. In der Dreimalwelt ist alles drei mal so groß wie in unserer Welt: Menschen, Tiere, Autos, Häuser und so weiter. Eine bestimmte Treppe hat in unserer Welt die Steigung 0,7. Welche Steigung hat sie in der Dreimalwelt?
5. (Zusatzaufgabe) Simon behauptet, dass es eine Treppe mit der Steigung -0,7 geben könnte. Clara sagt, dass das Quatsch ist und dass es nur Treppen mit positiver Steigung gibt. Schreibe auf, was sich Clara und Simon denken. Diskutiere dann mit deinem Nachbarn oder deiner Nachbarin über diese Frage.

Aufgabenblatt 2a: Nach und nach füllt sich das Glas



Auf euren Tischen steht jeweils ein Becherglas und ein kleineres Gefäß (Schnaps- bzw. Sektglas), außerdem eine Flasche mit Wasser. Füllt jeweils das kleine Gefäß bis zur Markierung mit Wasser und kippt es dann in das Becherglas. Messt nach jedem Füllvorgang mit dem Zollstock den Wasserstand in dem Becherglas und füllt dabei die abgebildete **Wertetabelle** aus:

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm											

Aufgabenblatt 2b: Nach und nach füllt sich das Glas (E-Kurs)

In der letzten Stunde habt ihr eine Wertetabelle erstellt, die zeigt, wie das Wasser in einem Becherglas steigt, wenn man es Schritt für Schritt mit der gleichen Menge an Wasser füllt.

1. Vergleicht eure Wertetabelle mit den benachbarten Paaren.
   a) Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede gibt es?
   b) Glaubt ihr, dass ihr alle Werte exakt gemessen habt? Wenn nicht, füllt die folgende Tabelle so aus, wie sie ohne Messfehler aussehen müsste.

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm											

2. Wie würde es wohl weitergehen? Was wäre der Wasserstand nach den nächsten drei Füllvorgängen?

Füllvorgänge			
Wasserstand in cm			

3. Welche Regelmäßigkeit hast du ausgenutzt? Welche Rolle spielt die Form des Becherglases und welche das Zufüllgefäß (Schnaps- bzw. Sektglas)?
4.
   a) Vervollständige die folgenden Wertetabellen, die bei etwas größeren Bechergläsern entstehen:

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm	7,2	7,9									

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm				8,6	9,9						

   b) Angenommen, wir nehmen andere Gefäße als das Becherglas. Bei welchen ließe sich die Wertetabelle nach dem gleichen Prinzip ausfüllen, bei welchen nicht? Begründe.




Denke dir eine passende Geschichte aus und schreibe die entsprechende Wertetabelle auf.

5. Schau dir erneut deine Wertetabelle oben an, die ihr zusammen erstellt habt.
   a) Berechne *ohne Zwischenschritte*, wie hoch das Wasser nach 20 Füllvorgängen stünde, wenn das Becherglas hoch genug wäre.
   b) Clara hat nicht verstanden, wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist. Erkläre in einem kurzen Brief dein Vorgehen. Du kannst dabei folgende Satzbausteine verwenden:

   Bei jedem Füllvorgang …

   Zwei Füllvorgänge ergeben also …

   Eine beliebige Anzahl von Füllvorgängen lässt sich zusammenfassen, indem …

6.
   a) Vervollständige die folgenden Wertetabellen. Nimm dabei an, dass die Regelmäßigkeit gilt, die du in Aufgabe 3 beschrieben hast.

Füllvorgänge	0	1	10	15	40	100
Wasserstand in cm	3	3,25				

Füllvorgänge	0	1	10	30	40	100
Wasserstand in cm				40	46	

   b) Kann es sein, dass hier Bechergläser befüllt werden? Falls nicht: Um was für Gefäße könnte es sich handeln?
   c) Beschreibe zwei andere Sachverhalte, die sich genauso verhalten.
7. Wir machen in Gedanken ein neues Experiment. Der Anfangswasserstand in einer zylindrischen Regentonne beträgt 4 cm, mit jedem Füllvorgang steigt der Wasserstand um 1,4 cm. Fülle folgende Tabelle aus:

Füllvorgänge	0	1	4	10	40	x
Wasserstand in cm						

   Tipp: Um herauszufinden, was bei x Füllvorgängen berechnet werden muss, überlege dir nochmal genau, was du bei den vorherigen Einträgen gerechnet hast.

Aufgabenblatt 2b: Nach und nach füllt sich das Glas (G-Kurs)

In der letzten Stunde habt ihr eine Wertetabelle erstellt, die zeigt, wie das Wasser in einem Becherglas steigt, wenn man es Schritt für Schritt immer mit der gleichen Menge an Wasser füllt.

1. Vergleicht eure Wertetabelle mit den benachbarten Paaren.
   a) Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede gibt es?
   b) Glaubt ihr, dass ihr alle Werte exakt gemessen habt? Wenn nicht, füllt die folgende Tabelle so aus, wie sie ohne Messfehler aussehen müsste. Was passiert bei jedem Füllvorgang? Beschrifte die Pfeile.

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm											

2. Wie würde es wohl weitergehen? Was wäre der Wasserstand nach den nächsten drei Füllvorgängen?

Füllvorgänge			
Wasserstand in cm			

3. Welche Regelmäßigkeit hast du ausgenutzt? Welche Rolle spielt die Form des Becherglases und welche das Zufüllgefäß (Schnaps- bzw. Sektglas)?
4.
   a) Vervollständige die folgenden Wertetabellen, die bei etwas größeren Bechergläsern entstehen:

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7
Wasserstand in cm	7,2	7,9						

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7
Wasserstand in cm				8,6	9,9			

   b) Angenommen, wir nehmen andere Gefäße als das Becherglas. Bei welchen ließe sich die Wertetabelle nach dem gleichen Prinzip ausfüllen, bei welchen nicht? Begründe.




5. Schau dir erneut deine Wertetabelle oben an, die ihr zusammen erstellt habt.
   a) Berechne *ohne Zwischenschritte*, wie hoch das Wasser nach 20 Füllvorgängen stünde, wenn das Becherglas hoch genug wäre.
   b) Clara hat nicht verstanden, wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist. Erkläre in einem kurzen Brief dein Vorgehen. Du kannst dabei folgende Satzbausteine verwenden:

      Bei jedem Füllvorgang …

      Zwei Füllvorgänge ergeben also …

      Eine beliebige Anzahl von Füllvorgängen lässt sich zusammenfassen, indem …

6.
   a) Vervollständige die folgenden Wertetabellen. Nimm dabei an, dass die Regelmäßigkeit gilt, die du in Aufgabe 3 beschrieben hast.

Füllvorgänge	0	1	10	15	40	100
Wasserstand in cm	1	1,5				

Füllvorgänge	0	1	10	15	40	100
Wasserstand in cm	3	3,25				

Füllvorgänge	0	1	10	30	40	100
Wasserstand in cm				40	46	

   b) Kann es sein, dass hier Bechergläser befüllt werden? Falls nicht: Um was für Gefäße könnte es sich handeln?

Aufgabenblatt 2b: Nach und nach füllt sich das Glas (Lösungen)

In der letzten Stunde habt ihr eine Wertetabelle erstellt, die zeigt, wie das Wasser in einem Becherglas steigt, wenn man es Schritt für Schritt mit der gleichen Menge an Wasser füllt.

1. Vergleicht eure Wertetabelle mit den benachbarten Paaren.
   a) Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede gibt es?

   Alle sollten jeweils mit jedem Füllvorgang den gleichen Zuwachs haben. Die Tabellen unterscheiden sich in Bezug auf die Anfangsfüllstände und die jeweiligen konkreten Zuwächse, wobei sie bei gleichen Zufüllgefäßen ungefähr gleich sein sollten.

   b) Glaubt ihr, dass ihr alle Werte exakt gemessen habt? Wenn nicht, füllt die folgende Tabelle so aus, wie sie ohne Messfehler aussehen müsste.

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm											

2. Wie würde es wohl weitergehen? Was wäre der Wasserstand nach den nächsten drei Füllvorgängen?

Füllvorgänge			
Wasserstand in cm			

3. Welche Regelmäßigkeit hast du ausgenutzt? Welche Rolle spielt die Form des Becherglases und welche das Zufüllgefäß (Schnaps- bzw. Sektglas)?

   Mit jedem Füllvorgang steigt der Wasserstand um den gleichen Wert. Damit dies gilt, muss man jedes Mal das gleiche Zufüllgefäß verwenden und es gleich voll machen. Das Becherglas muss überall den gleichen horizontalen Querschnitt besitzen, darf also nach oben hin nicht enger oder weiter werden.

4.
   a) Vervollständige die folgenden Wertetabellen, die bei etwas größeren Bechergläsern entstehen:

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm	7,2	7,9	8,6	9,3	11,0	11,7	12,4	13,1	13,8	14,5	15,2

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wasserstand in cm	4,7	6,0	7,3	8,6	9,9	11,2	12,5	13,8	15,1	16,4	17,7

b) Angenommen, wir nehmen andere Gefäße als das Becherglas. Bei welchen ließe sich die Wertetabelle nach dem gleichen Prinzip ausfüllen, bei welchen nicht? Begründe.

Denke dir eine passende Geschichte aus und schreibe die entsprechende Wertetabelle auf.

5. Schau dir erneut deine Wertetabelle oben an, die ihr zusammen erstellt habt.
   a) Berechne *ohne Zwischenschritte*, wie hoch das Wasser nach 20 Füllvorgängen stünde, wenn das Becherglas hoch genug wäre.
   b) Clara hat nicht verstanden, wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist. Erkläre in einem kurzen Brief dein Vorgehen. Du kannst dabei folgende Satzbausteine verwenden:

      Bei jedem Füllvorgang …

      Zwei Füllvorgänge ergeben also …

      Eine beliebige Anzahl von Füllvorgängen lässt sich zusammenfassen, indem …

   Bei jedem Füllvorgang steigt der Wasserstand um den gleichen Betrag, zum Beispiel 2 cm. Zwei Füllvorgänge ergeben also 2+2 = 2*2 = 4 cm[1]. Eine beliebige Anzahl von Füllvorgängen lässt sich also zusammenfassen, indem man den Zuwachs pro Füllvorgang mit der Anzahl der Füllvorgänge multipliziert. In unserem Fall hatten wir 7 Füllvorgänge (oder auch eine andere Anzahl) zu berechnen, also haben wir 7 mal unseren Zuwachs gerechnet.

6.
   a) Vervollständige die folgenden Wertetabellen. Nimm dabei an, dass die Regelmäßigkeit gilt, die du in Aufgabe 3 beschrieben hast.

Füllvorgänge	0	1	10	15	40	100
Wasserstand in cm	3	3,25	5,5	6,75	13	28

Füllvorgänge	0	1	10	30	40	100
Wasserstand in cm	22	22,6	28	40	46	82

   b) Kann es sein, dass hier Bechergläser befüllt werden? Falls nicht: Um was für Gefäße könnte es sich handeln?

[1] Nachträgliche Korrektur: Eigentlich müsste hier stehen: „2cm + 2cm = 2*(2cm) = 4cm".

Zumindest bei der zweiten Tabelle handelt es sich um ein wesentlich größeres Gefäß. Es muss aber die beschriebenen Eigenschaften haben, also überall den gleichen Querschnitt besitzen. Es könnte sich um ein Regenfass oder einen Bottich handeln.

c) Beschreibe zwei andere Sachverhalte, die sich genauso verhalten.

7. Wir machen in Gedanken ein neues Experiment. Der Anfangswasserstand in einer zylindrischen Regentonne beträgt 4 cm, mit jedem Füllvorgang steigt der Wasserstand um 1,4 cm. Fülle folgende Tabelle aus:

Füllvorgänge	0	1	4	10	40	x
Wasserstand in cm	4	5,4	9,6	18	60	4 + 1,4*x

Tipp: Um herauszufinden, was bei x Füllvorgängen berechnet werden muss, überlege dir nochmal genau, was du bei den vorherigen Einträgen gerechnet hast.

Aufgabenblatt 3: Der Wasserstand steigt und sinkt

1. Bearbeite *eigenständig* die folgenden Übungsaufgaben:
   a) Die folgenden Tabellen stellen die gleichmäßige Befüllung von Bechergläsern dar. Vervollständige sie. Notiere dabei jeweils auch den Anfangsfüllstand und den Zuwachs pro Füllvorgang.

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	10	11	14	21
Wasserstand in cm		6,9	7,6								

Anfangsfüllstand: Zuwachs pro Füllvorgang:

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	9	13	17	21	23
Wasserstand in cm		7,9		8,5							

Anfangsfüllstand: Zuwachs pro Füllvorgang:

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	17	18	21
Wasserstand in cm								6,1	9,1		

Anfangsfüllstand: Zuwachs pro Füllvorgang:

   b) Notiere die Terme zu den obigen Tabellen.
   c) Fülle die Wertetabelle zu folgendem Term aus, in dem x für die Anzahl der Füllvorgänge steht: $1{,}3 \cdot x + 9{,}1$

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	11	16	41	99
Wasserstand in cm											

2. Lassen sich die folgenden Sachverhalte genauso beschreiben wie das gleichmäßige Befüllen eines Becherglases mit einem bestimmten Anfangsfüllstand? Wieso (nicht)? Worin bestehen Unterschiede?
   a) Nico bekommt zum Geburtstag ein Sparschwein mit 20 Euro. Ab jetzt wirft er jede Woche zwei Euro in das Sparschwein.
   b) Ein anfangs leeres Sektglas, das nach unten hin spitz zuläuft, wird nach und nach mit einem Schnapsglas befüllt. (Das Schnapsglas wird bei jedem Füllvorgang komplett gefüllt.)
   c) Ein anfangs leeres Becherglas wird nach und nach mit einem Schnapsglas befüllt. (Das Schnapsglas wird abwechselnd komplett und nur zur Hälfte gefüllt.)
   d) Bei einem reinen SMS-Tarif zahlt man eine Grundgebühr von 4,95€ und 10 Cent pro SMS.
   e) Das Ehepaar Blatter hat 2007, 2009 und 2011 jeweils ein Kind bekommen.
3. Kai hat – wie ihr auch – nach und nach ein Becherglas befüllt. Nach 12 Füllvorgängen maß er einen Wasserstand von 13,6 cm. Er nimmt nun ein anderes Gefäß und füllt es vollständig mit dem Wasser aus dem Becherglas. Der Wasserstand sinkt dadurch um 3,4 cm.
   a) Wie oft muss er den Vorgang wiederholen, bis das Becherglas leer ist? Erkläre, wie du vorgegangen bist.
   b) Bisher gab es stets einen *Anfangsfüllstand* und einen *gleichmäßigen Zuwachs* bei jedem Füllvorgang, und man konnte den Füllstand nach x Füllvorgängen mit Hilfe eines *Terms* bestimmen. Wie verhält es sich hier?
   c) Beschreibe auch hier den Wasserstand des Becherglases mit Hilfe eines Terms.

Kommentar [W1]: Die SuS sollen die Aufgaben nach der vorangegangenen Diskussion eigenständig bearbeiten, weil nur so den individuellen Prozessen der Subjectification/Objectification Rechnung getragen wird.

Kommentar [W2]: Zur Vervollständigung müssen die SuS die strukturellen Eigenschaften der linearen Zuordnungen nutzen, nämlich den Anfangsfüllstand und den (gleich bleibenden) Zuwachs pro Füllvorgang.
Der Anfangsfüllstand kann durch Rückwärtsarbeiten erschlossen werden.
Ab etwa der Hälfte der Tabelle muss jeweils zusammenfassend gerechnet werden, entweder von einem bekannten Wert aus oder mit Hilfe eines Terms.

Kommentar [W3]: Der Zuwachs kann hier direkt gesehen werden.

Kommentar [W4]: Hier muss der Zuwachs pro Füllvorgang aus dem Zuwachs in zwei Füllvorgängen errechnet werden. Grundlage ist, dass es sich um einen gleichmäßigen Zuwachs handelt.

Kommentar [W5]: Die SuS notieren die Terme. Dabei können sie Diagramme ähnlich wie denen an der Tafel nutzen. Im Idealfall nutzen sie die vorher besonders herausgestellten Größen Anfangsfüllstand und Zuwachs pro Füllvorgang, andernfalls kann dieser Bezug im Nachhinein hergestellt werden.

Kommentar [W6]: Nachdem aus Wertetabellen Terme entwickelt wurden, wird nun der umgekehrte Weg eingeschlagen.
Durch die Wahl der zu berechnen Werte werden die Vorteile von Termen sichtbar.

Kommentar [W7]: Ja. Es gibt einen Startwert von 20€ und einen gleichmäßigen Zuwachs von 2€ pro Woche.

Kommentar [W8]: Nein, wenn man den Füllstand in cm betrachtet, dieser wächst aufgrund des wachsenden Radius immer schwächer.
Ja, wenn man das Volumen betrachtet.

Kommentar [W9]: Nein, weil der Zuwachs nicht gleichmäßig ist.
Ja, falls man den Zuwachs von jeweils zwei Füllvorgängen zusammenfasst. (unwahrscheinlich)

Kommentar [W10]: Ja. Es gibt einen Startwert von 4,95€ und einen Zuwachs von 10ct pro SMS.

Kommentar [W11]: Mehrere Unklarheiten: In welchem Jahr ist der Start anzunehmen, haben die Blatters auch in den anderen Jahren Kinder bekommen, werden sie weiter Kinder bekommen (kann man davon ausgehen?) → in erster Linie eine Diskussionsaufgabe zu den Grenzen von Modellierungen anhand linearer Zuordnungen.

Kommentar [W12]: Wenn man den Vorgang wiederholt, also genau so wieder durchführt, sinkt der Wasserstand wiederum um 3,4 cm. Iterativ, evtl. mit Hilfe einer Tabelle oder direkt, indem man den aktuellen neuen Anfangsfüllstand durch den Verlust pro Entleerungsvorgang dividiert, kommt man auf die Lösung (4).

Kommentar [W13]: Es gibt genau wie bisher einen Anfangsfüllstand. Davon ausgehend sinkt allerdings der Füllstand, aber wiederum gleichmäßig, mit einem bestimmten Verlust (hier sind weitere Begriffe denkbar) pro Entleerungsvorgang. Auch hier kann man den Füllstand nach x Füllvorgängen mit Hilfe eines Terms bestimmen (siehe c).

Kommentar [W14]: Den Term werden die wenigsten SuS ad hoc notieren können. Hier kann ihnen das Diagramm von der Tafel helfen, wo aus dem Zuwachs pro Schritt der zusammengefasste Zuwachs berechnet wird. So ist leicht einsehbar, dass der Term 13,6 – 3,4*x lauten muss.

Aufgabenblatt 4: Lineare Funktionen – mit Wertetabellen und Termen

Bei linearen Funktionen verändern sich die Werte gleichmäßig, sie wachsen oder fallen also gleichmäßig. Ihr habt gelernt, dass man solche Funktionen in Wertetabellen und als Terme darstellen kann.

1. Vervollständige die folgenden Wertetabellen zu linearen Funktionen, die den Wasserstand in einem Becherglas beschreiben. Notiere auch den dazugehörigen Term:

   a)

Vorgänge	0	1	2	3	4	5	10	15
Füllstand in cm	13,1	12,5						

   Term:

   b)

Vorgänge	0	1	2	3	4	5	10	15
Füllstand in cm		13,7		14,9				

   Term:

   c) Vergleiche die beiden Terme. Was ist bei beiden gleich, worin unterscheiden sie sich? Was bedeutet das bezogen auf das Becherglas?

2. Berechne die Werte für die folgenden Terme, um die Wertetabelle auszufüllen. Nutze den Taschenrechner geschickt.

   a) $-3{,}4x+100$

Vorgänge	0	1	2	3	4	5	10	15
Füllstand in cm								

   b) $0{,}4x+12$

Vorgänge	0	1	2	3	4	5	10	15
Füllstand in cm								

3. Tizianos Eltern haben eine Taschengeldkasse, in die sie am Anfang des Jahres 136€ legen. Tiziano bekommt jede Woche 2€ Taschengeld.

   a) Wird das Geld in der Taschengeldkasse für das ganze Jahr reichen? Falls nein, ab wann müssen Tizianos Eltern Geld aus anderen Quellen nehmen? Falls ja, ist noch Geld für ein Weihnachtsgeschenk übrig? Wie viel?

   b) Tiziano spart auf einen MP3-Player und wirft das Taschengeld immer in sein Sparschwein. Dieses ist nicht durchsichtig, er kann also nicht sehen, wie viel Geld er hat. Hilf ihm.

   c) Schätze, in welchem Monat Tiziano sich von seinem Taschengeld einen MP3-Player für 50€ leisten kann. Rechne dann genauer nach.

   d) Erfinde drei Varianten der Geschichte, bei denen sich der Stand der Taschengeldkasse und das Wachstum von Tizianos Geld nicht mehr mit einer linearen Funktionen beschreiben ließe.

Tipp: Du kannst bei diesen Aufgaben sowohl Wertetabellen als auch Terme linearer Funktionen benutzen. Überlege, was günstiger ist.

Kommentar [W1]: Die im Klassenverband erarbeiteten strukturellen Gemeinsamkeiten linearer Funktionen werden ins Gedächtnis gerufen, um im weiteren Handeln zur Verfügung zu stehen.

Kommentar [W2]: Beim Ausfüllen der Wertetabelle ist für die höheren Werte die Benutzung des jeweiligen Terms hilfreich, falls die Ausrichtung auf die algebraische Struktur noch nicht stattgefunden hat, wird sie hier angeregt. Diese können sich die SuS wie in den Aufgaben auf dem letzten Aufgabenblatt erschließen. Alternativ kann das durch die Aufgabe gestellte Ziel auch schrittweise erreicht werden, es ist aber mühsamer, die Erschließung des Motivs ist also naheliegend.

Kommentar [W3]: siehe c)

Kommentar [W4]: Beim Notieren der Terme wird sichtbar, dass beide Funktionen den gleichen Anfangsstand haben. Desweiteren ist die Steigung bis auf das Vorzeichen gleich. Dies unterstützt eine bestimmte Sichtweise auf das Objekt, dass sich nämlich wachsende und fallende lineare Funktionen als strukturell gleich auffassen lassen. Dennoch lassen sich damit grundlegend verschiedene Phänomene beschreiben, wie der Rückbezug auf das Becherglas zeigt.

Kommentar [W5]: Die SuS nutzen die Terme als eine einfache Möglichkeit, die Werte einer Funktion zu berechnen. Dabei wird auch geübt, die immer gleiche Struktur bei der Eingabe in den Taschenrechner zu nutzen.

Kommentar [W6]: Wenn man von 52 Wochen ausgeht, sind am Ende 32€ für ein Weihnachtsgeschenk übrig. Dies lässt sich mit Hilfe des Terms (-52*2+136) berechnen, aber auch anhand einer Tabelle. Es kommt die Möglichkeit in den Blick, dass die Werte auch unter 0 fallen könnten.

Kommentar [W7]: Die SuS können hier eine der beiden bisher bekannten Darstellungsformen wählen und müssen ihren praktischen Nutzen für die geforderte Modellierung (bezüglich Nachvollziehbarkeit, Einfachheit der Rechnung) darstellen.

Kommentar [W8]: Die SuS sollen ihren Blick auf strukturelle Eigenschaften linearer Zuordnungen schulen. Wenn sie beispielsweise erkannt haben, dass Tizianos Eltern ihm bis zum Ende des Jahres 104€ Taschengeld gegeben haben, lässt sich folgern, dass er sich den MP3-P ... [1]

Kommentar [W9]: Mit Hilfe eines Terms oder einer Wertetabelle kann man exakt berechnen, wann es soweit ist.

Kommentar [W10]: Die SuS sollen kritisch im Umgang mit Modellierungen werden und erkennen, dass lineare Funktionen nicht immer zur Abbildung realer Sachverhalte geeignet sind. Es gibt eine Fülle nichtlinearer Vorgänge.

Seite 1: [1] Kommentar [W8] **Windows-Benutzer** **19.04.2012 10:15:00**

Die SuS sollen ihren Blick auf strukturelle Eigenschaften linearer Zuordnungen schulen. Wenn sie beispielsweise erkannt haben, dass Tizianos Eltern ihm bis zum Ende des Jahres 104€ Taschengeld gegeben haben, lässt sich folgern, dass er sich den MP3-Player kurz vor Jahresmitte, also im Juni, leisten kann.

Übungsblatt für die Woche vom 16. bis 20. April

Ihr dürft die Aufgaben zusammen bearbeiten; die Reihenfolge spielt keine Rolle.

1. Vervollständige die folgenden Tabellen, die die gleichmäßige Befüllung von Bechergläsern darstellen.
   a)

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm		7		8						

   b)

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	10	20	30	40
Wasserstand in cm	3,1	3,6								

   c)

Füllvorgänge	0	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Wasserstand in cm	2,4	14,4								

2. Vervollständige die Wertetabellen anhand der gegebenen Angaben zu Anfangsfüllstand und Zuwachs.
   a) Anfangsfüllstand: 6,5 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,5 cm

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm										

   b) Anfangsfüllstand: 0 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	10	20	30	40	50
Wasserstand in cm										

   c) Anfangsfüllstand: 4,5 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm

Füllvorgänge	0	10	20	30	40	55	61	76	108	110
Wasserstand in cm										

3. Notiere die Terme zu folgenden Tabellen (vervollständige sie wenn nötig):
   a)

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm	3,1	3,4	3,7	4,0						

   b)

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm		4,7		5,1						

   c)

Füllvorgänge	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Wasserstand in cm			17,6	23,6						

4. Wie lauten die Terme, wenn Anfangsfüllstand und Zuwachs pro Füllvorgang folgende Werte haben:
   a) Anfangsfüllstand: 4,5 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm
   b) Anfangsfüllstand: 0 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm
   c) Anfangsfüllstand: 5,6 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,6 cm

5. Erfinde Sachverhalte, die sich genauso beschreiben ließen wie die bisherigen Füllvorgänge bei den Bechergläsern.
6. Finde Sachverhalte, bei denen dies nicht genau so funktioniert und beschreibe, worin der Unterschied besteht.

Übungsblatt für die Woche vom 16. bis 20. April - Lösungen

Ihr dürft die Aufgaben zusammen bearbeiten; die Reihenfolge spielt keine Rolle.

1. Vervollständige die folgenden Tabellen, die die gleichmäßige Befüllung von Bechergläsern darstellen.
   a) Term: 0,5x + 6,5

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11

   b) Term: 0,5x + 3,1

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	10	20	30	40
Wasserstand in cm	3,1	3,6	4,1	4,6	5,1	5,6	8,1	13,1	18,1	23,1

   c) Term: 0,6x + 2,4

Füllvorgänge	0	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Wasserstand in cm	2,4	14,4	15	15,6	16,2	16,8	17,4	18	18,6	19,2

2. Vervollständige die Wertetabellen anhand der gegebenen Angaben zu Anfangsfüllstand und Zuwachs.
   a) Anfangsfüllstand: 6,5 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,5 cm
   Term: 0,5x + 6,5 (wie 1a))

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11

   b) Anfangsfüllstand: 0 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm
   Term: 0,2x (+0)

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	10	20	30	40	50
Wasserstand in cm	0	0,2	0,4	0,6	0,8	2	4	6	8	10

   c) Anfangsfüllstand: 4,5 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm
   Term: 0,2x + 4,5

Füllvorgänge	0	10	20	30	40	55	61	76	108	110
Wasserstand in cm	4,5	6,5	8,5	10,5	12,5	15,5	16,7	19,7	26,1	16,5

3. Notiere die Terme zu folgenden Tabellen (vervollständige sie wenn nötig):
   a) Term: 0,3x + 3,1

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm	3,1	3,4	3,7	4,0						

   b) Term: 0,2x + 4,5

Füllvorgänge	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserstand in cm	4,5	4,7	4,9	5,1						

   c) Term: 0,6x +5,6

Füllvorgänge	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Wasserstand in cm	5,6	11,6	17,6	23,6						

4. Wie lauten die Terme, wenn Anfangsfüllstand und Zuwachs pro Füllvorgang folgende Werte haben:
    a) Anfangsfüllstand: 4,5 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm
       Term: 0,2x + 4,5 (wie 3b))
    b) Anfangsfüllstand: 0 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,2 cm
       Term: 0,2x (+0) (wie 2b))
    c) Anfangsfüllstand: 5,6 cm Zuwachs pro Füllvorgang: 0,6 cm
       Term: 0,6x + 5,6 (wie 3c))
5. Erfinde Sachverhalte, die sich genauso beschreiben ließen wie die bisherigen Füllvorgänge bei den Bechergläsern. → Besprechung in der Klasse
6. Finde Sachverhalte, bei denen dies nicht genau so funktioniert und beschreibe, worin der Unterschied besteht. → Besprechung in der Klasse

Aufgabenblatt 5: Lineare Zuordnungen – nicht mehr nur schrittweise

Lineare Zuordnungen, bei denen nicht eine schrittweise, sondern eine stetige Veränderung stattfindet, kann man mit einem Graphen veranschaulichen. Dieser ist stets eine Gerade oder eine Strecke.

1. Im Folgenden werden lineare Zuordnungen, die das gleichmäßige Steigen oder Fallen eines Wasserstands beschreiben, auf verschiedene Weisen dargestellt. Zeichne jeweils den dazugehörigen Graphen.
   a) Die Zuordnung hat folgende Wertetabelle:

Zeit in Sekunden	0	1	2	3	4	5	10
Füllstand in cm	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	7,5

   b) Der Term der Zuordnung lautet: -0,5x+10
   c) Frau Brandt sprengt mit Hilfe einer Pumpe ihren Garten mit Wasser aus der Regentonne. Sie liest ab, dass der Wasserstand nach zehn Minuten von 90 cm auf 65 cm gesunken ist.

   Beschreibe die Graphen, die du gezeichnet hast. Fasse schließlich zusammen, welche Merkmale du bei allen deinen Beschreibungen genutzt hast.
2. Bei zwei quaderförmigen Schwimmbecken wird gleichzeitig damit begonnen, das Wasser gleichmäßig abzupumpen. In dem einen ist das Wasser am Anfang zwei Meter tief, nach einer Minute ist der Wasserstand um 7 cm gesunken. Das andere Becken ist 3 Meter tief, nach zehn Minuten ist es halb leer.
   a) Zeichne die Graphen zu den beiden Schwimmbecken in ein Koordinatensystem.
   b) Welches Schwimmbecken ist zuerst leer?
   c) Die beiden Graphen schneiden sich. Was bedeutet das für den Füllstand der beiden Schwimmbecken zu diesem Zeitpunkt?
3. Wir haben anfangs mit einzelnen, gleichbleibenden Füll-/Entleerungsvorgängen gearbeitet und diese dann durch einen konstanten Wasserstrahl ersetzt. Ist dies bei allen bisher betrachteten Sachverhalten möglich?
   a) Spar- und Ausgabenpläne
   b) SMS-Kosten
   c) Telefonkosten (ebenso Stromkosten)
   d) Was ist mit einer Kerze die abbrennt, einem Weg der zurückgelegt wird?

Überlege: Wie müssen Sachverhalte beschaffen sein, damit man sie durch eine stetige lineare Zuordnung beschreiben kann? In welchen Fällen ist nur eine schrittweise Beschreibung möglich? Ist es manchmal sinnvoll, einen stetigen Verlauf anzunehmen, obwohl das gar nicht der Wirklichkeit entspricht?

Kommentar [W1]: Die im Klassenverband erarbeitete Darstellungsform stetiger linearer Funktionen wird ins Gedächtnis gerufen, um im weiteren Handeln zur Verfügung zu stehen.
Es kann nun allgemein von linearen Funktionen geredet werden, die SuS sollen damit die strukturellen Merkmale verbinden, die sie in den vergangenen Stunden kennengelernt haben.

Kommentar [W2]: Die SuS sehen, dass sich alle bisher bekannten Darstellungsformen linearer Funktionen in Graphen übersetzen lassen, wenn man eine durchgehend gleichbleibende Veränderung annimmt.

Kommentar [W3]: Die Schüler sehen, dass die zuvor auch bei Wertetabellen und Termen relevanten strukturellen Merkmale auch hier von Bedeutung sind. Außerdem entsteht das Bedürfnis, die Steigung zu beschreiben. Vielleicht beziehen sich die Schüler hier schon auf den Steigungsbegriff wie zuvor eingeführt, ansonsten findet dies hierauf aufbauend in der Klassendiskussion statt.

Kommentar [W4]: Die SuS lernen, im Graphen für die dargestellten Sachverhalte relevante Punkte zu erkennen und zu interpretieren. Hier müssen sie erkennen, dass das Schwimmbecken dann leer ist, wenn der Graph die x-Achse erreicht.

Kommentar [W5]: wie b). Der Schnittpunkt wird als der Punkt interpretiert, in dem beide Schwimmbecken den gleichen Wasserstand haben.

Kommentar [W6]: Nicht alle Sachverhalte sind geeignet, sie durch durchgehende Graphen zu beschreiben. Notwendige Voraussetzung ist, dass sich sowohl die abhängige als auch die unabhängige Größe auf einer durchgängigen Skala beschreiben lassen.

Kommentar [W7]: Nicht möglich, da das Zurücklegen von Geld immer punktuell stattfindet.

Kommentar [W8]: Nicht möglich, da stets Kosten pro SMS berechnet werden.

Kommentar [W9]: Es ist theoretisch eine beliebig genaue Messung der Zeit/des Stromverbrauchs möglich, ebenso eine beliebig präzise Angabe der Kosten. De fakto wird aber nicht präziser als in Sekunden/kWh gemessen, und der Betrag wird auf Cent gerundet.

Kommentar [W10]: Wegstrecken und Zeiten sind gut geeignet, als durchgehend aufgefasst zu werden.

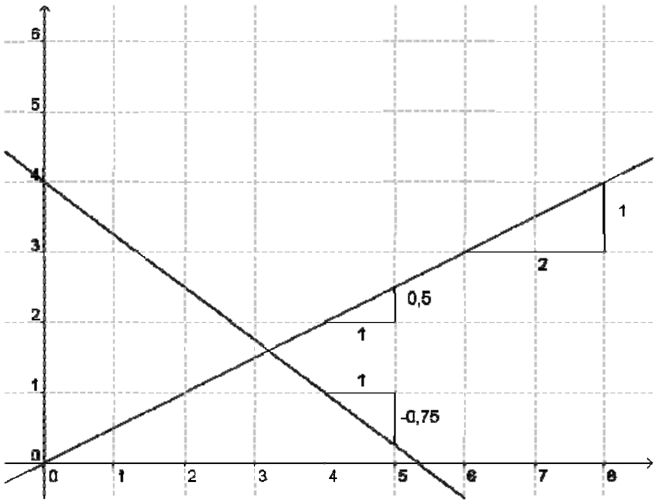
Kommentar [W11]: Die SuS untersuchen, welche Bedingungen gegeben sein müssen. Die Möglichkeit, dass ein durchgehender Verlauf als Modellierung (bei c)) legitim sein kann, wird reflektiert. Im Anschluss Klassendiskussion.

Definition: Lineare Zuordnungen

"Mit Wertetabellen und Termen kann man **Zuordnungen** beschreiben, bei denen eine Größe (beispielsweise der Wasserstand) einer anderen (Anzahl der Füllvorgänge, Zeit) zugeordnet wird. Wenn die Veränderung gleichbleibend ist, spricht man von einer **linearen Zuordnung**. Wenn sich beide Größen nicht schrittweise, sondern stetig verändern, kann man einen **Graphen** zeichnen. Der **Graph einer linearen Zuordnung** ist stets eine Gerade oder eine Strecke."

Aufgabenblatt 6: Steigungen linearer Zuordnungen

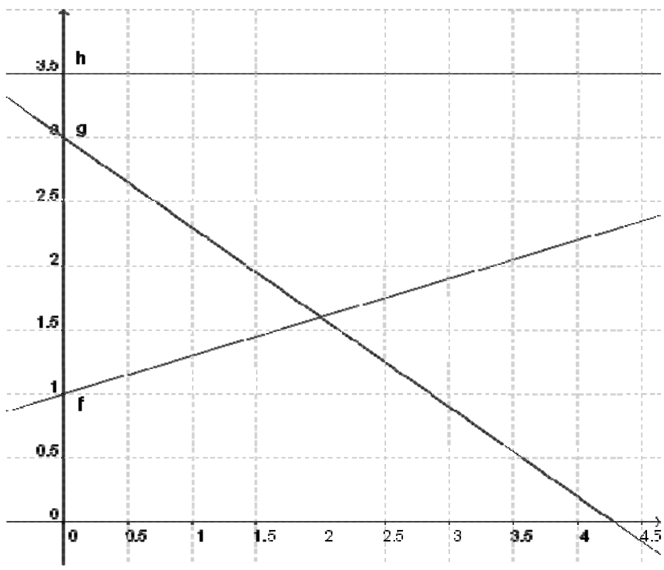
Der Graph einer linearen Zuordnung ist stets eine Gerade oder eine Strecke. Deren Steigung kann man mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen.



$$\text{Steigung} = \frac{\text{Veränderung in y-Richtung}}{\text{Veränderung in x-Richtung}}$$

Dabei muss man beachten, in welche Richtung (positiv oder negativ) sich die beiden Größen verändern.

1. Ist die Steigung von der Graphen von f, g und h positiv oder negativ? Was könnte durch den Graphen von h dargestellt werden?



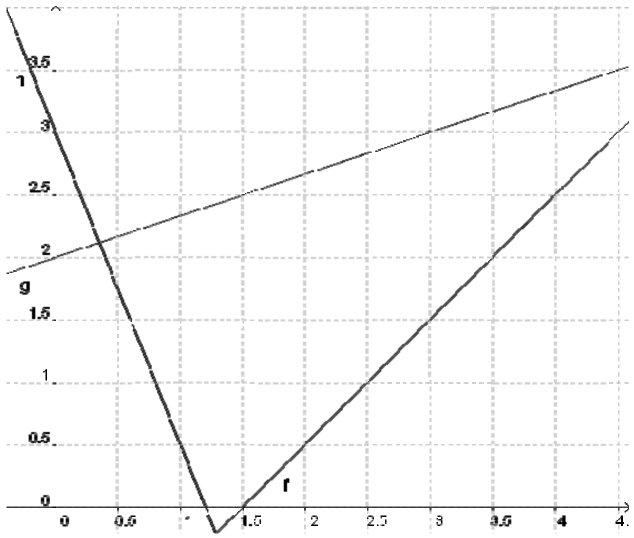
Kommentar [W1]: Die in der vorangegangenen Stunde erarbeitete Definition der Steigung und der Begriff des Steigungsdreiecks wird ins Gedächtnis gerufen, um im weiteren Handeln zur Verfügung zu stehen.

Kommentar [W2]: Die Formel und die Erläuterung lässt sich anhand der eingezeichneten Steigungsdreiecke nachvollziehen.
Die Steigung ist ein zentraler Begriff, der hilft, strukturell gleiches in seiner Verschiedenheit zu beschreiben. Dies wird im vorliegenden Arbeitsblatt anhand verschiedener Beispiele geübt.

Kommentar [W3]: Die SuS sollen sich zunächst ohne konkrete Rechnungen klar machen, was die Steigung für den Verlauf des Graphen bedeutet und wie sie typischerweise in Graphen sichtbar wird. Bereits bekannt sein sollte, dass fallende Graphen eine negative, steigende eine positive Steigung haben. Ansonsten lässt es sich mit Hilfe der Hinweise am Anfang des Blattes herleiten.
Der Graph zu h ist insofern ein bisher nicht behandelter Sonderfall, als dass er die Steigung 0 hat. Hier hilft das Steigungsdreieck, letztlich kann man aber auch hier auf die die bisherigen Erfahrungen zurückgreifen.

Kommentar [W4]: Da bisher keine linearen Zuordnungen mit Steigung 0 vorkamen, wird hier der Zusammenhang zu Anwendungen hergestellt. Steigung 0 bedeutet keine Veränderung, also Konstanz. Für die SuS naheliegende Beispiele sind ein unveränderter Wasserstand in einem Reservoir oder einer Wasserleitung oder ein unangetasteter Geldschatz.

2. Bestimme die Steigung der abgebildeten Graphen. Gib wenn möglich den kompletten Term der dazugehörigen Zuordnungen an.



3. Ist es egal, wie *groß* das Steigungsdreieck ist und *wo* man es anlegt? Wie ist es besonders günstig? Warum?
4. Zeichne drei Geraden mit der Steigung 0,5 in ein Koordinatensystem.
5. Unten siehst du drei Terme linearer Zuordnungen. Zeichne ihre Graphen in ein Koordinatensystem, ohne eine Wertetabelle zu verwenden.
   a) 0,5x + 3
   b) x - 1
   c) -0,75x + 4
6. Wie kann man aus einer Wertetabelle einer linearen Zuordnung mit nur zwei Einträgen die Steigung ablesen?

Zeit in Sekunden	2	7
Weg in Metern	5	9,5

Tipp: Vielleicht hilft es, wenn du erst den Graphen zeichnest.

Kommentar [W5]: Die Steigung für f ist wahrscheinlich für alle leicht zu ermitteln. Bei g und h muss man das Steigungsdreieck geschickt legen. Die Aufgabe dient insofern einer Vorbereitung auf Aufgabe 3.
Der Term lässt sich für die meisten SuS wahrscheinlich nur bei den Graphen bestimmen, bei denen der y-Achsenabschnitt sichtbar ist, also bei g und h.
Die SuS erkennen, dass die im Term etablierte Struktur sich (bei geeignetem Korrdinatensystem) auch im Graphen zeigt.

Kommentar [W6]: Der praktische Einsatz der Steigungsdreiecks wird kritisch reflektiert.
Es sollte schon aus der Zeichnung oben klar geworden sein, dass man mit beliebigen Steigungsdreiecken die Steigung ermitteln kann. Als Begründung dienen Verhältnisgleichheit und die aus den Wertetabellen bekannte gleiche Veränderung in gleichen Schritten.
Es ist aber in jedem Fall günstig, das Steigungsdreieck so anzulegen, dass die Seitenlängen in beiden Richtungen gut ablesbar sind. Im Idealfall wählt man dabei in x-Richtung die Länge 1, dann kann man die Steigung direkt in y-Richtung ablesen.

Kommentar [W7]: Die Steigung sagt nichts über die Lage einer Gerade aus. Geraden mit der Gleichung sind zueinander parallel.

Kommentar [W8]: Die SuS können hier Steigungsdreiecke nutzen, um neben dem Startwert einen weiteren Wert zu bestimmen, der das Zeichnen der Geraden ermöglicht. Das ist für einige sicher einfacher als die Berechnung eines weiteren Werts mit Hilfe des Terms.
Wie in Aufgabe 2 wird hier die Struktur linearer Funktionen betont, indem sie in unterschiedlichen Darstellungen zeigt und genutzt wird.

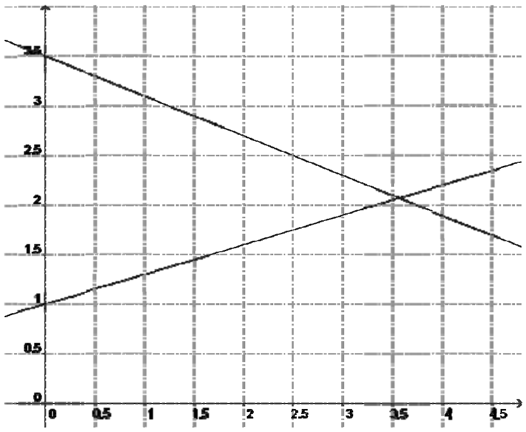
Kommentar [W9]: Die SuS haben bereits vorher die Veränderung aus weiter auseinanderliegenden Werten errechnet. Entweder sie beziehen sich darauf und berechnen entsprechend die Steigung, oder sie nehmen den Graph als Visualisierung, in dem sich der Quotient der Veränderungen in den beiden Koordinaten am Steigungsdreieck ablesen lässt. Diese beiden Möglichkeiten stützen die Sicht auf die strukturelle Gleichheit linearer Zusammenhänge.

Zeit in Minuten	0	0,5	1	1,5	2	5	10
Weg in Kilometern	1	1,15	1,3	1,45	1,6	2,5	4

Zeit in Sekunden	0	0,5	1	1,5	2	3	5
Wasserstand in cm	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,3	1,5

$0{,}3\,x + 1$

$-0{,}4x + 3{,}5$



Wertetabelle

Term

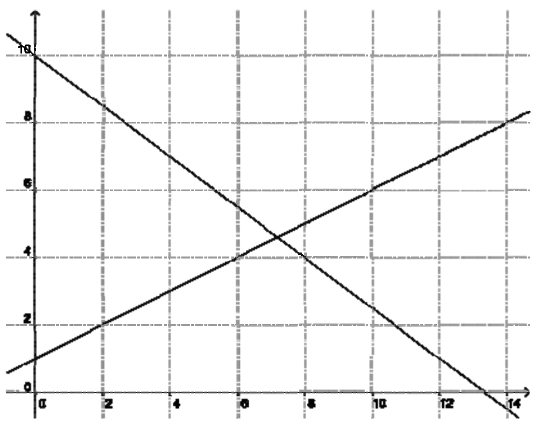
Graph

Wie erkennt man die

Steigung?

Wie erkennt man den

Anfangswert?



Zwei Graphen schneiden sich.

Wie bestimmt man den Schnittpunkt in einer Wertetabelle, in einem Term und mit einem Graphen?

In einem Eimer steht zu Beginn 2,3 Zentimeter hoch Wasser. Nun wird das Becherglas unter einen laufenden Wasserhahn gehalten. Nach einer Minute ist der Wasserstand um zweieinhalb Zentimeter gestiegen.

Beschreibe die Situation in einer Wertetabelle, in einem Term und (falls möglich) mit einem Graphen. Wie kann man jeweils bestimmte Werte (z. B. den Wasserstand nach 4 Minuten) ablesen?

In einem Becherglas steht 12,3 cm hoch Wasser. Nun wird schrittweise Wasser abgegossen. Bei jedem Vorgang sinkt der Wasserstand um einen halben Zentimeter.	Beschreibe die Situation in einer Wertetabelle, in einem Term und (falls möglich) mit einem Graphen. Wie kann man jeweils bestimmte Werte (z. B. den Wasserstand nach drei mal Abgießen) ablesen?

Aufgabenblatt 7: Was passiert mit dem Graphen, wenn …

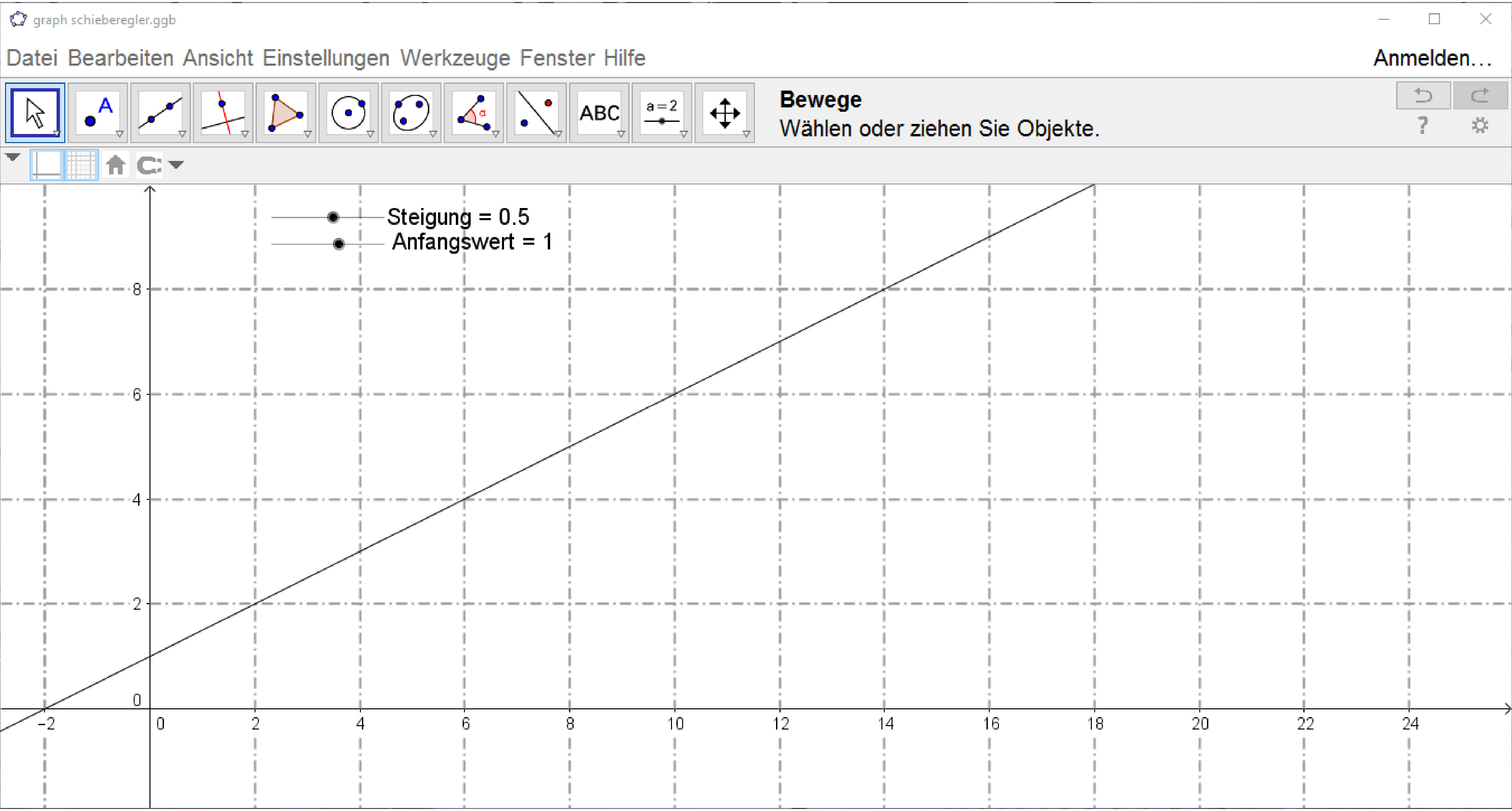
An der Wand siehst du den Graphen einer linearen Zuordnung mit der Steigung 0,5 und dem Anfangswert 1.
Was passiert mit dem Graphen, wenn …

… man den Anfangswert erhöht?

… man den Anfangswert verringert?

… man die Steigung erhöht?

… man die Steigung verringert? Was passiert, wenn die Steigung unter 0 sinkt?


graph schieberegler.ggb
Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe
Anmelden...
ABC
a = 2
Bewege
Wählen oder ziehen Sie Objekte.
Steigung = 0.5
Anfangswert = 1
8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Übungsblatt für die Klassenarbeit (E-Kurs und G-Kurs)

1. Fülle die Wertetabellen zu den folgenden Termen aus.
   a) -3x + 12,4

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5
Wert								

   b) 5x - 1

x	0	1	2	3	4	5	10	15
Wert								

   c) 1,5x +2,3

x	0	1	2	3	4	5	10	15
Wert								

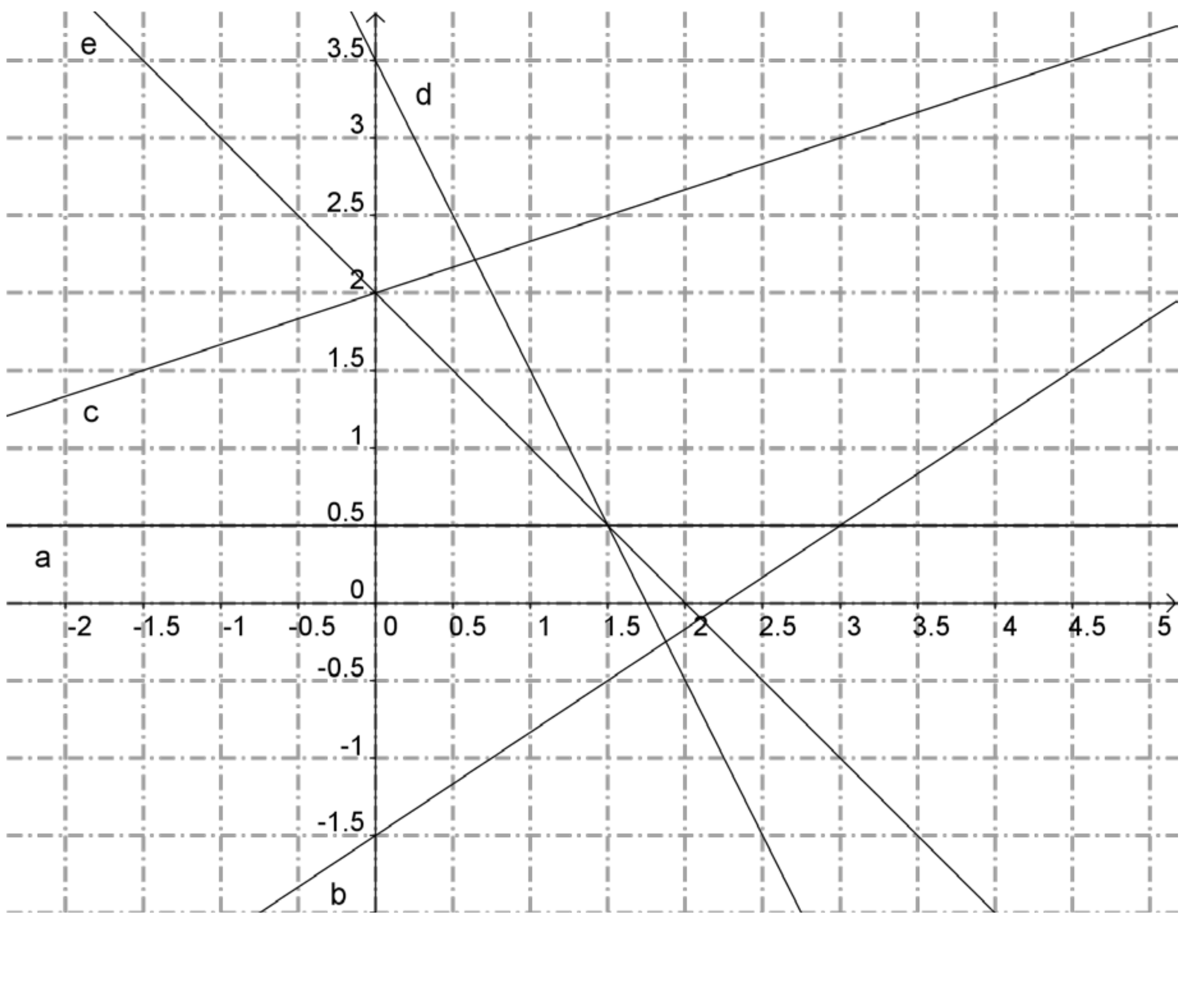
   d) ½ x +3

x	0	0,5	1	2	4	10	20	40
Wert								

   e) -0,5x +17

x	0	1	2	3	4	5	7,5	10
Wert								

2. Bestimme die Steigungen der Graphen, indem du Steigungsdreiecke einzeichnest.



Lösungen zum Übungsblatt für die Klassenarbeit (E-Kurs und G-Kurs)

1. Fülle die Wertetabellen zu den folgenden Termen aus.

   a) -3x + 12,4

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5
Wert	12,4	10,9	9,4	7,9	6,4	4,9	3,4	-2,6

   b) 5x - 1

x	0	1	2	3	4	5	10	15
Wert	-1	4	9	14	19	24	49	74

   c) 1,5x +2,3

x	0	1	2	3	4	5	10	15
Wert	2,3	3,8	5,3	6,8	8,3	9,8	17,3	24,8

   d) ½ x +3

x	0	0,5	1	2	4	10	20	40
Wert	3	3,25	3,5	4	5	8	13	23

   e) -0,5x +17

x	0	1	2	3	4	5	7,5	10
Wert	17	16,5	16	15,5	15	14,5	13,25	12

2. Bestimme die Steigungen der Graphen, indem du Steigungsdreiecke einzeichnest.

   a: 0
   b: 2/3 bzw. 0,66…
   c: 1/3 bzw. 0,33…
   d: -2
   e: -1

Übungsblatt für die Klassenarbeit (E-Kurs)

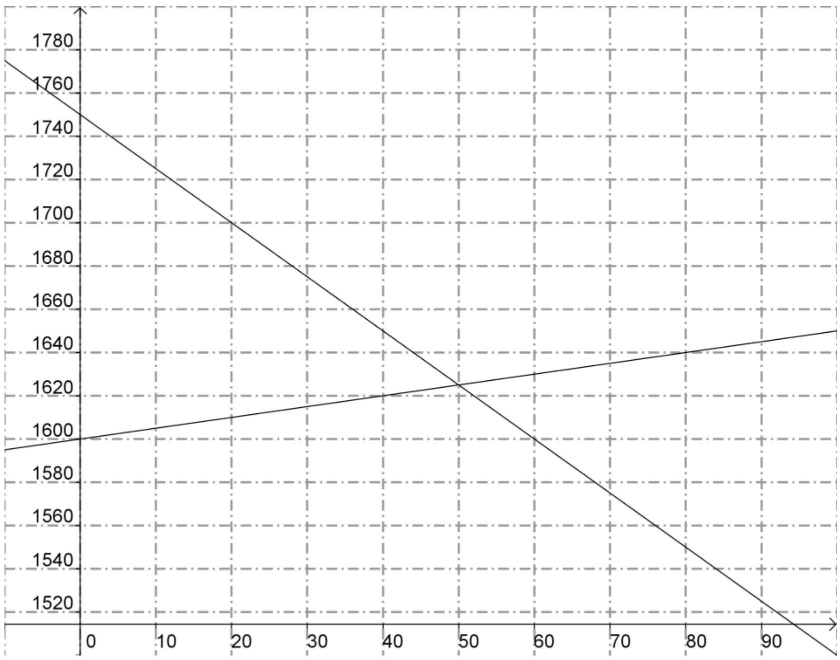
Familie Angerer ist im Skiurlaub. Die Eltern haben an der Talstation auf 1600m noch einen Kaffee getrunken, während die Kinder schon an den 150 Meter höher gelegenen Start der Piste gefahren sind. Die Fahrt mit dem Skilift hat 5 Minuten gedauert. Die Eltern fahren genau in dem Moment unten los, in dem die Kinder sich die Piste herunterstürzen. Die Abfahrt dauert eine Minute. Nach wie viel Sekunden treffen sich die Eltern und die Kinder?

Tipp: Zeichne zunächst die beiden Graphen, die die Höhe der Eltern bzw. der Kinder beschreiben.

Lösungen zum Übungsblatt für die Klassenarbeit (E-Kurs)

Man kann den Graphen zeichnen, indem man die bekannten Werte in das Koordinatensystem einzeichnet und verbindet. Da am Ende die Zeit in Sekunden gefragt ist, sollte man von Anfang an in Sekunden rechnen.

Die Eltern sind zum Zeitpunkt 0 auf 1600 Meter Höhe, die Kinder auf 1750. Die Eltern sind nach 5 Minuten oder 300 Sekunden auf 1750 Metern Höhe, die Kinder nach einer Minute bzw. 60 Sekunden auf 1600 Metern. Der Bereich zwischen 0 und 1600 Metern ist uninteressant, darum lassen wir ihn weg.



Man sieht, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem die Eltern und die Kinder auf der gleichen Höhe sind. Um ihn exakt auszurechnen, brauchen wir die Terme der Zuordnungen.

Die Anfangswerte kennen wir schon. Mit Steigungsdreiecken bestimmt man die Steigungen. Bei den Eltern beträgt sie 0,5, bei den Kindern -2,5. (Wenn ihr in Minuten gerechnet habt, kommt ihr auf die Steigungen 30 und -150.)

Die Terme kann man nun gleichsetzen und die lineare Gleichung lösen:

$$0{,}5x + 1600 = -2{,}5x + 1750$$

$$x = 50$$

Die Eltern und die Kinder treffen sich also nach 50 Sekunden. (Das sind 5/6 bzw. 0,833... Minuten – wenn ihr das ausgerechnet habt, müsst ihr noch umrechnen.)

Man kann noch ausrechnen, auf welcher Höhe die Eltern und die Kinder sich treffen, indem man die Anzahl der Sekunden in einen der beiden Terme einsetzt. Sie treffen sich auf einer Höhe von 1625 Metern.

B. Überblick über die Datenlage

Die Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen umfasste 14, die zu linearen Funktionen 13 Termine. Regulär fand der Unterricht zweimal wöchentlich in einer Einzelstunde (45 Minuten) statt, einmal wöchentlich (montags) in einer Doppelstunde (90 Minuten), wobei es gelegentlich aus verschiedenen Gründen zu Abweichungen von diesem Schema kam. Die Gesamtzeit des durchgeführten Unterrichts in der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen betrug etwa 915 Minuten, in der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen 840 Minuten. Der Unterricht wurde jeweils mit drei Kameras gefilmt, auf ihre jeweilige Aufgabenstellung wird in Anhang C eingegangen. In fünf Fällen – es waren jeweils Aufnahmen der beobachteten Schülerinnen und Schüler betroffen – kam es der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen zu technischen Problemen mit einer der Kameras oder der dazugehörigen Tonaufnahme, die dazu führten, dass hier keine brauchbaren Daten vorliegen.

In jeder Stunde wurde ein Beobachtungsprotokoll geführt. Standardmäßig wurde darin vermerkt, welche Schülerinnen und Schüler abwesend waren und welche weiteren Besonderheiten auftraten. Ansonsten wurde situationsabhängig dokumentiert, welche subjektiven Eindrücke bei der unmittelbaren Beobachtung entstanden. Diese Notizen flossen hauptsächlich in die laufenden Unterredungen mit der Lehrkraft ein, in denen es galt, erste Eindrücke zu evaluieren und den Fokus für das weitere Handeln auszurichten.

Es liegen die Scans aller Mappen vor, wobei die Sorgfalt, mit der diese geführt wurden, stark variiert. Die Mappen der Schülerinnen und Schüler, deren Lernprozess beschrieben werden soll, sind jedoch weitgehend komplett.

Die Tafelbilder wurden wie bereits weiter oben erwähnt vollständig erfasst und in der Analysesoftware jeweils den Videos zugeordnet. Sie wurden bei den Analysen immer dann hinzugezogen, wenn in den analysierten Szenen an der Tafel gearbeitet oder sich auf dort festgehaltene Inhalte bezogen wurde.

Die Klassenarbeiten, die zu jedem der drei Themen geschrieben wurden, konnten aufgrund mit der Studie nicht vereinbarer schulinterner Absprachen nicht als Teil der Studie entwickelt werden. Sie entsprechen daher auch nicht den Anforderungen, die eine eingehende Analyse in diesem Rahmen stellen würde. Dennoch wurden die Arbeiten eingescannt, um gegebenenfalls darauf zurückgreifen zu können.

Neben den Dokumenten des Unterrichts liegen die Audiomitschnitte von den Planungstreffen mit der Lehrerin vor. Ab der ersten durchgeführten Unterrichtsstunde wurden zudem teilstandardisierte Protokolle geführt. Es liegen Daten von insgesamt 23 Treffen vor, wobei in einem Fall die Tonaufzeichnung versagte.

C. Zum Verständnis der Transkripte

Bezeichnung und Zuordnung der Transkripte

Die in der vorliegenden Arbeit eingebundenen Transkripte umfassen, sofern sie nicht als Auszug gekennzeichnet sind, jeweils komplette Episoden, also Abschnitte, denen bei der Strukturierung der Daten (vgl. Abschnitt 4.4.1) die gleichen Codes zugewiesen wurden, oder sogar eine Abfolge solcher Abschnitte. Sie weisen jeweils eine Kurzbezeichnung auf, die sich aus dem Datum der Aufnahme (JJMMTT, zum Beispiel 111205 für den 5. Dezember 2011), der Nummer der Kamera, mit der die zugrundeliegenden Daten erhoben wurde (siehe Abbildung C.1 und C.2, zum Beispiel 3), der Unterrichtsstunde (zum Beispiel für die erste Stunde der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen LG1[1]) und der vom Analyseprogramm vergebenen Nummer der Kodierung(en) sowie gegebenenfalls einer Zahl für den Unterabschnitt (zum Beispiel 44-59_4 für den vierten Unterabschnitt in einer aus den Kodierungen 44 bis 59 bestehenden Transkripteinheit). Aus den angegebenen Beispieldaten ergäbe sich insgesamt die Bezeichnung 111205_3_LG1_44-59_4. Da diese Kurzbezeichnung noch nichts über den Inhalt aussagt, wurde bei den eingebundenen Transkripten jeweils ein kurzes Motto hinzugefügt.

Wie in den beiden Abbildungen zu erkennen ist, lieferte Kamera 1 einen Überblick über das Gesamtgeschehen im Klassenraum. Mit Kamera 2 wurden Herbert und Sabine beobachtet und Kamera 3 war auf Katie und Ahmed gerichtet. In bestimmten Ausnahmefällen, vor allem in Gruppenarbeitsphasen, wurden Tische umgestellt und die Schülerinnen und Schüler verließen ihre angestammten Plätze. Die Aufgabenverteilung der Kameras blieb jedoch unverändert.

Transkriptionsschlüssel

Bei der Transkription wurde der in Tabelle C.1 dargestellte Transkriptionsschlüssel verwendet. Die angefertigten Transkripte sind sprachlich ungeglättet, allerdings auch keine reinen Lauttranskriptionen. Es wurde also insofern interpretiert, als dass als solche erkennbare deutsche Wörter (sowie englische und jugendsprachliche Ausdrücke) in ihrer üblichen Schreibweise ausgeschrieben wurden. Zusammengebundene Wörter sind ohne die üblichen Apostrophe und zusammen geschrieben (beispielsweise „wenns klappt"). Unvollständig oder undeutlich ausgesprochene Worte wurden nicht ergänzt, daher fehlt aufgrund des lokalen Dialekts häufig die letzte Silbe („kein" statt „keinen", „Seitn" statt „Seiten"). Auch

[1] Für die Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen wurde das Kürzel LZ vergeben, da im Unterricht wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben die Bezeichnung „lineare Zuordnungen" vorherrschte.

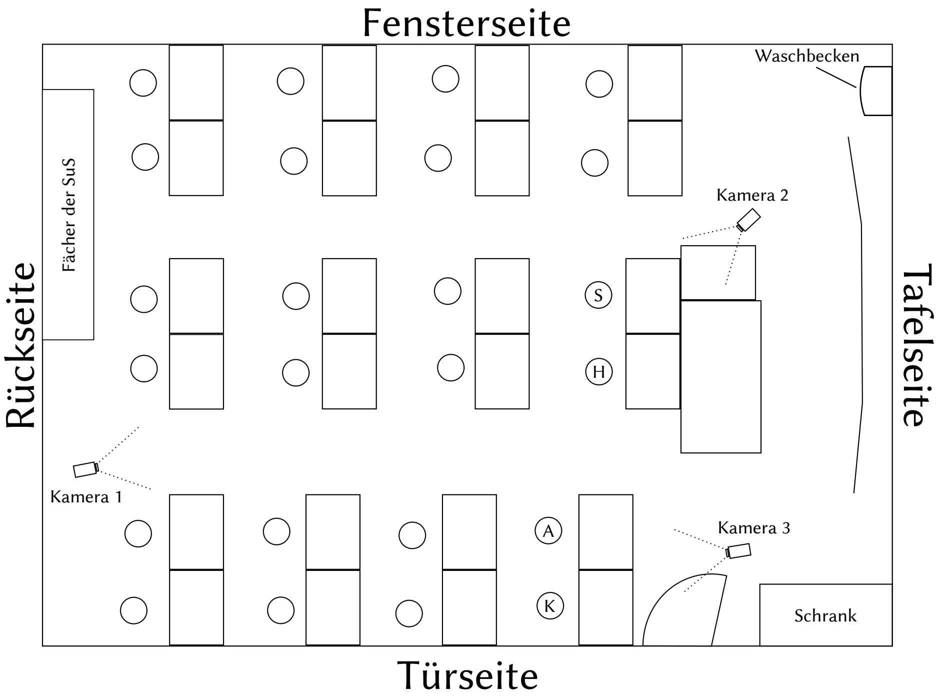


Abbildung C.1.: Schmeatische Darstellung des Aufbaus im Klassenraum während der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen

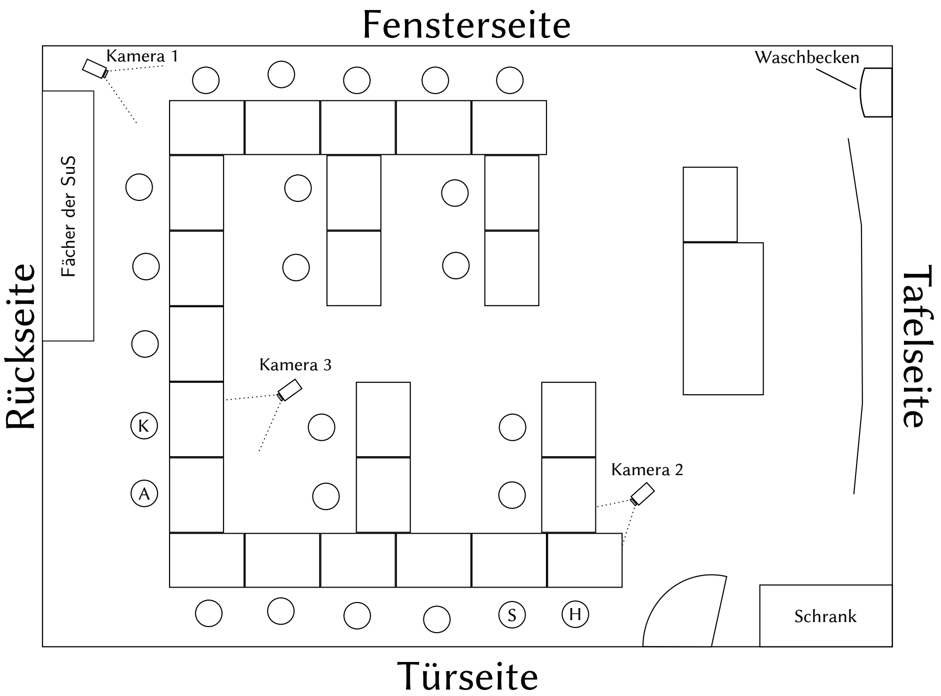


Abbildung C.2.: Schematische Darstellung des Aufbaus im Klassenraum während der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen

Transkription	Bedeutung
AMD:	Ahmed spricht[2]
genau.	Stimme wird abgesenkt
hast du das auch’	Stimme wird angehoben
mal überlegen-	Stimme bleibt in der Schwebe
‚ich würd sagen	setzt neu an
NEIN	laut gesprochen
ich g-l-a-u-b-e	gedehnt gesprochen
(unverständlich)	unverständliche Aussage
(Ach so)	unsichere Transkription
(.)	1 Sekunde Pause
(..)	2 Sekunden Pause
(...)	3 Sekunden Pause
(9sec)	9 Sekunden Pause
[. . .]	Auslassung im Transkript
(*zeigt auf die Formel*)	nonverbale Kommunikation
(*Kommentar: . . .*)	Kommentar

Tabelle C.1.: Die verwendeten Transkriptionsregeln im Überblick

Fehler in der Grammatik wurden nicht korrigiert. Die Transkripte wurden nicht gekürzt und enthalten somit auch unter Umständen anstößige Inhalte; es wurde lediglich darauf geachtet, dass die Privatsphäre der Schülerinnen und Schüler gewahrt bleibt.

Zahlen wurden stets als Zahlwörter transkribiert, also „eins“, „zwei komma vier“, „sechs Siebtel“, ... Wenn klar war, dass sich auf Variablen bezogen wird, wurde zugunsten der Lesbarkeit „x“, „y“ . . . (statt „icks“, „ypsilon“, . . .) transkribiert. Wenn die entsprechenden Variablen nur unvollständig ausgesprochen wurden, wurde aber die vollständige Schreibweise so weit verwendet, wie gesprochen wurde, also beispielsweise „ick“ oder „ypsi“, ebenso in den seltenen Fällen in denen eine Pluralform („ickse“, „ypsilons“) entwickelt wurde.

Richtungen sind in den Transkripten stets so angegeben, wie sie sich für die handelnden Personen darstellen, in Grenzfällen wird explizit gemacht, aus wessen Sicht die Szene beschrieben wird. Eine Sondersituation bildet die Stellung zur Tafel, hier wird stets aus Sicht der Klasse beschrieben. Die Lehrerin wird also auch dann als links von der Tafel stehend beschrieben, wenn sie selbst sie zu ihrer Linken hat, weil sie mit dem Rücken zur Wand steht. Wenn Gegenstände, insbesondere Aufgabenblätter und Hefte bearbeitet werden, werden die Richtungen so bezeichnet, wie sie sich in normaler oder anfänglicher Haltung ergeben.

[2]Für alle weiteren Kürzel siehe Tabelle C.2.

Kürzel	Name	Anmerkungen
AGR	Annegred	
ALC	Alicia	
AMD	Ahmed	
ANA	Anna	
ANL	Arnold	
CLY	Celly	
GTR	Günter	
HBT	Herbert	
JAY	Jay	
JRM	Jeremy	
KLY	Kelly	
KNH	Khanh	
KTI	Katie	
KZY	Kizzy	
LCS	Lucas	
MIA	Mia	
MLA	Melina	
MMD	Muhamed	
MRI	Marie	
MRT	Murat	Spitzname Ray
OLV	Olav	
PL	Paul	
RCO	Rico	
SBN	Sabine	
L	Lehrerin/Frau Kahn	
F	Forscher/Thomas Janßen	

Tabelle C.2.: Zuordnung der Kürzel zu den Namen der in den Transkripten vorkommenden Personen

D. Ergänzende Transkripte

An dieser Stelle werden die Transkripte von Episoden dargestellt, die im Text nur auszugsweise wiedergegeben wurden oder auf die nur verwiesen wurde. Sie sind hier chronologisch sortiert, sowohl diese als auch die Transkript(auszüg)e im Text lassen sich aber auch anhand der Liste der Episoden (ab Seite 313) finden.

Episode D.1: 111205_3_LG1_36: „Nee ich glaub ich hab noch ne Idee."

Die Schachteln liegen weiterhin alle auf der rechten Seite, jetzt allerdings in einem großen Stapel, die Streichhölzer auf der linken Seite. Katie führt Privatgespräche mit einem Nachbartisch weiter hinten.

42 AMD: (*atmet hysterisch ein, schaut auf den Stapel der Streichholzschachteln*) Nee ich glaub ich hab noch ne Idee.
43 KTI: (*wendet sich wieder halb nach vorne, schaut kurz auf die Streichhölzer, dann zu Ahmed*) Und die wäre-
44 AMD: (*zieht sich die Jacke zu, greift die drei oberen Schachteln und legt sie auf die linke Seite*) (...) (*zeigt nacheinander von rechts nach links auf die einzelnen Streichhölzer*) Eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn zwölf dreizehn virzehn'
45 KTI: Wehe du nimmst die Hälfte- (*lacht leise*)
46 AMD: (*beginnt wieder von rechts auf die einzelnen Streichhölzer zu zeigen*) Eins zwei drei vier fünf sechs sieben' (*zieht die sieben abgezählten Streichhölzer mit dem Finger nach rechts zusammen*)
47 KTI: Wusste ichs-
48 AMD: (*zieht die sieben Streichhölzer auf die rechte Seite*) (..) Könnte auch so gehn ne' *(Katie sortiert die Streichhölzer, die jetzt auf der rechten Seite liegen, Ahmed dreht sich kurz in Richtung der Lehrerin, meldet sich, lässt den Arm wieder sinken*) (4sec) (*wendet sich wieder nach vorne, zeigt nacheinander von links nach rechts auf die einzelnen Streichhölzer auf der linken Seite*) ,und jetzt eins zwei drei vier fünf sechs sieben- (*hält seine rechte Hand an die obere Schachtel auf der linken Seite , tut aber zunächst nichts*) (..)
49 KTI: Acht neun zehn-
50 AMD: (*hebt erst mit der rechten Hand die obere Schachtel auf der linken Seite ab und legt sie rechts daneben, nimmt dann mit der linken Hand erst die zweite Schachtel ab und legt sie woanders hin und hebt dann die dritte Schachtel kurz an*) Eins zwei drei- (*hebt kurz den linken Arm an, lässt ihn dann wieder auf den Tisch sinken, greift dann nach dem Stapel auf der rechten Seite und zieht die Hand wieder zurück*) ,zehn- (*zeigt*

auf die Streichhölzer auf der rechten Seite, nuschelnd) ‚eins zwei drei wi ö- (*hebt die obere Schachtel auf der rechten Seite ab*) ‚eins- (*schüttelt die Schachtel mehrmals, schaut dabei kurz Katie an*) (..) ‚da sind drei ‚zehn. (*hält die drei Schachteln weiterhin fest*) (..) (*schaut Katie an*) ‚könnt doch so sein oder' (*lässt den Stapel auseinanderfallen*) (..) ‚auch wenn der ach M-ann- (*Katie sortiert die Streichhölzer und Schachteln bzw. geht sie mit der Hand ab*) (8sec)

Episode D.2: 111205_3_LG1_44-59_3: Katie und Ahmed rekapitulieren die Situation

95 AMD: (*dreht sich wieder nach vorne*) Lass mal reingucken. (*nimmt eine Schachtel in die Hand*)
96 KTI: Hab ich schon. (*lacht, Ahmed öffnet die Schachtel und schaut hinein*) (..)
97 AMD: Zwei- (*nimmt die andere Schachtel von der linken Seite, öffnet sie und schaut hinein*)
98 KTI: (*deutet auf die vier Schachteln auf der rechten Seite, die sie in einem Stapel hingelegt hat*) Die sind auch überall zwei drinne. (..)
99 AMD: Hier auch. (*legt die Schachtel wieder auf den Tisch und schiebt beide Schachteln zusammen neben das Gleichheitszeichen, schaut dann in die Klasse, von Katie weg*) (..)
100 KTI: (*zeigt nochmals auf die vier Schachteln auf der rechten Seite*) Hier sind überall zwei drinne- (*Katie und Ahmed sitzen weitestgehend regungslos herum, schauen umher*) (16sec) (*Ahmed steht auf und geht nach hinten, Katie sitzt weiterhin untätig herum*) (7sec)
101 F: (*kommt zum Tisch*) Ihr wisst jetzt wie man das löst'
102 KTI: (*schaut zum Forscher auf*) Was'
103 F: Ihr wisst wie man das löst jetzt' (*beugt sich über den Tisch*)
104 KTI: Ja ham wir ja (*deutet unbestimmt auf den Tisch*) schon jetzt-
105 F: (*Katie dreht ein Gummiband um ihre Hand*) Okay- ‚und habt ihrs auch schon aufgeschrieben'
106 KTI: Nein- ‚wir wissen wie wirs aufschreiben wolln.
107 F: (unverständlich). ‚in eigenen Worten einfach. (*bewegt das Blatt in seiner rechten Hand rythmisch nach vorne*) ‚wie man vorgeht. (...)
108 KTI: Hoah- (*rückt auf ihrem Stuhl umher und greift nach ihrem Stift, der Forscher geht weg, Ahmed kommt von hinten wieder, hält sich aber noch am Nachbartisch auf*) (4sec) , Ahmed- (4sec) (*Ahmed setzt sich wieder hin, mit dem Rücken zu Katie, beide sitzen untätig herum*) (13sec)
109 AMD: (*die Lehrerin fordert die Klasse zur Ruhe auf, Katie klopft mit ihrem Stift auf dem Tisch herum*) Aber aber aber aber- (*hebt den Zeigefinger in die Luft*) ‚aber aber (*Katie zupft an Ahmeds Kaputze, Ahmed dreht sich wieder nach vorne*) ‚mal dann gibts jetzt doch voll viele andere Möglichkeiten- (*schaut erst zu Sabine, die knapp außerhalb des Bildbereichs steht, dann auf den Tisch*)
110 SBN: Aber die Möglichkeit (*zeigt kurz auf den Tisch*) ist doch am leichtesten-

111 AMD: (*legt eine der Schachteln von der linken Seite auf den Stapel auf der rechten Seite*) Ja es gibt ja auch noch zum Beispiel so- (*schiebt zwei Streichhölzer von der rechten auf die linke Seite, eines bleibt dabei in der Ritze zwischen den Tischen hängen*)
112 KTI: (*streckt den Arm nach Ahmeds Arm aus*) Oh Mann mach bitte nein nein nein nein nein nein nein-
113 SBN: (*teilweise gleichzeitig, gestikuliert heftig in Richtung der rechten Seite*) Aber du weißt doch nich was da drinne ist deswegen. (*hält die Hand weiterhin in der Luft*) (..)
114 AMD: Öh. (*legt das Streichholz von der linken wieder auf die rechte Seite, pult das andere aus der Ritze und legt es ebenfalls wieder nach rechts*) (.)
115 SBN: Das weißt du nicht.
116 HBT: (*schaut auf zu Sabine*) Doch. (*lächelt*) ‚ich hab reingeguckt. (*Herbert und Katie lachen*)
117 SBN: Ja (*gestikuliert mit dem rechten Arm*) aber trotzdem ‚du darfst da nich reingucken-
118 SX1: Ey Ahmed Ahmed- (*Katie legt die Streichholzschachtel vom Stapel auf der rechten Seite wieder auf die linke Seite*) ‚Ahmed- ‚Ahmed- (unverständlich)
119 AMD: (*dreht sich zu dem Mitschüler*) Ja aber du du ö-h-
120 SX1: Ahmed du hast grad dein Geständnis gemacht vor der Kamera. (*Ahmed schaut in die Kamera, Katie lacht*)
121 AMD: (*schaut wieder den anderen Schüler an*) Hä'
122 SX1: Du hast grad dein Geständnis vor der Kamera gemacht.
123 KTI: (*zeigt auf das Mikrofon*) Am Mikrofon-
124 AMD: (*schaut immer noch den anderen Schüler an*) Was fürn Geständnis-
125 SX2: Dass du n Hecht bist.
126 SX1: Ich hab reingeguckt. (*lacht*)
127 AMD: (*zuckt mit den Schultern*) Ja- und- ‚als ob ich der einzige bin. (*beugt sich nach vorne, spricht in das Mikrofon, schaut in die Kamera*) ‚ja ich habe da reingeguckt- (*alle Schüler lachen*) (6sec)
128 KTI: (*zeigt in die Klasse, wahrscheinlich wo die Lehrerin gerade erwas erklärt*) Hör zu hör zu- (*beugt sich nach vorne, Ahmed schaut vor sich auf den Tisch*) (.)
129 AMD: Das voll- (*schaut auf den Tisch vor sich, Katie schaut weiterhin in die gleiche Richtung*) doof ‚weil es gibt- ‚es gibt ja tausende Möglichkeiten- ‚oder- (*schaut Katie an*)
130 KTI: (*teilweise gleichzeitig, lehnt sich zurück*) Und wie solln wir die aufschreiben- (.) ‚das is das Problem-
131 AMD: Nein wir solln eine allgemeine Lösung aufschreibn. (.) (*schaut auf seinen Block*) ‚und ich hab (*wedelt mit der linken Hand über der Block*) jetzt schon zwei verschiedene Möglichkeiten aufgeschriebn- (.) (*wedelt weiter mit der Hand, wird schneller*) ‚wä-ä-ä. (*lässt die Hand sinken, schaut auf die rechte Seite, dann in die Klasse, Katie schaut ebenfalls in die Klasse*) (11sec) ‚die Schachteln kann man einfach wegtun. (*schaut erst auf den Tisch, dann Katie an*) (..) ‚oder was. (...)
132 KTI: (*spielt mit ihrem Zopf*) Oah Mann ey-

Episode D.3: 111205_5_LG1_x: Ahmed bei Sabine und Herbert

1 AMD: Warum habt ihr da reingeguckt- (*zeigt auf die Schachteln, die auf der rechten Seite in einem hohen Stapel aufeinander liegen*)
2 SBN: (*hockt vor Ahmeds Tisch*) Weil wir da reingucken wollten' (*lacht*)
3 AMD: Ja aber (*zieht die rechte Hand zurück, greift damit den Stift, der vor ihm liegt*) das das das das gar nich Sinn der Sache w-e-i-l- ,das (*schaut kurz in Richtung des Stapels*) egal wie viel da drin sind. (*schaut auf seinen Block, klopft dann dreimal mit dem Stift darauf*) ,weil man muss erstmal- (*bewegt die linke Hand wellenförmig über der linken Seite, auf der die Streichhölzer liegen*) ,auf eine Seite alle (*zeigt unbestimmt auf den Stapel der Schachteln, legt dann die linke Hand auf den rechten Arm*) Schachteln und auf andern S- (*hebt den linken Zeigefinger an*) ,und auf die andre Seite (*deutet mit der linken Hand unbestimmt auf die linke Seite, wo die Streichhölzer liegen*) alle Streichhölzer.
4 SBN: Wies-o-
5 AMD: Damit man- (*zeigt nacheinander von links nach rechts auf die Streichhölzer*) ,eins zwei drei vier fünf sechs siebn acht neun zehn elf zwölf dreizehn vitzehn- (*schaut Sabine an*)
6 SBN: Ja aber wir h-a-m- neunzehn- (*Ahmed fasst sich an den Hinterkopf*) ,und dreiunzwanzich dann auf einer Seite.
7 AMD: (*steht auf und wendet sich in Richtung von Sabines Tisch*) Soll ich euch mal helfen-
8 SBN: (*steht auf*) Ja. (*geht zusammen mit Ahmed nach rechts weg, Katie bleibt sitzen*)

10 AMD: (*geht vor Sabine her zu ihrem Tisch, Herbert hält die Schachteln auf seiner Seite in der Hand und bewegt sie umher*) Habt ihr alles einge, alles aber wieder eingepackt-
11 HBT: (*Ahmed steht jetzt an Sabines Tisch, deutet mit der linken Hand auf die Schachteln auf ihrem Tisch, Herbert schaut dorthin*) Wieso o eingepackt-
12 AMD: (*teilweise gleichzeitig*) So wies war-
13 SBN: (*steht hinter Herberts Stuhl*) Wir ham da grade reingeguckt- (*lacht*)
14 HBT: A-ch nee- (*lässt die Streichholzschachteln auf den Tisch fallen*)
15 AMD: Doch habt ihr.
16 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Ja also (*wedelt mit der Hand in Richtung ihres Tisches*) das war bei mir und (*wedelt mit der Hand über Herberts Tisch*) das war bei ihm. (*bewegt sich an Ahmeds Rücken entlang zu ihrem Stuhl*)
17 AMD: (*nimmt mit der linken Hand die Streichhölzer von der linken Seite*) Ja. (*bewegt sich insgesamt in Herberts Richtung, legt die Streichhölzer auf der rechten Seite der Gleichung ab, greift mit der rechten Hand gleichzeitig die dort liegenden Schachteln*) (..)
18 HBT: Ey ich will grad bauen- (unverständlich)
19 AMD: (*teilweise gleichzeitig, legt die Schachteln auf der linken Seite ab*) Leg alle nebeneinander. (*wendet sich zu Herbert, zieht mit der rechten Hand seinen Arm nach oben und verschiebt die darunter liegenden Streichhölzer zu denen, die er vorher auf die rechte Seite verschoben hatte*)

20 HBT: (*lauter*) Ey ich will BAUN-

21 SX: (*vom linken Nachbartisch*) Habt ihrs raus'

22 AMD: Pech gehabt. (*schiebt die Streichhölzer mit beiden Händen zusammen*)

23 SBN: (*zum Schüler am Nachbarstisch gewandt*) Nö.

24 HBT: Oah Mann.

25 AMD: (*teilweise gleichzeitig*) Zähl mal. ‚wie viele sind das.

26 HBT: (*schiebt die Streichölzer mit beiden Händen zusammen, reißt beim Sprechen den Mund weit auf, Ahmed zieht die Ärmel seiner Kapuzenjacke hoch*) Neunz-ä-hn-

27 AMD: (*Sabine wendet sich wieder Herbert und Ahmed zu*) Sicher'

28 HBT: Neunzähn- (*streicht sich die Haare aus dem Gesicht, reibt sich daraufhin einige Zeit die Stirn*)

29 SBN: Warte er (*gestikuliert unbestimmt über dem Tisch*) zeigt uns grade.

30 AMD: (*teilweise gleichzeitig*) Gut. ‚und jetzt kannst du ja gucken. (*zeigt von rechts nach links auf die Schachteln, die jetzt auf der linken Seite liegen*) ‚eins zwei drei vier fünf sechs sieben sind das. (*schaut auf das Gleichheitszeichen, stützt sich mit beiden Händen auf dem Tisch auf*) ‚jetzt kannst ja mal rechnen. ‚wenn (*hebt die Schachtel ganz rechts an und schlägt sie auf den Tisch*) hier drei sind- (*hebt die Schachtel nochmals an und schlägt sie wieder auf den Tisch, Herbert stützt sich nun am Ohr auf*) ‚ne- (*Herbert lässt seinen Kopf an seinem Arm abrutschen, sodass er schließlich sein Gesicht in seinem Arm vergräbt*) ‚dann sinds drei- (*nimmt die nächstliegende Schachtel und legt sie auf die erste Schachtel, Herbert schaut wieder auf, reibt sich die Augen, gähnt*) ‚sechs- (*nimmt die nächste Schachtel und legt sie auf die ersten beiden*) (.) ‚neun- (*nimmt die nächste Schachtel und legt sie auch auf den Stapel*) ‚zwölf- (*nimmt die nächste Schachtel*)

31 SBN: Fünfzehn-

32 AMD: (*legt die Schachtel auf den Stapel*) Fünfzehn-

33 SBN: (*teilweise gleichzeitig, streckt den Zeigefinger des rechten, auf dem Tisch liegenden Arms aus und schiebt die beiden verbliebenen Schachteln nacheinander in Richtung des Stapels*) Achtzehn einunzwanzich. (*Ahmed hebt die Schachtel an, hält sie dann in der Luft*) (.)

34 AMD: (*dreht die Hand herum, sodass jetzt die Schachtel darin liegt*) Ja jetzt kann man hier aber auch (*schaut Sabine an*) weniger reintun.

35 HBT: Nein-

36 AMD: (*schaut in die Mitte, wahrscheinlich auf den Stapel, legt die Schachtel zurück*) Wie viel hatten wir' (*zeigt mit dem Zeigefinger nacheinander von unten nach oben auf die Schachteln, die auf dem Stapel liegen*) ‚drei sechs neun-

37 SBN: (*zeigt auf den Stapel, bewegt den Zeigefinger nach mehrfach nach links*) Drei hatten wir in jeden Kästchen.

38 AMD: (*gleichzeitig, zeigt nacheinander auf die beiden oberen Schachteln*) Zwölf fünfzehn. (*zeigt nochmals auf die obere Schachtel*) ‚fünfzin' (*greift nach der nächsten Schachtel, bekommt sie aber nicht zu fassen*)

39 HBT: Is achtzehn-

40 AMD: (*gleichzeitig, hebt die Schachtel an*) Packen wir hier- (*schüttelt die Schachtel ein bisschen*) zum Beispiel- (*legt die Schachtel auf dem Stapel ab, kratzt sich an der Nase*)

‚nochmal drei rein' (*nimmt die letzte Schachtel, hält dann wieder über dem Stapel inne*) ‚und hier ist dann- einer drin ne' (*zeigt mit dem rechten Finger auf die Streichhölzer auf der rechten Seite*) ‚neunzehn- oder' (*legt die Schachtel auf dem Stapel ab*) ‚ja dann is hier ja einer drin.

41 SBN: (*macht mit der Hand des auf dem Tisch liegenden rechten Arms eine Bewegung in Richtung des Stapels*) Ja aber das stimmt ja nich.

42 HBT: (*gleichzeitig, schaut zu Ahmed auf, lächelt*) Is aber nich.

43 L: (*gleichzeitig, tritt von rechts an den Tisch heran*) So was habt ihr hier'

44 AMD: Ja aber da ‚darum (*hält die linke Hand mit der Handfläche nach oben vor sich*) gehts ja auch glaub ich gar nich. (*macht einen Schritt rückwärts*)

45 L: (*geht um den Tisch herum zu Ahmed, berührt ihn leicht am Rücken, Ahmed entfernt sich zu seinem Tisch*) So-

46 SBN: (*gleichzeitig*) Doch das (*nimmt den Stapel und schiebt ihn mühsam nach links, dabei wackelt er kritisch*) muss ja gleich sein.

47 L: (*hockt sich zwischen Sabine und Herbert hin*) So das muss immer gleich sein. ‚so wie lag das (*greift die oberen vier Schachteln vom Stapel und hält sie in der Mitte in der Luft*) vorhin'

Episode D.4: 111221_1/2_LG8_7: Erklärung des Spiels „Einpacken und Auspacken"

1 L: (*Lehrerin dreht sich zur Tafel*) So pass auf. (*schiebt die Tafel nach oben*) ‚ich erklär das nochmal. (.) ‚also du hattest ja hier (*schreibt an die rechte Tafelhälfte „$x = 2$"*) zum Beispiel sowas ne' hattest du dir überle-gt'

2 AMD: (*gleichzeitig, außerhalb des Bildbereichs*) Ja.

3 L: (*redet ohne Unterbrechnung weiter, schaut in Ahmeds Richtung, kratzt sich an der Nase*) Und dann hast du rückwärts gerechnet ne'

4 AMD: Ja.

5 L: Ja. (*schiebt die Tafel mit der linken Hand etwas nach oben, dreht sich zur Tafel*) ‚und dann hast du d-a' (*dreht sich zu Tafel, schaut dann wieder zu Ahmed*) ‚sach mal irgendwas' (*reckt den Kopf etwas in Ahmeds Richtung*) (.)

6 AMD: Ȯ-h-f-f-

7 MRI: Mal zwei- (*die Lehrerin dreht ihren Kopf in Maries Richtung*) (.)

8 SBN: (*schaut von Ahmed zur Lehrerin, mit hoher Stimme*) Ja.

9 AMD: Ja. ‚mal zwei zum Beispiel.

10 L: (*dreht sich zur Tafel und schreibt rechts neben die Gleichung „$|\dot{2}$"*) Hast du mal zwei gerechnet ‚was hast du dann' (*bleibt mit dem Gesicht zur Tafel stehen, den Arm halb gehoben*)

11 AMD: Ähm- ä z zwei x- (*die Lehrerin schreibt in einer neuen Zeile „$2x =$"*) (.) ‚gleich äh vier'

12 L: (*schreibt weiter „4"*) Ja. (*schreibt weiter „/" unter dem Strich in der Zeile darüber*) ‚und dann hast du was gemacht' (*macht einen Schritt zurück, stützt sich mit der linken

Hand auf der Tafelkante auf, schaut in Ahmeds Richtung)
13 AMD: Nochmal ä-öh ,z-Beispiel- ,mal sieben.
14 L: Nochmal mal sieben okay- (*schreibt hinter den Strich* „$\cdot 7$“)
15 SBN: (*teilweise gleichzeitig*) Aber muss man nich auch mal sieben x oder so kann man das auch nehm’ (*die Lehrerin schaut über ihre Schulter in Sabines Richtung, beißt die Lippen zusammen*)
16 ANL: Mal’ (*die Lehrerin schaut auf das Geschriebene an der Tafel, Unruhe in der Klasse*)
17 AMD: Vitzehn x- (*die Lehrerin schaut zu Ahmed*) gleich achtnzwanzich. (*die Lehrerin schreibt in einer neuen Zeile* „$14x = 28$“, *weiterhin Unruhe in der Klasse*) (...)
18 L: Und dann- (*schaut wieder zu Ahmed*)
19 AMD: Ähm-
20 L: (*dreht sich zur Mitte der Klasse, hält den rechten Zeigefinger vor den Mund, schließt die Augen*) Psch-sch-sch-
21 AMD: (*gleichzeitig*) Kamman ja zum Beispiel noch-
22 L: (*schaut wieder zu Ahmed*) Plus irgnwie.
23 AMD: Ähm plus-
24 MRL: Plus acht.
25 AMD: (*die Lehrerin dreht sich zur Tafel und schreibt* „$|+$“) Plus- äh- sieben. (*die Lehrerin schreibt* „7“) Streichhölzer halt.
26 L: Plus sieben was steht dann hier’ (*tippt mit dem Zeigefinger auf den gedachten Anfang der nächsten Zeile, schaut weiterhin auf die Tafel*)
27 AMD: Vitzehn x plus sieben’ (*die Lehrerin schreibt* „$14x + 7 =$“) (.) (*die Lehrerin hält den Arm auf halber Höhe rechts unter dem Gleichheitszeichen*) ,und da ste-ht dann fümundreißig.
28 L: (*schreibt* „35“) (.) So was kamman dann noch machen’ (*geht einen Schritt rückwärts parallel zur Tafel, dreht den Kopf etwas nach rechts, in Murats Richtung*) ,Murat’ zum Beispiel’ ,was kann man noch machen’ (*schaut Murat an, atmet tief ein und aus*) (..)
29 MRL: Keine Ahnung minus’ (*die Lehrerin dreht ihren Kopf langsam in Richtung der Tafel*) (.)
30 L: J-a- (*schaut wieder zu Murat*) (.) ,kann man- (*nickt*) (.) (*macht eine Geste mit der rechten Hand in Murats Richtung*) ,was denn.
31 MRL: (unverständlich) zwölf’
32 L: (*schaut wieder an die Tafel*) Ja mach mal ne größere Zahl- (*macht einen Schritt nach vorne und schreibt ans Ende der Zeile* „$|-$“)
33 MRL: (unverständlich)
34 SX: Zehn.
35 MRL: Zwölf.
36 L: Ja. (*schreibt* „12“) zwölf. ,was kommt dann (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) hier hin’
37 MRL: Ähm sechsunzwanzich-
38 L: (zieht in einer neuen Zeile eine Linie von links unten nach rechts oben, analog zum oberen Strich der "1ïn der Zeile darüber, lässt die Kreide wieder sinken) Ne.

39 MRL: (*die Lehrerin dreht sich von der Tafel weg, schaut erst an die Decke und dann in die Klasse*) Äh dreizehn. (*die Lehrerin schaut Murat mit zusammengezogenen Augenbrauen und zusammengekniffenen Lippen an*) ‚äh- ‚keine Ahnung.
40 SBN: (*einige Schüler lachen*) Alter da kommt (unverständlich)
41 L: (*teilweise gleichzeitig, zeigt zunächst auf die linke Seite der Gleichung, streckt dann den Arm in Richtung des rechten Endes der Zeile aus*) Das is nur minus minus zwölf (*legt die Hand kurz auf* „| − 12“) Streichhölzer ne’ ‚das sind (*zeigt abwechselnd auf* „14*x*“ *und* „| − 12“) nich minus zwölf Schachteln. (*legt die Hand auf* „14*x*“, *zeigt dann darauf*) ‚das hier bleibt.
42 MRL: (*gleichzeitig*) So was muss ich-
43 L: Du rechnest (*zeigt auf* „+7“) sieben minus das (*zeigt wieder auf* „14*x*“) ‚aber nich vierzehn x (*schaut Murat an und schüttelt den Kopf*) minus zwölf-
44 MRL: Was rechnen Sie minus zwölf’
45 MRI: Wieso minus zwölf überhaupt-
46 SBN: (*gleichzeitig, die Lehrerin zeigt wieder auf* „+7“) Sieben minus zwölf.
47 ANL: Fünf.
48 MRL: Wieso- minus-
49 SBN: Sind minus fünf.
50 L: (*bewegt die Kreide zum Anfang der Zeile, zeigt dann auf* „−12“*)* Weil da minus-weil (*dreht sich zu Murat, nickt einmal*) ‚du hast mir doch grad gesacht du willst minus rechnen-
51 MRL: Sorry Frau Kahn ich dachte (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) die Zahl- (*kreist mit dem Zeigefinger*) ‚da ‚so.
52 SBN: JA BEIDE MUSST DU DOCH DANN.
53 MRL: Keine Ahnung- (*Unruhe in der Klasse*)
54 SX: Du musst nur Streichhölzer wegmachen-
55 SBN: (*streckt den Arm in Richtung der Lehrerin aus*) Oh Frau Kahn lassen Sie das (unverständlich) (*die Lehrerin dreht sich zu Sabine, lacht sie an, beugt sich dabei noch vorne und drückt die Tafel hinter ihrem Rücken nach oben*) (Unruhe in der Klasse)
56 ANL: Wieso minus fünf’
57 SX: Minus fünf.
58 L: Ja da- ‚die ham das alle noch nich verstanden (*dreht sich zur Tafel, nimmt den Schwamm und wischt damit über den Bereich unterhalb des bisher Geschriebenen*) ‚warte mal eben. (*Sabine und andere lassen ihre Arme sinken, stöhnen*) ‚warum- ‚denn’ ‚minus zwölf jetzt eigntlich- (*Marie hebt ihren Arm*) (.) ‚Marie.
59 MRI: (*teilweise gleichzeitig, lässt ihren Arm sinken*) Achso waRUM. ‚ja weil das da steht ne-
60 L: (*steht an der Tafel angelehnt*) Ja aber warum denn- ‚Arnold fragt ja grade ja warum denn zwölf-
61 SBN: Weil Murat (unverständlich)
62 ANL: Wieso redet ihr denn beide- (.)
63 SBN: (*macht mit der linken Hand eine Geste in Richtung der Tafel*) Man kann doch
64 L: (*gleichzeitig*) (unverständlich) egal was. (*schüttelt den Kopf*) ‚ihr sollt das ja-

65 MMD: (*mehrere Schüler sprechen parallel, sind aber nicht zu verstehen*) Wir sollten doch einfach nur ne Gleichung so machen-
66 L: (*schüttelt den Kopf*) Egal wie. ,egal w mit welchen Zahln.
67 SX: Am besten richtich schwierich (unverständlich)
68 L: Da kann man sich Zahln ausdenken wie man will. ,ihr rechnet jetzt ja (*macht mit der rechten Hand einen nach oben geöffneten Bogen*) andersrum. (*Sabine hebt ihren rechten Arm, ein oder zwei Schüler äußern sich unverständlich*) (...) ,Sabine. (*dreht sich zur Tafel, setzt die Kreide in einer neuen Zeile an*) ,was kommt denn da hin'
69 SBN: (*die Lehrerin schreibt „$14x - 5 =$“*) Vitzehn- ,x- ,minus- fünf. (.) (*die Lehrerin hält die Kreide neben dem Gleichheitszeichen in der Luft*) ,bei der anderen komm-n-achtn- zwanz- (*die Lehrerin schreibt einen nach links offenen Bogen, hält dann inne*) ,NEIN achtn- (*bewegt den Oberkörper nach vorn und wieder zurück*) ,achtzehn. (*die Lehrerin schreibt über den bereits geschriebenen Bogen „1“, vervollständigt dann zu „18“, macht einen Schritt zurück, schiebt die Tafel nach oben, schaut dabei auf das Geschriebene*) (...)
70 L: (*schaut weiterhin auf das Geschriebene, stützt sich mit dem linken Arm auf der Unterkante der Tafel auf*) Ähm- (.) (*dreht sich in Richtung der Klasse*) ,so was kann ich denn jetzt noch machen ich kann ,ich kann ja d ,das- (*zeigt erst auf „$| + 7$“, dann auf „$| - 12$“*) ,das nich nur mit Streichhölzern machen sondern auch
71 SBN: (*hebt den rechten Arm, gleichzeitig*) Au ich-
72 L: (*redet ohne Unterbrechung weiter*) mit SCHACHteln- (*reibt sich mit dem rechten Ärmel die Stirn, Sabine hält ihren Arm weiterhin hoch, Schüler fangen an zu reden*) ,man kann ja auch Schachteln dazutun oder (*wird leiser*) abziehn oder was-
73 AMD: (*gleichzeitig*) Aso H-Ä-
74 SBN: (*dreht sich nach hinten*) Ja x- (*wedelt mit dem Arm, dreht sich wieder nach vorne, hält den Arm weiterhin nach oben*)
75 HBT: (*gleichzeitig, zeigt auf die Tafel*) Das sind dreiunzwanzich. (*es wird leise, die Lehrerin schaut auf das Geschriebene an der Tafel, Sabine fasst sich mit der rechten Hand an den Kopf*) (.)
76 MRI: Wollt ich auch grad (unverständlich)
77 SBN: Oh verdammt. (*lacht*)
78 HBT: (*zeigt nochmals auf die Tafel*) Das war achzehn.
79 L: (*gleichzeitig*) Oh Gott- (*nimmt den Schwamm, wischt „18“ weg, schreibt stattdessen „23“, Sabine lacht nochmals auf*)
80 MRI: Ich hab das ausgerechnet dreinzwanzich ich so hä wie kommst (unverständlich)
81 MRL: (*gleichzeitig, zeigt auf die Tafel, schaut nach links, wo Sabine von ihm aus gesehen sitzt*) Jau Mann (unverständlich) (*weitere Schüler reden gleichzeitig*)
82 LCS: Frau Kahn is (unverständlich) (*einige Schüler lachen, Sabine besonders laut, die Lehrerin grinst, schaut zu Sabine*)
83 SX: Ich hab mich auch schon gewundert ey-
84 L: So Sabine-
85 SBN: Jetzt kann man auch noch- (unverständlich)- (*die Lehrerin schreibt „$|+$“*) (.) ,ä-h-m- ,fünf x oder so (unverständlich) (*die Lehrerin schreibt „$5x$“*)

86 L: Ja. ‚genau und wenn ich (*geht rückwärts, sodass sie wieder links vom Geschriebenen steht, tippt mit der Hand mehrfach auf eine Stelle unterhalb von „14x“*) hier jetzt auf dieser Seite fünf x dazuzähl Kizzy ‚was kommt denn da hin’ (*mindestens zwei andere Schüler heben ihre Arme, einer schnippst*)
87 SX: (*leise*) Neunzehn.
88 KZY: Neunzehn’ (.) (*Lucas lässt seinen Arm sinken, Marie hält ihren weiter hoch*)
89 L: (*dreht sich zur Tafel und schreibt „19x“*) Neunzehn x’ ‚genau’ (schreibt unmittelbar weiter „−5 =“) ‚das bleibt stehn ne’
90 KZY: Ja-
91 L: (*zeigt auf die Tafel rechts vom Gleichheitszeichen*) Und hier’
92 KZY: (*gleichzeitig*) Und hier ne dreinzwanzich.
93 SX: Hn hn- (*es wird unruhig, Marie beginnt mit dem immer noch erhobenen Arm zu wedeln*)
94 L: Ja aber (*streckt den Arm aus und tippt mehrfach auf „| + 5x“*) dieses hier noch dazu.
95 SBN: (*mehrere Schüler melden sich*) Das ist doch fünf-
96 KZY: Ach so-
97 L: (*gleichzeitig*) Du musst ja immer (*führt die beiden Hände vor der Brust zusammen und bewegt sie hin und her*) auf beiden Seiten was dazutun.
98 SX: (*gleichzeitig, in der Nähe von Kizzy, leise*) Achtnzwanzich.
99 KZY: Achtnzwanzich’ (*die Lehrerin dreht sich halb zur Tafel, hält dann inne*) (.)
100 L: Nein.
101 SBN: (*Marie wedelt wieder mit dem Arm*) FÜNF-
102 L: (*zeigt auf „23“*) Dsind keine x hier.
103 MRI: (*gleichzeitig, wedelt weiterhin mit dem Arm*) Ah- ‚ich-
104 KZY: AH fünf x’ (*die Lehrerin schreibt „5x + 23“*) ‚p-u-h ich bin so gut. (.)
105 L: (*eine Schülerin ruft parallel eine Äußerung dazwischen, bis auf das Wort „kompliziert“ unverständlich*) So und kumma dann (*stellt sich wieder links vom Geschriebenen hin, zeigt mit dem angewinkelten linken Arm auf den Anfang der zuletzt notierten Zeile*) hättn wir jetzt schon ne Gleichung die wir- ä-h-m- so- aufschreibn könnten ne’ (*mehrere Schüler rufen dazwischen*) ‚die jemand andres lösen muss. (*weiterhin Unruhe*)
106 AMD: Und was ‚WAS SOLL MAN- dann dem andern zeigen-
107 L: (*klopft mit den Fingerknochen gegen „19x“*) Nur das hier. (*zeichnet einen Pfeil links neben die letzte Gleichung, der auf die Gleichung deutet*) ‚nur dieses hier. (*schaut wieder zu Ahmed*)
108 SBN: UND DER SOLL DAS DANN AUSRECHNEN.
109 AMD: (*gleichzeitig*) Aber das doch ganz normal dann. ‚so-
110 L: Ja und (*lässt die rechte Hand vor sich gegen die linke Hand aufwärts rotieren)* die solln das dann wieder lösen. (*wiederholt die Geste*) ‚und du geguckst (*nickt einmal*) ob das richtich ist.
111 AMD: O-kay- ‚okay- (*Unruhe in der Klasse*)
112 SX: Ich habs verstanden-

113 L: Jetzt ham das alle verstanden (*greift mit beiden Armen hinter sich und drückt die Tafel herunter*) ‚das ja gut-

Episode D.5: 120504_1_LZ9_20-23: „Streichhölzer“ als Gedächtnisstütze

1 L: Ja genau ‚also wir wissen ja- zu dem Zeitpunkt ist das- (*führt die Handflächen mit den Spitzen zusammen*) ‚also wir wissen zu eim bestimmten- (*bewegt die Handflächen leicht gegeneinander*) Zeitpunkt x- is der Wasserstand gleich ne’ ‚also (*bewegt die beiden Hände mehrfach auseinander und wieder zusammen*) die sind gleich ‚die beiden Becken (unverständlich) ‚zu dem Zeitpunkt- ‚zu dem x. (*dreht sich zur Tafel um und schreibt die beiden Terme „*$-7x + 200$*“ und „*$-15x + 300$*“ nebeneinander an*) (9sec) (legt die Hand erst auf den linken, dann auf den rechten Term, schließlich auf den Zwischenraum) ‚also diese beiden sind dann gleich ne’ ‚ich mach einfach mal n (*schreibt „=“ in den Zwischenraum*) gleich dazwischen ne’ (*lehnt sich leicht an die Tafel an, schiebt sie dabei leicht nach oben*) ‚kennt ihr das denn noch’ (*einige Schülerinnen und Schüler stöhnen auf, Lehrerin macht eine abwehrende Geste, schüttelt den Kopf*) ‚nicht mich angucken (*zeigt auf das Gleichheitszeichen*) dahin- (*Schülerinnen und Schüler, Lehrerin lachen*) (...) SBN: Hä- L: Hä was hä- (*schaut kurz hinter sich an die Tafel*) AMD: (*lacht demonstrativ*) SBN: Die ham irgendwann dann n gleichen Nenner. L: Nenner ham die hier (*schüttelt den Kopf*) gar nich. (*allgemeine Unruhe in der Klasse*) (..) AMD: (zeigt auf die beiden Seiten der Gleichung) Fünfzehn und sieben (unverständlich)-

2 L: So was is das denn jetzt hier- (*zeigt kurz auf die Gleichung, ein Schüler meldet sich*) (.) (*Lehrerin deutet kurz auf den Schüler*)

3 SX1: (unverständlich) (*Unruhe in der Klasse*)

4 L: (*zeigt auf die Tafel*) Das sind zwei Terme ja’

5 SBN: (*meldet sich, zeigt dabei auf die Tafel, redet ohne abzuwarten los*) Ich weiß ich weiß ich weiß mit den Zigarettendingern (*wedelt mit der Hand in der Luft*) ‚Streichhölzern’

6 L: (*wiegt die Hand in der Luft, spitzt den Mund*) Achso-o-

7 AGR: Gleichungn’

8 L: Ne Gleichung genau.

9 SX2: A-a-a-h.

10 L: (*deutet mit der Hand auf die Tafel, schaut dabei die Klasse an*) Aber habt ihr verstanden warum ich die gleichsetze- (*allerlei Zwischenrufe, nichts genau zu verstehen*) (...) (*schaut in die rechte hintere Ecke, zeigt mit der linken Hand auf die linke Seite der Gleichung*) ‚ja ‚weil ja- ‚zu dem (*gestikuliert mit der rechten Hand im Takt*) Zeitpunkt x ‚den wir rausfinden wolln- ‚der Wasserstand gleich is. (*zeigt abwechselnd auf die linke und die rechte Seite der Gleichung*) ‚also das is dann gleich- (.) (*setzt die Geste fort*) ‚es kommt die gleiche Zahl raus (*lässt die linke Hand bei der rechten Seite der Gleichung liegen, gestikuliert mit der rechten Hand nach rechts und nach links*) deswegen kann ich das gleichsetzen-

11 KLY: Und wie rechnen Sie das dann’

12 L: So und wie rechne ich ne Gleichung aus' ich will jetzt ja den Zeitpunkt x rausfinden' (*drei SuS melden sich*) (.) ,Marie.
13 MRI: Man muss doch da immer ,also ,weil die (macht eine Handbewegung von links nach rechts) ,wie bei den Streichhölzern immer-
14 L: J-a ,sach an. ,wie mach ich das.
15 MRI: (*hält die Hand weiterhin in der Luft*) Ähm ,erstmal (*macht eine leichte Handbewegung von links nach rechts*) minus zweihundert kann ich wegnehm-
16 L: J-a das is schonmal super' (*schreibt neben die Gleichung* „| − 200“)
17 KLY: (*klagend*) Ach ja ,nein (unverständlich)
18 L: (*zeigt auf „200“ auf der linken Seite der Ausgangsgleichung*) So wenn ich hier zweihundert wegnehm was bleibt dann da über-
19 MRI: Äh minus sieben x.
20 L: Genau. (*schreibt in einer neuen Zeile* „$-7x =$“) ,und da' (*zeigt auf die rechte Seite der Ausgangsgleichung*)
21 MRI: Fünfzehn x plus hundert.
22 L: (*schreibt rechts weiter* „$15x + 100$“) Super Marie.
23 KNH: Ich hab auch-
24 L: (*ist gerade fertig mit Schreiben*) Sehr schön
25 MRI: Und dann-
26 L: (*macht eine kurze Handbewegung in Maries Richtung*) So stopp wer macht weiter Kizzy.
27 KZY: Ähm und dann minus sieben' ,äh nein-
28 AMD: (*in allgemeiner Unruhe am lautesten*) Nein nein nein ,minus fünfzehn.
29 L: Bitte' (*schaut Kizzy an*)
30 KZY: Minus fünfzehn x'
31 L: (*zeigt auf die rechte Seite der Gleichung*) Dann hab ich hier minus dreißig x.
32 SBN: Plus fünfzehn.
33 L: (*spitzt den Mund*) Oh- (*schreibt rechts neben die Gleichung* „$| + 15x$“) (..) ,so was kommt dann (*zeigt auf die linke Seite der Gleichung*) da hin' (*schaut in die Klasse, niemand meldet sich, allgemeine Unruhe, erst nach und nach gehen einige Finger nach oben*) (7sec)
34 SX3: Acht. (*Lehrerin dreht sich zur Tafel und schreibt "8x = 100"*) (.)
35 MRI: (*allgemeine Unruhe, nur die Äußerungen von Marie und Khanh verständlich*) Ich hasse die Zahl sieben-
36 KNH: Was habt ihr gegen sieben'
37 L: (*zeigt auf „$-7x$“ in der vorherigen Gleichung, schaut Paul an*) Minus sieben plus fünfzehn' (...) (*zeigt langsam auf „$8x$“ in der neuen Zeile*) (..)
38 PL: Acht. (*nickt einmal*)
39 L: (*dreht sich zur Klasse*) So ,und jetzt' (*breitet ihre Arme aus, mehrere Schülerinnen und Schüler melden sich*)
40 SBN: Wir teiln. (.) (*Lehrerin zeigt ruckartig auf Khanh*)
41 KNH: Geteilt durch acht doch oder nich- (...) (*Lehrerin dreht sich wieder zur Tafel und schreibt rechts neben die Gleichung* „$: 8$“, *schreibt direkt in der nächsten Zeile weiter*

„*x* =“)
42 SBN: Sind zwölf komma fünf-
43 L: (*schreibt direkt weiter „12, 5“*) O-h- (..) (*Khanh klatscht*) ,also. bei- (*zeigt erst auf „12, 5“, dann auf „x“ auf der linken Seite der letzten Zeile, dann auf das „x“ in der Titelzeile der Tabelle*) meim x- (*zeigt auf "Minuten in der Titelzeile der Tabelle*) Minuten ,bei zwölf komma fünf Minuten weiß ich dass der Wasserstand (*hält die beiden Hände nebeneinander*) gleich is.
44 HBT: A-h- (*Applaus von fast allen*)
45 L: (*zeigt mit beiden Händen auf die Klasse*) So. aufschreiben- (*allgemeines Stöhnen*)